قضیه هایی در آنالیز ترکیبی و کاربردهایی از آنها در احتمال

حمزهٔ ترابی[۱]

چکیده

بیشتر مسائل کاربردی احتمال به رابطه هایی زیبا در مبحث آنالیز ترکیبی می انجامند که بیشتر این رابطه ها را می توان به صورت تحلیلی، و برخی دیگر را با استقرای ریاضی به اثبات رسانید. ولی آن چه زیبایی این رابطه ها را دو چندان می سازد، برهانهایی ترکیباتی است که برای آنها ارائه می شود که راه اثبات چنین قضیه هایی، خود می تواند دیدگاه های خوبی برای مسائل مشابه در اختیارمان بگذارد.

در این مقاله چند قضیه پیرامون آنالیز ترکیبی بیان، و سپس برای هر یک، برهانهایی ترکیباتی ارائه می شود و در پایان، به کاربردهایی از آنها و برهانهایشان، در احتمال پرداخته می شود. گفتنی است برای سادگی فهم مطلب، در برهان قضیه ها، مسائل آشنای آوند و مهره به کار برده شده است که البته در هر کاربرد ویژه ای، می توان آنها را به دلخواه تعبیر کرد.

پیشگفتار

در آغاز پیش از پرداختن به هر بحثی، به دلیل بهره گیری مکرر از تابع δ، به معرفی آن می پردازیم. تابع δ، $\delta : R^{2} \to \{0, 1\}$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} 1, & x = y \\ 0, & x \neq y \end{cases}$$

قضیهٔ ۱ـ برای هر دو عدد طبیعی n و m داریم:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1,n_2,\ldots,n_i):\sum_{j=1}^{i} n_j = n, n_j \geq 1, j=1,2,\ldots,i\}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_i} = m^n.$$

برهان ـ پنداریم از آوندی دارای m مهره متمایز که مهره ها را از ۱ تا m شماره گذاری کرده ایم، با جایگذاری و یک به یک، یک نمونهٔ مرتب n مهره ای بیرون آورده ایم. در آغاز نشان می دهیم که اگر تعداد حالتهایی که در این نمونه، درست i گونه مهره باشد، را با $N_{m,n}(i)$، $i = 1,2,\ldots,\min(m,n)$، نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$N_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1,n_2,\ldots,n_i):\sum_{j=1}^{i} n_j = n, n_j \geq 1, j=1,2,\ldots,i\}} \binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_i}.$$

به عنوان مثال، $N_{4,2}(2)$، تعداد حالتهایی است که در یک نمونهٔ با جایگذاری و مرتب ۲ تایی از ٤ مهرهٔ شماره گذاری شده از ۱ تا ٤، درست دو شماره دیده شود. با استفاده از رابطهٔ بالا داریم:

$$N_{4,2}(2) = \binom{4}{2}\binom{2}{1,1} = 6 \times 2 = 12 .$$

این ۱۲ نمونه، عبارت اند از:

(۱,۲), (۲,۱), (۱,۳), (۳,۱), (۱,٤), (٤,۱), (۲,۳), (۳,۲), (۲,٤), (٤,۲)
(۳,٤), (٤,۳).

---

[۱] دانشجوی دکترا، بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

می دانیم که تعداد راه های گزینش i گونه مهره برابر $\binom{m}{i}$ است. اینک پنداریم گونه های $j_1, j_2, \ldots, j_i$ گزیده شده باشند. بنابراین، در یک نمونهٔ n تایی شامل این i گونه مهره، باید به ترتیب $n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_i}$ مهره داشته باشیم، به شرط اینکه،

$$\sum_{k=1}^{i} n_{i_k} = n \quad , \quad n_{i_k} \geq 1 \; . \qquad (۱)$$

اینک یکی از این حالتهای صادق در شرط (۱) را در نظر بگیریم. چون نمونه مرتب است، تعداد آرایشهای گوناگون این i گونه مهره، برابر تعداد جایگشتهای آنها و بنابراین برابر:

$$\binom{n}{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_i}}$$

است. در نتیجه، با در نظر گرفتن همهٔ حالتهای صادق در (۱)، تعداد همهٔ جایگشتها برابر:

$$\sum_{\{(n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_k}):\sum_{k=1}^{i} n_{j_k} = n, n_{j_k} \geq 1, k=1,2,\ldots,i\}} \binom{n}{n_{j_1}, n_{j_2}, \ldots, n_{j_i}},$$

