یک ویژگی مفید متغیرهای تصادفی

محمد امینی دهک[۱]

چکیده

در این مقاله نخست یک ویژگی مفید متغیرهای تصادفی را معرفی می‌کنیم، سپس برخی از خواص و کاربرد آن را که در مرجع [۳] نیز مورد توجه قرار گرفته است، ارائه می‌دهیم. علاوه بر این لم بورل ـ کانتلی[۲] برای پیشامدهای وابسته منفی به یاری این ویژگی اثبات می شود.

۱. مقدمه و تعریف

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $E|X| < \infty$ و $P(X = 0) < 1$ باشد. پتروف[۳] [۳]، کمیت

$$\prod(X) = \frac{E^2X}{EX^2}$$

را به عنوان یک ویژگی مفید متغیرهای تصادفی معرفی کرد، اگرچه این کمیت به سادگی از تعریف واریانس به دست می‌آید، ولی خواص جالب و کاربرد مفید آن در احتمال مورد توجه است. هدف از ارائهٔ این مقاله بیان ویژگیهای $\prod(.)$ و کاربرد آن در احتمال است.

تعریف و قضیهٔ زیر که در [۱] آمده است، برای اثبات نتایج مورد نیازند.

تعریف ۱-۱

الف) پیشامدهای تصادفی $A_1, A_2, \dots, A_n$ به طور منفی وابسته اند، اگر توابع نشانگر آنها به طور منفی وابسته باشند.

ب) دنبالهٔ $\{A_n, n \geq 1\}$ از پیشامدهای تصادفی به طور منفی وابسته اند، اگر هر تعداد متناهی از آنها به طور منفی وابسته باشند.

تبصره ـ تعریف بالا برای پیشامدهای تصادفی دو به دو وابسته منفی نیز درست است.

قضیهٔ ۱ـ۱ . دو پیشامد تصادفی A و B به طور منفی وابسته اند، اگر و تنها اگر: [۱]

$$P(A \cap B) \leq P(A).P(B)$$

قضیهٔ ۱ـ۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $E|X|^r < \infty$ و $0 < r < s$ آنگاه: [۳]

$$\left[E|X|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left[P(X \neq 0)\right]^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \left[E|X|^s\right]^{\frac{1}{s}}$$

۲. ویژگیهای $\prod(.)$

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با $E|X| < \infty$ و $P(X = 0) < 1$ باشد. در این بخش ویژگیهای ۱، ۲، ۳ و ٤ را که در مرجع [۳] ذکر شده اند معرفی کرده، سپس قضایای ۲ـ۱، ۲ـ۲ و ۲ـ۳ که خواص مفید دیگری از $\prod(.)$ را معرفی می کنند، بیان و اثبات می کنیم.

ویژگی ۱ ـ برای هر مقدار ثابت مخالف صفر c،

---

[۱] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه سیستان و بلوچستان

[۲] Borel-Contelli

[۳] Petrov

$$\prod(cX)=\prod(X)$$

ویژگی ۲ ـ برای هر دو متغیر تصادفی X و Y با $E|X|<\infty$، $E|Y|<\infty$، $P(Y=0)<1$، $P(X=0)<1$ داریم:

$$\prod(X+Y)\geq \min\{\prod(X),\prod(Y)\}$$

ویژگی ۳ ـ هرگاه $X_1,X_2,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی نامنفی با $\prod(X_k)\geq t$ باشند، آنگاه

$$\prod\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\geq t;\forall t>0$$

ویژگی ٤ ـ هرگاه X یک متغیر تصادفی نامنفی با $E|X|<\infty$ و $P(X=0)<1$ آنگاه $\prod(X)\leq P(X\neq 0)$.

اثبات ـ در قضیهٔ ۱ـ۲ قرار می دهیم $s=2$ و $r=1$.

