

معرفی الگوهای دوخطی در سریهای زمانی: تشخیص و برآورد

سید مهدی امیر جهانشاهی^۱ حسینعلی نیرومند^۲

چکیده

در این مقاله ابتدا الگوهای دوخطی و سپس الگوهای دوخطی بالا قطعی، قطعی، و زیر قطعی را معرفی می‌کیم. همچنین با الگوهای دوخطی مارکوفی و شرایط مانابی آنها آشنا می‌شویم و روش‌های تشخیص مرتبه الگوهای دوخطی را معرفی کرده و با روش‌های برآورد پارامترهای الگوهای دوخطی آشنا می‌شویم، و در انتها برنامه‌های مورد نیاز برای شبیه‌سازی و برآورد پارامترهای الگوهای زیر قطعی و مارکوفی را ارائه می‌کنیم.

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{j=0}^q c_j \varepsilon_{t-j} + \sum_{l=0}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} \quad (1-2-1)$$

که در آن $\{\varepsilon_t\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی iid با میانگین صفر و واریانس $\infty < \sigma^2$ است و فرض می‌شود که برای $t < s$, $\varepsilon_t, \varepsilon_s, \dots$ دارند. خصیصه مورد نظری آن شبیه یک فرایند خطی است. این الگوها اولین بار توسط موهلر^۳ در سال ۱۹۷۳ ارائه شدند و کاربردهای آنها برای مدل کردن سریهای زمانی توسط گرانجر و اندرسون^۴ [۱] مطرح شده است و بعد از آن توسط پریستلی^۵ [۴] و به طور کلیتر توسط راتو^۶ [۵] مورد بحث قرار گرفته اند.

یک مدل خطی ARMA(p,q) به دست می‌آید. در اینجا مناسب است که برای زیر ردۀ هایی از مدل اصلی، نامهای خاصی را انتخاب کنیم، به عنوان مثال اگر در معادله (۱-۲-۱)، $c_0 = 1$ باشد، معادله را همگن نامیده و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

Granger & Anderson^۱

Priestley^۰

Rao^{-۱}

الگوهای دوخطی کاربردهای فراوانی در علوم زیستی، اقتصاد، مهندسی، جغرافیا و بوم شناسی و ... دارند. خصیصه مورد توجه فرایند دوخطی این است که با وجود غیرخطی بودن، ساختمان نظری آن شبیه یک فرایند خطی است. این الگوها اولین بار توسط موهلر^۳ در سال ۱۹۷۳ ارائه شدند و کاربردهای آنها برای مدل کردن سریهای زمانی توسط گرانجر و اندرسون^۴ [۱] مطرح شده است و بعد از آن توسط پریستلی^۵ [۴] و به طور کلیتر توسط راتو^۶ [۵] مورد بحث قرار گرفته اند.

۱-۱ آشنایی با الگوهای دوخطی

شكل کلی الگوهای سری زمانی دوخطی کلی شکل کلی الگوهای سری زمانی دوخطی، دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی $\{X_{t+1}, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ تعریف شده در فضای احتمال (Ω, \mathcal{B}, P) است که در معادله تفاضلی زیر صدق می‌کند:

^۱ کارشناس ارشد آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^۰ گروه آمار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

^{-۱} Mohler

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{l=1}^m b_l X_{t-l} \varepsilon_l + \varepsilon_t \quad (1.3-1)$$

که در آن، $\{\varepsilon_t\}$ یک دنباله از متغیرهای مستقل همتوزع با $\text{Var}(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ ، $E(\varepsilon_t) = 0$ است. مدل (1.3-1) یک حالت خاص از الگوهای دوخطی است که ما آن را فرایند دوخطی مارکوفی می نامیم و با $MBL(p,m)$ نمایش می دهیم که در واقع همان الگوی $(BL(p,0,m,0))$ است. به عنوان مثال، الگوی $X_t = aX_{t-1} + bX_{t-2} \varepsilon_t + \varepsilon_t$ یک الگوی دوخطی مارکوفی است. از طرفی می دانیم که مدلهاي خطی ARMA می توانند به صورت یک معادله تفاضلی مرتبه اول برداری نوشته شوند و این شکل برداری به نام فضای وضعیت شناخته شده است. مطالعه خواص فرایندها، وقتی به شکل فضای وضعیت هستند، به خاطر طبیعت مارکوفی مدل، آسانتر است. بنابراین مدلهاي بالا را در شکل فضای وضعیت نشان می دهیم و خاصیت مانایی آنها را بررسی می کنیم. شکل برداری مدل (1.3-1) که آن را با $VMBL(p,m)$ یا $VBL(p,0,m,0)$ نمایش می دهیم، به صورت زیر است:

$$\underline{X}_t = A \underline{X}_{t-1} + B \underline{X}_{t-2} \varepsilon_t + C \varepsilon_t \quad (2.3-1)$$

$$X_t = H' \underline{X}_t$$

که در آن:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_p \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \dots a_p \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_m & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 b_2 \dots b_m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{X}_t = (X_t, X_{t-1}, \dots, X_{t-p+1})', C = (1, 0, \dots, 0)', \varepsilon_t = (1, 0, \dots, 0)'. \text{ همچنین فرض می کنیم که } H = N(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$X_t = \sum_{j=1}^p a_j X_{t-j} + \sum_{l=1}^q c_l \varepsilon_{t-l} + \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t \quad (2.2-1)$$

بنابراین، به جز جمله ε_t ، همه X_t ها به وسیله گذشته ε ها و X_t ها مشخص می شوند. مدل دوخطی کامل همان رابطه (2.2-1) است وقتی $p = q = 0$ است، که به صورت زیر نمایش داده می شود:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t$$

اگر $b_{ll'} = 0$ برای $l < l'$ باشد، مدل، بالا قطري نامide می شود. بنابراین مدل بالا قطري کامل به صورت زير است:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad l > l'$$

به عنوان مثال، الگوی $X_t = b \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$ یک الگوی بالا قطري است.

به طور مشابه اگر $b_{ll'} = 0$ برای $l > l'$ باشد، مدل، زير قطري است. بنابراین مدل زير قطري کامل به صورت زير است:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad l < l'$$

به عنوان مثال، الگوی $X_t = b \varepsilon_{t-2} X_{t-1} + \varepsilon_t$ یک الگوی زير قطري است.

اگر $b_{ll'} = 0$ برای $l \neq l'$ باشد، مدل، قطري نامide می شود. بنابراین، مدل قطري کامل به صورت زير است:

$$X_t = \sum_{l=1}^m \sum_{l'=1}^k b_{ll'} \varepsilon_{t-l'} X_{t-l} + \varepsilon_t, \quad l = l'$$

به عنوان مثال، الگوی $X_t = b \varepsilon_{t-1} X_{t-1} + \varepsilon_t$ یک الگوی قطري است.

۱-۳ الگوهای دوخطی مارکوفی

فرض کنید $\{X_t\}$ یک سری زمانی پارامتری زمان گسته

باشد که در معادله تفاضلی زیر صدق می کند:

۱-۲ معیار آکائیک

یکی از روش‌های تشخیص مرتبه الگو، معیار آکائیک است و برای محاسبه آن کافی است پارامترهای مدل را به ازای مقادیر مختلف پارامترها برآورده کنیم و در هر حالت واریانس مانده‌ها و معیار آکائیک را به صورت زیر محاسبه کنیم:

$$\text{AIC} = -2 \ln(\text{ماکسیمم مقدار لگ درستنمایی}) + (\text{تعداد پارامترهای مستقل})$$

$$= (N - \gamma) \ln(\hat{\sigma}_e^2) + 2$$

که در آن γ^5 واریانس مانده‌های مدل است و $(N - \gamma)$ تعداد مشاهدات مؤثر است (مشاهداتی که در محاسبه لگ درستنمایی مورد استفاده قرار می‌گیرند). انتخاب مرتبه مدل بر اساس کوچکترین مقدار آماره آکائیک صورت می‌گیرد.

مثال - برآزش الگوی (BL(8,0,5,4))⁶ به ۲۲۱ مشاهده اول سری تعداد لکه‌های خورشیدی ولفر و پیش‌بینی ۳۵ مشاهده بعدی توسط الگوی [۶].

بهترین الگوی اتورگرسیوی که توسط معیار آکائیک انتخاب شده AR(9) است:

$$\begin{aligned} X_{1-2} &= -0.1416X_{1-1} + 0.467X_{1-2} + 0.1416X_{1-3} \\ &+ 0.169X_{1-4} + 0.543X_{1-5} - 0.147X_{1-6} \\ &- 0.053X_{1-7} - 0.066X_{1-8} + 0.112X_{1-9} = \epsilon_1 \end{aligned}$$

واریانس مانده‌ها و مقدار آکائیک الگوی به صورت زیر است:

$$\hat{\sigma}_e^2(\text{AR}) = 1137/17, \quad \text{AIC} = 1137/17$$

حال، الگوی BL(8,0,5,4) را به داده‌ها برآزش می‌دهیم. در

نتیجه برآوردهای پارامترها به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$\hat{a}_1 = -0.159, \quad \hat{a}_2 = 0.2167, \quad \hat{a}_3 = -0.2923$$

$$\hat{a}_4 = 0.6077, \quad \hat{a}_5 = -0.4812, \quad \hat{a}_6 = 0.1099$$

$$\hat{a}_7 = 0.0038, \quad \hat{a}_8 = -0.1030, \quad \hat{a}_9 = 0.8113$$

مقادیر \hat{b}_j ، $j = 1, 2, \dots, 5$ ، $i = 1, 2, 3, 4$ ، در ماتریس زیر ارائه شده‌اند:

۱-۴ شرایط مانایی

با فرض $E(\underline{x}_t) = \underline{\mu}$ و گرفتن امید ریاضی از دو طرف رابطه (۱-۲) خواهیم داشت:

$$\underline{\mu}_t = A\underline{\mu}_{t-1}$$

بنابراین [۶] شرط کافی برای مانایی مجانبی مرتبه اول $\{X_t\}$ (یعنی مستقل بودن (X_t) از t ، وقتی که $t \rightarrow \infty$) به صورت زیر است:

$$\rho(A) = \max_{1 \leq j \leq p} \{\lambda_j(A)\} < 1$$

که $(A(A), \lambda_1(A), \dots, \lambda_p(A))$ ویژه مقدارهای ماتریس A هستند و (A) شکل طبیعی ماتریس A نامیده می‌شود. سوبارانو [۶] و نودیکر [۳] نشان دادند که شرط کافی برای مانایی مرتبه دوم مدل (۱-۳-۱) به صورت زیر است:

$$\rho|A \otimes A + B \otimes B \sigma_e^2| < 1$$

که در آن $A \otimes A$ حاصلضرب کرونکر از مرتبه $p \times p$ است.

۲. روش‌های تشخیص الگوهای دوخطی

در سری زمانی کلاسیک، توابع خود همبستگی نمونه‌ای⁸، خود همبستگی جزئی نمونه‌ای⁹، خود همبستگی وارون نمونه‌ای¹⁰ و خود همبستگی وارون جزئی نمونه‌ای¹¹، برای تشخیص مرتبه الگوهای خطی، موارد استفاده گسترده‌ای دارند، ولی در تشخیص سریهای زمانی غیرخطی از آنها استفاده چندانی نمی‌شود، زیرا آنها فقط توانایی توصیف تغییرات در الگوهای خطی را دارند و بر این اساس در تشخیص سریهای زمانی غیرخطی کارآمد نیستند. در زیر چند روش تشخیص مرتبه الگوهای دوخطی را معرفی می‌کنیم.

Neudecker¹²

Sample Autocorrelation Function (SACF)¹³

Sample Partial Autocorrelation Function (SPACF)¹⁴

Sample Inverse Autocorrelation Function (SIACF)¹⁵

Sample Inverse Partial Autocorrelation Function¹⁶
(SIPACF)

فرایند X_t دارای ساختار خود همبستگی ARMA(2,1) است.

همچنین در الگوی $X_t = b\epsilon_{t-k} + \epsilon_t$ که $X_i, j < k$ تحت کوواریانس، به صورت یک فرایند تصادفی محض ظاهر می‌شود، ولی X_t تحت کوواریانس به عنوان (j,k) شناخته می‌شود [1].

همان طور که در نمودارهای شکل ۱ ملاحظه می‌شود، هیچ ضریب معنی داری وجود ندارد. بنابراین الگوی دوخطی بالا قدری مذکور، از فرایند تصادفی محض پیروی می‌کند.

در نمودارهای شکل ۲ ACF از مرتبه یک به بعد قطع شده و نمودارهای PACF و IACF از مرتبه دو به بعد قطع شده اند بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که توان دوم مشاهدات تولید شده از الگوی بالا قدری مذکور، از فرایند ARMA(2,1) پیروی می‌کند.

۲-۲-۱ بررسی الگوهای زیر قدری (SBL)

الگوهای زیر قدری تحت کوواریانس، خواص مشابهی مانند فرایند تصادفی محض دارند ولی یک استثناء برای الگوهای مانند $X_t = b\epsilon_{t-k} + \epsilon_t$ وجود دارد که تحت کوواریانس، MA(3k) هستند. الگوی $X_t = b\epsilon_{t-k} + \epsilon_t$ تحت کوواریانس، فرایند تصادفی محض است ولی فرایند X_t همان الگو تحت کوواریانس، ARMA(2,3) است [1].