و یا برابر هم ارز آن، یعنی،

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1, n_2, \ldots, n_i):\sum_{j=1}^{i} n_j = n, n_j \geq 1, j=1,2,\ldots,i\}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_i} = m^n,$$

می شود. اینک با در نظر گرفتن تعداد گزینشهای i گونه مهره از m مهره، خواهیم داشت:

$$N_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{\{(n_1, n_2, \ldots, n_i):\sum_{j=1}^{i} n_j = n, n_j \geq 1, j=1,2,\ldots,i\}} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_i}$$

ولی روشن است که تعداد نمونه های n تایی مرتبی که می توان از آوند بیرون آورد، برابر m^n است. از طرفی، در یک نمونهٔ n تایی، تعداد گونه ها می تواند یکی از اعداد $1, 2, \ldots, \min(m,n)$ باشد، و بنابراین:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} N_{m,n}(i) = m^n.$$

پس حکم ثابت می شود.

قضیهٔ ۲ـ برای هر دو عدد طبیعی m و n داریم:

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{n_1=1}^{n} \sum_{n_2=1}^{n} \cdots \sum_{n_i=1}^{n} \delta(n, \textstyle\sum_{j=1}^{n} n_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{\min(m,n)} \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{n+i-j-1}{n} = \binom{m+n-1}{n}$$

برهان ـ بار دیگر آوند مطرح شده در برهان قضیهٔ ۱ را در نظر بگیریم. پنداریم یک نمونهٔ نامرتب n تایی از این آوند بیرون آورده ایم. در آغاز نشان می دهیم که اگر تعداد حالتهایی که درست i گونه مهره در نمونه باشد، با $N'_{m,n}(i)$ ، $i = 1, 2, \ldots, \min(m,n)$ ، نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$N'_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{n_1=1}^{n} \sum_{n_2=1}^{n} \cdots \sum_{n_j=1}^{n} \delta(n, \textstyle\sum_{j=1}^{n} n_j). \qquad (۲)$$

و همچنین،

$$N'_{m,n}(i) = \binom{m}{i} \sum_{j=0}^{i-1} (-1)^j \binom{i}{j} \binom{n+i-j-1}{n} \qquad (۳)$$

در یک نمونهٔ نامرتب آن چه اهمیت دارد، تعداد هرکدام از i مهرهٔ دیده شده از m مهره است. آن چنان که در برهان قضیهٔ ۱ گفته شد، تنها شرطی که n_{j_k} ها دارند، شرط (۱) است. ولی با داشتن i گونه مهره، تعداد حالتهایی که n_{j_k} ها می توانند در شرط (۱) صدق کنند، برابر:

$$\sum_{n_{j_1}=1}^{n} \sum_{n_{j_2}=1}^{n} \cdots \sum_{n_{j_i}=1}^{n} \delta(n, \textstyle\sum_{j=1}^{i} n_{j_k})$$

و یا برابر هم ارز آن، یعنی،

$$\sum_{n_1=1}^{n} \sum_{n_2=1}^{n} \cdots \sum_{n_j=1}^{n} \delta(n, \textstyle\sum_{j=1}^{i} n_j) \; ,$$

است و بنابراین با در نظر گرفتن تعداد راههای گزینش i مهره از m مهره، (۲) ثابت می شود.

اینک به اثبات (۳) می پردازیم.

تعداد بردارهای پاسخ معادله $n_1+n_2+...+n_i=n$ ، $n_j=1,2,...,n$ ، $j=1,2,...,i$ ، $i=1,2,...,\min(m,n)$ ، را با $N_n(i)$ نشان می دهیم. می دانیم که اگر n_j ها مجاز به گرفتن همهٔ مقادیر صحیح نامنفی نابیشتر از n باشند، $N_n(i)$ برابر $\binom{n+i-1}{n}$ می شود. بنابراین $N_n(i)$ برابر ترکیب بالا منهای تعداد حالتهایی است که دست کم یکی از n_j ها برابر صفر باشد. در نتیجه، بنابر تعریف $N_n(i)$ داریم:

$$N_n(i)=\binom{n+i-1}{n}-\sum_{j=1}^{i-1}\binom{i}{j}N_n(i-j)\quad;\quad i=1,2,...,\min(m,n)$$