قضیهٔ ۲ـ۱ . فرض کنید $X_1,X_2,\ldots,X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل با $E|X_i|<\infty$ و $P(X_i=0)<1$ باشند، آنگاه

$$\prod\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=\prod_{i=1}^{n}\prod(X_i)$$

اثبات ـ بنا به تعریف $\prod(.)$ داریم

$$\prod\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)=\frac{E^2\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)}{E\left(\prod_{i=1}^{n}X_i\right)^2}=$$

$$\frac{\left(\prod_{i=1}^{n}EX_i\right)^2}{\prod_{i=1}^{n}EX_i^2}=\prod_{i=1}^{n}\prod(X_i)$$

قضیهٔ ۲ـ۲ . فرض کنید $\{X_n,n\geq 1\}$ دنباله ای از متغیرهای تصادفی ۱ و ۰ دو به دو به طور منفی وابسته با $\sum_{k=1}^{n}EX_k\geq M$ باشند، هرگاه M یک عدد حقیقی مثبت باشد، آنگاه

$$\prod\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\geq\frac{M}{1+M}$$

اثبات ـ چون X_k ها متغیرهای تصادفی ۱ و ۰ هستند، برای هر $m\geq 1$، $EX_k=EX_k^m$ و از این که دو به دو وابسته منفی هستند، داریم:

$$E(X_i,X_j)\leq E(X_i).E(X_j);\forall i\neq j$$

بنابراین

$$E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2=\sum_{k=1}^{n}EX_k^2+\sum_{i\neq j}\sum E(X_i.X_j)$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}EX_k+\sum_{i\neq j}\sum E(X_i).E(X_j)$$

$$\leq\sum_{k=1}^{n}EX_k+\left(\sum_{k=1}^{n}EX_k\right)^2$$

در نتیجه

$$\prod\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)=\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}EX_k\right)^2}{E\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)^2}\geq$$

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}EX_k\right)^2}{\sum_{k=1}^{n}EX_k+\left(\sum_{k=1}^{n}EX_k\right)^2}\geq\frac{M}{1+M}$$

نتیجه ۲ـ۱. تحت شرایط قضیهٔ ۲ـ۲ اگر $\sum_{k=1}^{n}EX_k\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ آنگاه:

$$\prod\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}1$$

۳. نتایج اصلی

در این بخش، با استفاده از ویژگیها و قضایای بخش قبل، نخست کران پایینی برای احتمال اجتماع پیشامدهای تصادفی وابسته منفی در قضیهٔ ۳ـ۱ به دست می آوریم، این کران پایین را با کران پایین بون فرونی مقایسه کرده و سپس لم بورل ـ کانتلی برای پیشامدهای تصادفی وابسته منفی را به یاری ویژگیهای $\prod(.)$ اثبات می کنیم.

قضیهٔ ۳ـ۱

الف) هرگاه $\{A_n,n\geq 1\}$ یک دنباله از پیشامدهای تصادفی باشد، آنگاه

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\geq\frac{\left(\sum_{k=1}^{n}P(A_k)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}P(A_i\cap A_j)}\qquad(1)$$

ب) فرض کنید $\{A_n,n\geq 1\}$ دنباله ای از پیشامدهای تصادفی دو به دو وابسته منفی باشد، آنگاه

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \ge \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{1+\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}$$

اثبات ـ الف) تعریف می کنیم $X_k = I_{A_k}$ ، $1 \le k \le n$. بنا به ویژگی ۴ داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \ge P\left[\sum_{k=1}^{n} X_k \ne 0\right] \ge \prod\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)$$

$$\ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} EX_k\right)^2}{E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j)}$$

ب) بنا به قضیهٔ ۲ـ۲، تعریف ۱ـ۱، و قسمت الف داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \ge \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} EX_k\right)^2}{E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)^2} =$$

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} EX_k}{1+\sum_{k=1}^{n} EX_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}{1+\sum_{k=1}^{n} P(A_k)}.$$

قضیهٔ ۳ـ۲ . فرض کنید $\{A_n, n \ge 1\}$ دنباله ای از پیشامدهای تصادفی با $P(A_n) > 0$ برای هر $n \ge 1$ باشد، آنگاه $1 \ge p > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum\sum P(A_i \cap A_j)} \ge p \quad ; \quad \forall n \ge 1$$