۲-۲-۲ بررسی الگوهای قدری (DBL)

الگوی قدری مانند $X_t = b\epsilon_{t-k} + \epsilon_t$ تحت کوواریانس، خواص مشابهی مانند فرایند MA(1) دارد، ولی فرایند X_t ای سری مذکور از یک فرایند ARMA(1,1) پیروی می‌کند. یک الگوی تعییم یافته مدل بالا، الگوی را تحت کوواریانس می‌داند که تحت کوواریانس، ARMA(1,1) شناخته می‌شود. الگوی $X_t = b\epsilon_{t-k} + \epsilon_t$ نیز تحت کوواریانس، از یک فرایند MA(k) پیروی می‌کند [1]. از جمله روش‌های دیگری که مورد استفاده قرار می‌گیرند، روش به استفاده از مربع مانده هاست. روش دیگری که اخیراً توسط

$$\hat{b}_{ij} = \begin{bmatrix} -0.00042 & 0.00053 & -0.00641 & 0.01305 \\ -0.000842 & 0.00277 & -0.01452 & -0.02209 \\ 0.01213 & -0.00636 & 0.01111 & 0.02377 \\ -0.003434 & -0.00673 & -0.01126 & -0.00446 \\ 0.02830 & 0.00584 & -0.01147 & 0.001192 \end{bmatrix}$$

مقادیر واریانس مانده‌ها و معیار آکائیک عبارت اند از:

$$\hat{\theta}_{\text{BL}} = 110.62, \quad \text{AIC} = 10.51$$

واضح است که میانگین مربعات مانده‌ها و مقادیر آکائیک الگوی دوخطی بسیار کوچکتر از مقادیر متناظر شان در الگوی اتورگرسیوند.

۲-۲ استفاده از توان دوم فرایند

برای بررسی و تشخیص الگوهای غیرخطی علاوه بر گشتاورهای مرتبه دوم (اتو کوواریانسها)، گشتاورهای مرتب بالاتر یعنی مرتب سوم و چهارم نیز مفیدند. در فرایند تصادفی محض، گشتاورهای مرتبه سوم و چهارم مساوی صفرند و این وجه تمایزی بین سریهای زمانی غیرخطی و فرایند تصادفی محض است [1].

۲-۲-۱ بررسی الگوهای بالا قدری (UBL)

فرایند بالا قدری مانند $X_t = b\epsilon_{t-k} + b\epsilon_{t-1}X_{t-1} + \epsilon_t$ تحت کوواریانس MA(1) شناخته می‌شود و در حالت کلیتر، فرایند بالا قدری X_t را تحت کوواریانس می‌توان به صورت (q, p) در نظر گرفت. در الگوهای بالا قدری گشتاورهای مرتبه سوم همگی مساوی صفرند. بنابراین وسیله‌ای مناسب برای تشخیص این الگوها نیستند. راه حل دیگر، استفاده از گشتاورهای مرتبه چهارم است ولی محاسبات این گشتاورها بسیار پیچیده و مشکل‌اند. یک روش ساده بررسی فرایند X_t تحت کوواریانس است که تفسیر نتایج را ساده تر می‌کند. به عنوان مثال الگوی $X_t = b\epsilon_{t-k} + \epsilon_t$ تحت کوواریانس، خواصی مانند فرایند تصادفی محض دارد ولی

اگر فرض کنیم که $\{\varepsilon_i\}$ ها مستقل و همتوزیع بوده و که به صورت $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ توزیع شده اند، تابع توزیع توأم $\{e_N, e_{N+1}, \dots, e_{N+m}\}$ به صورت زیر است:

$$(2\pi\sigma_\varepsilon^2)^{-(N-1)/2} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{i=N+1}^N \varepsilon_i^2\right\}$$

که در آن p, m, k هستند.

بنابراین، برآورد درستنمایی ماکسیمم شرطی $\hat{\theta}$ به وسیله مینیمم کردن عبارت زیر حاصل می شود:

$$Q(\underline{\theta}) = \sum_{i=N+1}^N \varepsilon_i^2 \quad (2-3)$$

توجه کنید که جملات $\varepsilon_N, \dots, \varepsilon_{N+m}$ را نمی توان از X_i به دست آورد. زیرا $X_{N+1}, X_{N+2}, \dots, X_{N+m}$ مشاهده نشده اند.

معادلات تکراری نیوتون - رافسون^{۱۱} برای مینیمم کردن $Q(\underline{\theta})$ به صورت زیرند:

$$\underline{\theta}^{(i+1)} = \underline{\theta}^{(i)} - H^{-1}(\underline{\theta}^{(i)}) G(\underline{\theta}^{(i)}) \quad (3-3)$$

که در آن $\underline{\theta}^{(i)}$ مجموعه برآوردهای به دست آمده در مرحله i -ام تکرار است و

$$G'(\underline{\theta}) = \left[\frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_1}, \frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_2}, \dots, \frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_n} \right]$$

$$H(\underline{\theta}) = \left[\frac{\partial^2 Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right]_{n \times n} \quad (4-3)$$