که یک رابطهٔ بازگشتی برای $N_n(i)$ است. ولی می توانستیم $N_n(i)$ را نیز به صورت دیگری به دست آوریم:

چنان که گفتیم $N_n(i)$ برابر $\binom{n+i-1}{n}$ منهای تعداد حالتهایی است که دست کم یکی از n_j ها صفر باشد، $j=1,2,...,i$. اینک در آغاز حالتی را در نظر می گیریم که درست یکی از n_j ها برابر صفر باشد. در این حالت می توان نوشت:

$$n_1+n_2+...+n_{i-1}=n\quad;$$

(توجه می کنیم که در تعداد بالا، فرقی ندارد که کدام یک از n_j ها برابر صفر باشد، برای سادگی n_i را صفر می گیریم.) اکنون اگر n_jها ، $j=1,2,...,i-1$ ، می توانستند همهٔ مقادیر صحیح نامنفی نابیشتر از n را بگیرند، می توانستیم ادعا کنیم که تعداد این حالتها برابر

$$\binom{n+i-1-1}{n}\qquad(4)$$

است. بنابراین، با توجه به این که $\binom{i}{1}$ راه نیز برای گزینش یک n_jیی که برابر صفر است داریم، این تعداد برابر

$$\binom{i}{1}\binom{n+i-1-1}{n}$$

می شود. ولی چنان که گفتیم در فرمول (۴)، برخی از n_j ها، $j=1,2,...,i-1$ ، نیز برابر صفرند. بنابراین حاصل ضرب بالا، تعداد واقعی حالتهایی که دست کم یکی از n_jها برابر صفر است، نیست؛ بلکه از مقدار واقعی آن بیشتر است. در نتیجه، باید حاصل ضرب را با تعداد حالتی که از n_j ها درست دو تا برابر صفر است، جمع کنیم. ولی گزینش دو n_j برای صفر بودن به $\binom{i}{2}$ راه انجام می گیرد و هم چنین $\binom{n+i-2-1}{n}$ نیز برابر تعداد حالتی که n_j ها، $j=1,2,...,i-2$ ، می توانند همهٔ مقادیر صحیح نامنفی نابیشتر از n را بگیرند. در نتیجه در این حالت، این تعداد برابر

$$\binom{i}{2}\binom{n+i-2-1}{n}$$

می شود. با دنبال کردن روش بالا و با توجه به داشتن $\binom{m}{i}$ راه برای گزینش i گونه مهره از m مهره، (۳) ثابت می شود.

نتیجهٔ ۱ـ برای هر i ، $i=n+1,n+2,...$ ، $n\in N$ ، داریم:

$$\sum_{j=0}^{i-1}(-1)^j\binom{i}{j}\binom{n+i-j-1}{n}=0$$

برهان ـ بنابر استدلال گفته شده در قضیهٔ ۲، مجموع بالا تعداد حالتهایی است که در یک نمونهٔ نامرتب، درست i گونهٔ ویژه داشته باشیم که روشن است این مجموع به دلیل بزرگتر بودن i از n ، صفر است.

در زیر به مثالی احتمالاتی که کاربردی از قضیه های بالاست، می پردازیم.

مثال ـ یک چهار وجهی را چهار بار مستقلاً پرتاب می کنیم. پنداریم متغیر تصادفی X ، گوناگونی وجه ها (تعداد وجه های گوناگونی که نمایان شده است) باشد. تابع جرم احتمال X را بیابید.

حل ـ با توجه به نمادهایی که در برهان قضیه های ۱ و ۲ به کار رفته اند ، داریم: $m=4$ و $n=4$.