اثبات: تعریف می کنیم $X_n = I_{A_n}$ ، $n \ge 1$، داریم

$$\prod(X_n) = \frac{E^2 X_n}{EX_n^2} = \frac{P^2(A_n)}{P(A_n)} = P(A_n) > 0$$

بنابراین $1 \ge p > 0$ وجود دارد به طوری که برای هر $n \ge 1$ ، داریم $P(A_n) \ge p > 0$. در نتیجه بنا به ویژگی ۳ و قضیهٔ ۳ـ۱ الف،

$$p \le \prod\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j)}$$

تبصره ـ فرض کنید $\{A_n, n \ge 1\}$ دنباله ای از پیشامدهای تصادفی باشد. بنا به نابرابری بون فرونی داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \ge \sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j) \qquad (2)$$

نابرابری (۱) که به یاری ویژگیهای $\prod(.)$ به دست آمده است، کرانی دقیق تر از کران بون فرونی برای $P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)$ می دهد زیرا

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)^2}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j)} - \left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j)\right) =$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j) + \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right)}{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j)} \times \left(\sum_{k=1}^{n} P(A_k) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap A_j)\right) \ge 0$$

لم بورل ـ کانتلی در احتمال و مخصوصا در اثبات قضایای حدی قوی، مفید و مورد توجه است. این لم برای پیشامدهای دو به دو وابسته منفی توسط بزرگ نیا و تیلور [۲] تعمیم داده شده است، در این مقاله با استفاده از ویژگیهای $\prod(.)$ ، اثبات جدیدی برای قسمت ب ی لم ارائه می دهیم.

۴. لم بورل ـ کانتلی

فرض کنید $\{A_n, n \ge 1\}$ یک دنباله از پیشامدهای تصادفی باشد

الف) اگر $\sum_n P(A_n) < \infty$ ، آنگاه $P(A_n\, i:o) = 0$.[۴]

---

[۴] Infinity often = i:o ، $[A_n\, i:o] = [\limsup A_n] = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_n$

ب) اگر $\sum_n P(A_n) = \infty$ و دنباله $\{A_n, n \ge ۱\}$ دو به دو مستقل باشند، آنگاه $P(A_n i : o) = ۱$.

۵. تعمیم لم بورل ـ کانتلی

فرض کنید $\{A_n, n \ge ۱\}$ دنباله ای از پیشامدهای دو به دو وابسته منفی باشد، اگر $\sum_n P(A_n) = \infty$، آنگاه $P(A_n i : o) = ۱$.

اثبات ـ تعریف می کنیم $X_n = I_{A_n}$ ، $n \ge ۱$ ، بنا به قضیهٔ ۳ـ۱ ب، برای هر $m > n$ داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \ge P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \ge \frac{\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}{۱ + \sum_{k=n}^{m} P(A_k)}$$

در نتیجه

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{m} A_k\right) \ge \limsup \frac{\sum_{k=n}^{m} P(A_k)}{۱ + \sum_{k=n}^{m} P(A_k)} = \frac{\sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}{۱ + \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k)}$$

و از این که $\sum_n P(A_n) = \infty$ ، داریم:

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \ge ۱$$

بنابراین

$$P(A_n i : o) = \lim P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = ۱ \, .$$

مراجع

[۱]امینی، محمد، ۱۳۷۹، برخی ویژگیهای متغیرهای تصادفی وابسته، اندیشهٔ آماری، سال پنجم شمارهٔ دوم، پاییز و زمستان ۱۳۷۹، صفحات ۲۹ ـ ۲٤ .

[2] Bozorgnia, A. Patherson, R. F. and Taylor, R. L., 1996, *Limit Theorems for Dependent Random Variables World Congres Nonlinear Analysis,* 92 P. 1639-1650.

[3] Petrov, V., 1995, *Limit Theorems of Probability Theory, Sequence of Independent Random Variables,* Oxford.