مشتقات جزئی $Q(\underline{\theta})$ با توجه به $\underline{\theta}$ به صورت زیرند:

$$\frac{\partial Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_i} = 2 \sum_{i=N+1}^N \varepsilon_i \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_i}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (5-3)$$

$$\frac{\partial^2 Q(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} = \sum_{i=N+1}^N \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_j} + \sum_{i=N+1}^N \varepsilon_i \frac{\partial^2 \varepsilon_i}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

$$i, j = 1, 2, \dots, n$$

Newton-Raphson^{۱۲}

نلسون و مادسن^{۱۳} [۲] ارائه شده است استفاده از معیارهای LDF^{۱۴} و NLDF^{۱۵} است که حالت تعیین یافته توابع SACF و PLDF^{۱۶} هستند. SPACF^{۱۷}

۳. روش‌های برآورد پارامترهای الگوهای دوخطی

مسئله برآورد پارامترهای مدل دوخطی، در اصل با برآورد کردن پارامترهای یک مدل خطی تفاوت ندارد. مدل دوخطی $BL(p, 0, m, k)$ زیر را در نظر بگیرید:

$$X_t + \sum_{i=1}^p a_i X_{t-i} = \alpha + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{t-i} \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t \quad (1-3)$$

فرض کنید X_1, \dots, X_N مشاهدات سری مانای $\{X_i\}$ باشند. مسئله، برآورد پارامترهای $\{a_1, \dots, a_p; b_{11}, \dots, b_{mk}\}$ است. روشی که در زیر معرفی می شود، روش نیوتون - رافسون است که تاکنون توسط افراد زیادی از جمله استروم و بوهلین (۱۹۶۶)، باکس و جنکیتز (۱۹۷۰) و سوبا راثو (۱۹۸۱) مورد استفاده قرار گرفته است. برای راحتی، نمادهای زیر را در نظر می گیریم:

$$\begin{aligned} \theta_i &= a_i, \quad i = 1, 2, \dots, p \\ \theta_{p+1} &= b_{11}, \theta_{p+2} = b_{12}, \dots, \theta_{p+mk} = b_{mk}, \\ \theta_{p+mk+1} &= \alpha. \end{aligned}$$

بنابراین، مجموعه پارامترها را به صورت زیر می توان نوشت:

$$\underline{\theta}' = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n) = (a_1, a_2, \dots, b_{11}, \dots, b_{mk}; \alpha)$$

$$n = p + mk + 1$$

Nielson & Madsen^{۱۸}

Lag Dependence Function^{۱۹}

Partial Lag Dependence Function^{۲۰}

Nonlinear Lag Dependence Function^{۲۱}

$$\psi(\theta_r, \theta_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{t-i} \frac{\partial' \varepsilon_{t-j}}{\partial \theta_r \partial \theta_i}$$

حال با توجه به مشتقات جزئی مرتبه اول و دوم و استفاده از معادلات بازگشتی (۵-۳)، (۶-۲) و (۷-۳) و نیز استفاده از بردار \underline{G} و ماتریس \underline{H} (معروف به Hessian) که در (۴-۳) تعریف شده و رابطه تکراری (۳-۳)، مجموعه هایی از مقادیر $\{a_i\}$ ، $\{b_{ij}\}$ و α به دست می آیند. وقتی که دقت مورد نظر حاصل شود تکرار متوقف می شود (عموماً اگر با مقادیر اولیه خوبی، تکرار را شروع کنیم معادلات تکراری، همگرا خواهند شد). واریانس مانده ها به وسیله رابطه زیر برابر آورد می شود:

$$\hat{\sigma}_e^2 = \frac{1}{N - \gamma} Q(\hat{\theta}) = \frac{1}{N - \gamma} \sum_{t=\gamma+1}^N \hat{\varepsilon}_t^2 \quad (8-3)$$

که $\hat{\theta}$ برابر آورد همگرایی $\underline{\theta}$ است و $\{\varepsilon_t, t = \gamma + 1, \dots, N\}$ ها به وسیله (۱-۳) وقتی که برابر آورده باشند، محاسبه می شوند.