در آغاز پنداریم ترتیب پرتابها مهم باشد. روشن است که تعداد عضوهای فضای نمونه ای این آزمایش برابر 4^4 است و لذا، بنابر استقلال پرتابها، احتمال هر پیشامد ساده برابر $\frac{1}{256}\left(=\frac{1}{4^4}\right)$ است. در نتیجه، با توجه به نمادهای معرفی شده در قضیهٔ ۱ داریم:

$$N_{4,4}(x)=\begin{cases}\binom{4}{1}\binom{4}{4} & x=1\\ \binom{4}{2}\left[\binom{4}{1,3}+\binom{4}{2,2}+\binom{4}{3,1}\right] & ,\quad x=2\\ \binom{4}{3}\left[\binom{4}{1,1,2}+\binom{4}{1,2,1}+\binom{4}{2,1,1}\right] & ,\quad x=3\\ \binom{4}{4}\binom{4}{1,1,1,1} & x=4\\ 0 & \text{سایر جاها} ,\end{cases}$$

و بنابراین، تابع جرم احتمال گوناگونی وجه ها، به صورت زیر است:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{64} & ,\quad x=1\\ \frac{21}{64} & ,\quad x=2\\ \frac{36}{64} & ,\quad x=3\\ \frac{6}{64} & ,\quad x=4\\ 0 & \text{سایر جاها} ,\end{cases}$$

اینک پنداریم ترتیب پرتابها مهم نباشد. در این حالت تعداد عضوهای فضای نمونه ای برابر ۳۵ $\left(=\binom{4+4-1}{4}\right)$ است و لذا، بنابر نماد معرفی شده در برهان قضیهٔ ۲ داریم:

$$N'_{4,4}(x)=\begin{cases}\binom{4}{1}\binom{4}{4} & ,\quad x=1\\ \binom{4}{2}\left[\binom{5}{4}-\binom{2}{1}\binom{4}{4}\right] & ,\quad x=2\\ \binom{4}{3}\left[\binom{6}{4}-\binom{3}{1}\binom{5}{4}+\binom{3}{2}\binom{4}{4}\right] & ,\quad x=3\\ \binom{4}{4}\left[\binom{7}{4}-\binom{4}{1}\binom{6}{4}+\binom{4}{2}\binom{5}{4}-\binom{4}{3}\binom{4}{4}\right] & ,\quad x=4\\ 0 & \text{سایر جاها} ,\end{cases}$$

و بنابراین تابع جرم احتمال گوناگونی وجه ها به صورت زیر است:

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{4}{35} & ,\quad x=1\\ \frac{18}{35} & ,\quad x=2\\ \frac{12}{35} & ,\quad x=3\\ \frac{1}{35} & ,\quad x=4\\ 0 & \text{سایر جاها} ,\end{cases}$$

تذکر ۱ـ به آسانی می توان دریافت که تعداد حالتهایی که می توان n مهرهٔ متمایز را در m آوند نهاد به گونه ای که درست (m-i) آوند خالی باشد، در دو حالت متمایز بودن و یکسان بودن آوندها، به ترتیب برابر $N_{m,n}(i)$ و $N'_{m,n}(i)$ است.

تذکر ۲ـ روشن است که تعداد حالتهایی که می توان یک نمونهٔ n تایی از آوندی دارای m گونه مهره (n_1 مهره از گونهٔ اول، n_2 مهره از گونهٔ دوم، ...، n_m مهره از گونهٔ m ام) بیرون آورد به صورتی که در نمونه، درست i گونه مهره باشد، $i=1,2,\dots,\min(m,n)$، $n\le n_j$، $j=1,2,\dots,m$، در دو حالت نمونهٔ مرتب و نامرتب، به ترتیب برابر $N_{m,n}(i)$ و $N'_{m,n}(i)$ است.

مثال ۲ـ آوندی دارای ۳۰ مهرهٔ قرمز، ۴۰ مهرهٔ سفید و ۵۰ مهرهٔ سبز است. از این آوند به تصادف یک نمونهٔ ۳ تایی بیرون می آوریم. احتمال آن را بیابید که،

الف) درست ۲ رنگ دیده شود؛

ب) تنها دو رنگ سفید و قرمز دیده شود.

حل ـ الف) بنابر تذکر ۲، احتمال خواسته شده در دو حالت مرتب و نامرتب، به ترتیب برابر $\frac{N_{3,30}(2)}{3^{30}}$ و $\frac{N'_{3,30}(2)}{\binom{32}{30}}$ است. ولی،

$$N_{3,30}(2)=\binom{3}{2}\left(\binom{30}{1,29}+\dots+\binom{30}{1,29}\right)$$

$$=\binom{3}{2}\left[2^{30}-2\right]=3221225466$$

و

$$N'_{3,30}(2) = \binom{3}{2} \times \left[\binom{32}{30} - \binom{2}{1} \right] = 87$$

بنابراین احتمال خواسته شده در دو حالت مرتب و نامرتب، به ترتیب $1/56 \times 10^{-5}$ و ۰/۱۷۵ است. (توجه می کنیم که بنابر تذکر ۱، در جایگذاری ۳ مهرهٔ متمایز در ۳۰ آوند، احتمال آن که درست یک آوند تهی باشد نیز برای حالتهای آوندهای متمایز و یکسان، به ترتیب برابر $1/56 \times 10^{-5}$ و ۰/۱۷۵ است.)