الگوریتم تکرار عددی مارکواردت^۷ نیز شبیه الگوریتم نیوتون-رافسون است و تنها تفاوت در این است که در الگوریتم مارکواردت مشتقات جزئی مرتبه دوم که در (۵-۳) معرفی شده اند، به وسیله رابطه زیر برابر آورده می شوند:

$$\frac{\partial' Q(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \approx 2 \sum_{t=\gamma+1}^N \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_i} \frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \theta_j}$$

تکته - از جمله روش‌های دیگر برابر آورده پارامترهای الگوهای دوخطی، می‌توان به روش‌های گشتاوری، درستنمایی ماکسیمم، کمترین توانهای دوم، کمترین توانهای دوم شرطی و ... اشاره کرد. برنامه هایی که در ادامه مقاله ملاحظه خواهید کرد توسط نرم افزار SAS نوشته شده اند. در این برنامه ها ابتدا ۵۰۰ مشاهده از الگوهای مورد نظر به کمک آرایه ها در SAS شبیه سازی

که در آنها مشتقات جزئی ε در معادلات بازگشتی زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial a_i} + \phi(a_i) = X_{t-i} \quad , \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial b_{ij}} + \phi(b_{ij}) = -X_{t-i} \varepsilon_{t-j}$$

$$i = 1, 2, \dots, m \quad j = 1, 2, \dots, k$$

$$\frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \alpha} + \phi(\alpha) = -1 \quad (7-3)$$

که در آن،

$$\phi(\theta_i) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^k b_{ij} X_{t-i} \frac{\partial \varepsilon_{t-j}}{\partial \theta_i}$$

همچنین فرض می کنیم:

$$\varepsilon_i = \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \theta_i} = 0 \quad ; \quad t = 1, \dots, \gamma, \quad i = 1, \dots, n$$

بنابراین مشتقات جزئی مرتبه دوم در معادلات بازگشتی زیر صدق می کنند:

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial a_i \partial a_i} = 0 \quad , \quad \frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial a_i \partial \alpha} = 0 \quad , \quad i, i' = 1, \dots, p$$

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial a_i \partial b_{ij}} + \psi(a_i, b_{ij}) = -X_{t-i} \frac{\partial \varepsilon_{t-j}}{\partial a_i}$$

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial b_{ij} \partial b_{ij'}} + \psi(b_{ij}, b_{ij'}) = \quad (7-3)$$

$$- X_{t-i} \frac{\partial \varepsilon_{t-j}}{\partial b_{ij'}} - X_{t-i'} \frac{\partial \varepsilon_{t-j'}}{\partial b_{ij}}$$

$$\frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial b_{ij} \partial \alpha} + \psi(b_{ij}, \alpha) = -X_{t-i} \frac{\partial \varepsilon_{t-j}}{\partial \alpha} \quad , \quad \frac{\partial' \varepsilon_i}{\partial \alpha} = 0$$

که در آنها:

```

run;
proc nlin method=marquardt data=new;
  parms a=.1 to .8 by .1;
  model x=a*x1*zlag2(resid);
  resid=x-model.x;
run;
proc model data=new;
  endo x;
  parms a;
  x=a*x1*zlag2(-resid,x);
  fit x start=(a .1 to .8 by .1) / fml;
run;

```

۲- برنامه مورد نیاز برای شبیه سازی و برآوردهای الگوی زیر قطری پارامترهای الگوی مارکوفی

$$X_t = 0.3X_{t-1} + 0.4X_{t-2} + \epsilon_t$$

*simulation: $X(t)=0.3X(t-1)+0.4X(t-2)+e(t)$

```

option ps=400;
data bilin;
  array xx{501} x1-x501;
  xx{1}=0;
  array ee{501} e1-e501;
  ee{1}=0;
  do t=2 to 501;
    ee{t}=normal(856509);
    xx{t}=0.3*xx{t-1}+0.4*xx{t-2}+ee{t}+
  ee{t};
  end;
  output;
run;
data markov;
  set bilin;
  file 'd:\mahdi\data.txt';
  put x2-x501;
run;
data new;
  infile 'd:\mahdi\data.txt';
  input x @@;
  t+1;
  x2=x**2;
  x1=lag1(x);
run;
proc gplot;
  plot (x x2)*t/frame vref=0;
  symbol i=join;
run;
proc arima;
  identify var=x MINIC;
  identify var=x2 MINIC;
run;

```

run;

```

proc gplot;
  plot (x x2)*t/frame vref=0;
  symbol i=join;
run;
proc arima;

```

شده اند و برای برآوردن نیز از شیوه های Nlin، Model به شکلی که ملاحظه خواهید کرد، استفاده شده است.