ب) در این حالت به دلیل مشخص بودن رنگ مهره های نمونه، احتمال خواسته شده در دو حالت مرتب و نامرتب، به ترتیب برابر

$$\frac{N_{3,30}(2) \Big/ \binom{3}{2}}{3^{30}} \quad \text{و} \quad \frac{N'_{3,30}(2) \Big/ \binom{3}{2}}{\binom{32}{30}}$$

و بنابراین، به ترتیب برابر $5/2 \times 10^{-6}$ و ۰/۰۵۸ می شوند. (توجه می کنیم که بنابر تذکر ۱ در جایگذاری ۳ مهرهٔ متمایز در ۳ آوند، احتمال آن که یک آوند ویژه، تهی باشد نیز برای حالتهای آوندهای متمایز و یکسان، به ترتیب برابر $5/2 \times 10^{-6}$ و ۰/۰۵۸ است.)

در دنبالهٔ بحث، برای تعداد افرازهای یک مجموعهٔ n عضوی که برابر

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\{(n_1,n_2,\ldots,n_i):\sum_{j=1}^{i} n_j = n,\, n_j \geq 1,\, j=1,2,\ldots,i\}} \frac{1}{i!} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_i},$$

است، یک رابطهٔ باز گشتی ارائه می دهیم که محاسبات آن برای رایانه، به آسانی امکان پذیر است.

قضیه ۳ـ اگر تعداد افرازهای یک مجموعهٔ n عضوی را با NP(n) نشان دهیم، خواهیم داشت: $NP(1) = 1$ ، $NP(2) = 2$ ، و هم چنین:

$$NP(n) = 2 + \sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{n-j} \left(-\frac{1}{2}\delta\left(j, \frac{n}{2}\right) + NP(j) \right) \quad ; \quad n \geq 3. \qquad (5)$$

برهــان ـ پنداریم مجموعه ای n عضوی به صورت $\{1,2,\ldots,n\}$ داشته باشیم. روشن است که تعداد افرازهای مجموعهٔ تک عضوی $\{1\}$ ، یک ، یعنی خود مجموعه $\{1\}$ است. همچنین $NP(2) = 2$؛ زیرا افرازهای این مجموعه به صورت

$$\{1, 2\} \text{ ، } \{1\} \text{ ، } \{2\}$$

است که یکی خود مجموعه و دیگری افرازی است که در آن همهٔ زیر مجموعه ها تک عضوی اند. اینک برای پی بردن به چگونگی برهان، دربارهٔ حالتهای n = ۳ و n = ٤ بحث می کنیم.

افرازهای مجموعهٔ ۳ عضوی $\{1,2,3\}$ به صورت زیر است:
$\{1,2,3\}$، یعنی خود مجموعه؛ $\{3\}$ ، $\{1,2\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1,3\}$ ، $\{1\}$ ، $\{2,3\}$ یعنی مجموعهٔ افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ ۲ عضوی وجود دارد و $\{3\}$ ، $\{2\}$ ، $\{1\}$؛ یعنی افرازی که تنها دارای زیر مجموعه های تک عضوی است.

به آسانی دریافت می شود که در افرازهای یک مجموعهٔ n عضوی، $n \geq 2$ دو افراز ویژه همواره وجود دارند، خود مجموعه و افرازی که در آن همهٔ زیر مجموعه ها تک عضوی اند.

برای حالت n = ٤ نیز بنابر بحث بالا داریم:

تعداد افرازهای یک مجموعهٔ ٤ عضوی = ۲ + (تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ ۳ عضوی وجود دارد) + (تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ ۲ عضوی وجود دارد).

ولی تعداد افرازهای یک مجموعهٔ ٤ عضوی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ ۳ عضوی وجود دارد، برابر $\binom{4}{3}$ است. این افرازها عبارت اند از:

$\{2\}$ ، $\{1,3,4\}$ $\{3\}$ ، $\{1,2,4\}$ $\{4\}$ ، $\{1,2,3\}$ $\{1\}$ ، $\{2,3,4\}$.