۴. برنامه های شبیه سازی و برآورد

۱- برنامه مورد نیاز برای شبیه سازی و برآوردهای الگوی زیر قطری

$$X_t = 0.5X_{t-1} + \epsilon_t$$

*simulation: $X(t)=0.5X(t-1)+e(t)$

```

option ps=400;
data bilin;
  array xx{502} x1-x502;
  xx{1}=-0.26;xx{2}=0.26;
  array ee{503} e1-e503;
  ee{1}=-0.45264;ee{2}=-0.31599;
  do t=3 to 502;
    ee{t}=normal(856509);
    xx{t}=0.5*xx{t-1}*ee{t-2}+ee{t};
  end;
  output;
run;
data sub;
  set bilin;
  file 'd:\mahdi\data.txt';
  put x3-x502;
run;
data new;
  infile 'd:\mahdi\data.txt';
  input x @@;
  t+1;
  x2=x**2;
  x1=lag1(x);
run;
proc gplot;
  plot (x x2)*t/frame vref=0;
  symbol i=join;
run;
proc arima;
  identify var=x MINIC;
  identify var=x2 MINIC;
run;

```

*Estimation algorithms;

```

proc nlin method=newton data=new;
  parms a=.1 to .8 by .1;
  model x=a*x1*zlag2(resid);
  resid=x-model.x;

```

```

der.b=(-x*x1+a*x1**2)/(1+b*x1)**2;
run;
proc nlin method=marquardt converge=0.0001;
parms a=.1 to .8 by .1 b=0.1 to 0.8 by 0.1;
error=0;
model error=(x-a*x1)/(1+b*x1);
der.a=(-x1/(1+b*x1));
der.b=(-x*x1+a*x1**2)/(1+b*x1)**2;
run;

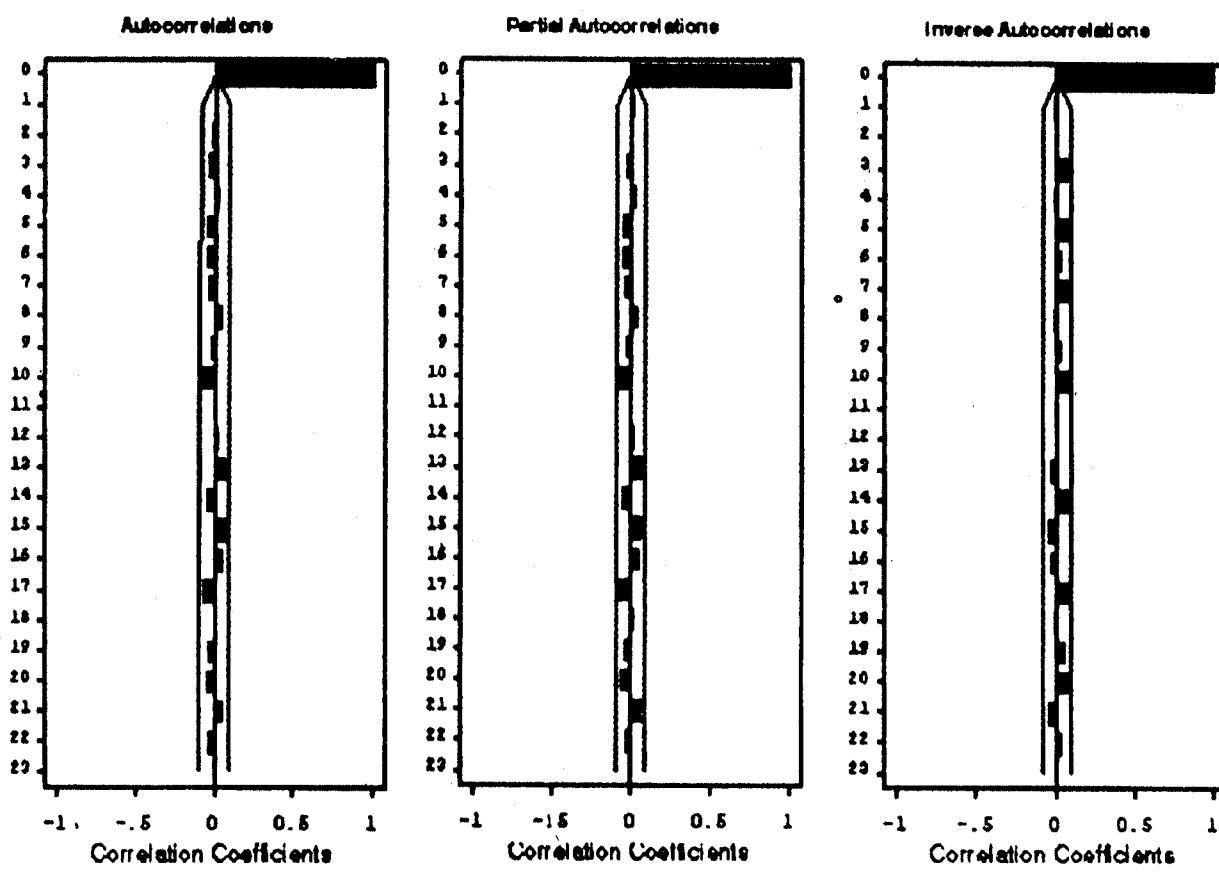
```

```

identify var=x MINIC;
identify var=x2 MINIC;
run;

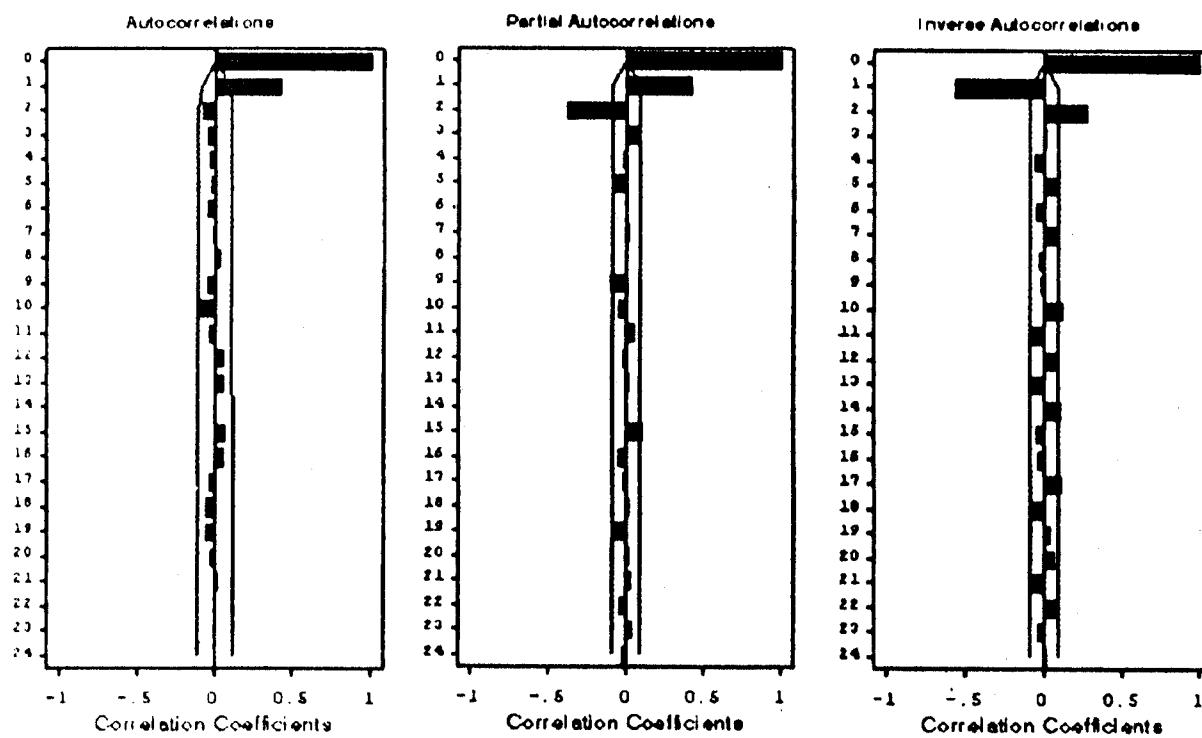
*Estimation algorithms;
proc nlin method=newton converge=0.0001;
parms a=.1 to .8 by .1 b=0.1 to 0.8 by 0.1;
error=0;
model error=(x-a*x1)/(1+b*x1);
der.a=(-x1/(1+b*x1));