همچنین افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ ۲ عضوی وجود دارد، شامل افرازهایی است که در آنها به جز زیر مجموعه های ۲ عضوی، ممکن است زیر مجموعه های دیگری نیز باشند؛ یعنی زیر مجموعه های تک عضوی. بنابراین برای شمردن این افرازها، در آغاز باید دو عضو از ٤ عضو را برگزینیم و سپس

افرازهای ۲ عضوی باقیمانده را نیز با این مجموعه در نظر بگیریم. ولی تعداد زیر مجموعه های ۲ عضوی برابر ۶ ($=\binom{4}{2}$) است. با گزینش این دو عضو، دو عضو دیگر باقی می ماند که باید افرازهای گوناگون این دو عضو را نیز با زیر مجموعهٔ ۲ عضوی بالا در نظر بگیریم. بنابراین، در این حالت باید ۱۲ ($=6\times NP(2)$) افراز داشته باشیم. ولی می توان به آسانی دریافت که افرازهایی که از دو زیر مجموعهٔ ۲ عضوی تشکیل شده اند، دوبار به حساب آمده اند. بنابراین از تعداد بالا، یعنی ۱۲، باید عدد ۳ ($=\frac{1}{2}\binom{4}{2}$) کم شود.

در نتیجه $NP(4)=9$.

برای هر n، $n \geq 3$، داریم:

NP(n) = ۲ + (تعداد افرازهایی که در آنها درست دست کم یک زیر مجموعهٔ (n-۱) عضوی وجود دارد) + (تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ (n-۲) عضوی وجود دارد) +...+ (تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ $(n-\left[\frac{n}{2}\right])$ عضوی وجود دارد).

(۶)

ولی تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ (n-j) عضوی وجود دارد، $j=1,2,\dots,\left[\frac{n}{2}\right]-1$، برابر

$$\binom{n}{n-j}NP(j)\ ,$$

است و همچنین تعداد بالا برای $(n-\left[\frac{n}{2}\right])$، در دو حالت n فرد و n زوج به ترتیب برابر

$$\binom{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}NP(\left[\frac{n}{2}\right])-\frac{1}{2}\binom{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]} \quad \text{و} \quad \binom{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}NP(\left[\frac{n}{2}\right])$$

است و بنابراین برای هر $n \geq 3$، این تعداد برابر

$$\binom{n}{n-\left[\frac{n}{2}\right]}\left(NP(\left[\frac{n}{2}\right])-\frac{1}{2}\delta\left(\left[\frac{n}{2}\right],\frac{n}{2}\right)\right)$$

است. در نتیجه بنابر مطالب بالا،

$$NP(n)=2+\sum_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\binom{n}{n-j}\left(NP(j)-\frac{1}{2}\delta(j,\frac{n}{2})\right)$$

قضیه ۴ ـ برای یک مجموعهٔ n عضوی، اگر تعداد افرازهایی را که در آنها همهٔ زیر مجموعه ها، ۲ عضوی باشند با $NP_2(n)$ نشان دهیم، رابطهٔ بازگشتی زیر برای ... , ۸ , ۶ = n برقرار است:

$$NP_2(n)=NP_2(n-2)+(n-2)(n-3).NP_2(n-4),$$

و همچنین برای n = ۲,۴,... داریم:

$$NP_2(n)=\frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\binom{2i}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}=\frac{\binom{n}{2,2,\dots,2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!}=\frac{n!}{\left(\frac{n}{2}\right)!2^{n/2}} \qquad (7)$$

برهان ـ مجموعه ای n عضوی مانند {۱,۲,...,n} ، ... , ۸ , ۶ = n ، را در نظر می گیریم. برای دو عضو ویژهٔ n-۱ و n این دو مجموعه، دو حالت پیش می آید: یا هر دو در یک زیر مجموعهٔ ۲ عضوی اند و یا نیستند. بنابراین:

$NP_2(n)$ = (تعداد حالتهایی که این دو عضو ویژه با هم در یک زیر مجموعه باشند) + (تعداد حالتهایی که این دو عضو ویژه با هم در یک زیر مجموعه نباشند).