```



شکل ۱

$X_t = b\varepsilon_{t-1}X_{t-1} + \varepsilon_t$ IACF و PACF , ACF نمودار های



شکل ۲

نمودار های IACF و PACF مربوط به توان دوم مشاهدات الگوی بالا

$$X_t = b \varepsilon_{t-1} X_{t-1} + \varepsilon_t$$

مراجع

- [1] Granger, C.W.J. and Anderson, A.P., (1978), *An Introduction to Bilinear Time Series Models*, Gottingen: Vandenhoeck and Rupercht.
- [2] Nielson, H., Madsen, H., (1998), *Some Tools for Identification of Nonlinear Time Series*, Sweden, Dept. Mathematical Modelling.
- [3] Neudecker, H., (1969), *Some Theorems on Matrix Differentiation with Special References to Kronecker Matrix Products*, J.Amer.Statist.Assoc., 69, 153-159.
- [4] Priestley, M.B., (1978), *Nonlinear Models in Time Series Analysis*, The Statistician, 27, 159-176.
- [5] Subba Rao, T., (1978), *A Note on Higher Order Moments of Stationary Time Series and their Use in Examination of Residuals*, Technical Report No. 95, Dept. of Maths., UMIST.
- [6] Subba Rao, T. & Gabr, M.M., (1984), *An Introduction to Bispectral and Bilinear Time Series Models*, Lecture Notes in Statistics, New York: Springer-Verlag.