ولی تعداد حالتهایی که این دو عضو ویژه با هم هستند برابر تعداد حالتهای گزینش این دو عضو ویژه، ضربدر تعداد حالتهایی است که n-۲ عضو باقی مانده می توانند زیر مجموعه هایی دو عضوی تشکیل دهند. بنابراین برابر $\binom{2}{2}NP_2(n-2)$ است. همچنین حالتی که این دو عضو ویژه با هم نیستند، حالتی است که از (n-۲) عضو باقیمانده، دو عضو را برای این دو عضو ویژه برمی گزینیم (این ۴ عضو با هم دو زیر مجموعهٔ ۲ عضوی را تشکیل می دهند)، که تعداد این حالتها برابر (n-۲)(n-۳) است. اینک (n-۴) عضو باقی می ماند که آنها نیز باید زیر مجموعه های ۲ عضوی تشکیل دهند که تعداد این حالتها برابر $NP_2(n-4)$ است. بنابراین تعداد حالتهایی که این دو عضو ویژه با هم نیستند، برابر $(n-2)(n-3)NP_2(n-4)$ است. پس:

$$NP_2(n) = NP_2(n-2) + (n-2)(n-3)NP_2(n-4) \ .$$

روشن است که باید n بیشتر از ۶ باشد. به آسانی دریافت می شود که $NP_2(2)=1$ و هم چنین $NP_2(4)=3$، زیرا همهٔ افرازهای خواسته شده به صورت زیر است:

{۱,۲},{۳,۴} {۱,۳},{۲,۴} {۱,۴},{۲,۳}

که البته از (۷) نیز $NP_2(2)$ و $NP_2(4)$ به ترتیب برابر ۱ و ۳ به دست می آیند. بنابراین برای اثبات (۷) کافی است نشان دهیم که این رابطه با (۸) سازگاری دارد؛ یعنی نشان دهیم که،

$$\frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\binom{2i}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n-2}{2}}\binom{2i}{i}}{\left(\frac{n-2}{2}\right)!} + (n-2)(n-3)\frac{\prod_{i=1}^{\frac{n-4}{2}}\binom{2i}{2}}{\left(\frac{n-4}{2}\right)!}; n=6,8,\ldots$$

و یا هم ارز آن،

$$\frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}}\binom{2i}{2}}{\left(\frac{n}{2}\right)!} = \frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-1}\binom{2i}{i}}{\left(\frac{n}{2}-1\right)!} + (n-2)(n-3)\frac{\prod_{i=1}^{\frac{n}{2}-2}\binom{2i}{2}}{\left(\frac{n}{2}-2\right)!}; n=6,8,\ldots$$

که درستی این دو برابری، به روشنی پیداست.

مثال ۳ـ فردی به تصادف یک مجموعهٔ ۶ عضوی را افراز می کند، احتمال آن را بیابید که در این افراز:

الف) دست کم یک زیر مجموعهٔ ۳ عضوی وجود داشته باشد؛

ب) تنها زیر مجموعه های ۲ عضوی وجود داشته باشد.

حل ـ الف) بنابر مسئله ۲، تعداد عضوهای فضای نمونه ای آزمایش به صورت زیر به دست می آید؛

$$NP(6) = 2+\sum_{j=1}^{3}\binom{6}{6-j}\left(NP(j)-\frac{1}{2}\delta(j,3)\right)$$

$$=2+\binom{6}{5}(1-0)+\binom{6}{4}(2-0)+\binom{6}{3}\left(5-\frac{1}{2}\right)=128$$

ولی تعداد افرازهایی که در آنها دست کم یک زیر مجموعهٔ ۳ عضوی وجود دارد، برابر $\binom{6}{3}\left(5-\frac{1}{2}\right)=90$ است. بنابراین احتمال خواسته شده برابر $\frac{45}{64}$ است.

ب) بنابر قضیهٔ ۴، داریم: $NP_2(6)=15$. بنابراین احتمال خواسته شده برابر $\frac{15}{128}$ می شود.

مراجع

[۱] ترابی، حمزه، *چند روش پیشنهادی برای آزمون CSR در الگوهای نقطه ای فضایی*، پایان نامه کارشناسی ارشد ۱۳۷۵.

[۲] بالاکریشنان، *ریاضیات گسسته*، ترجمه دکتر فاروقی، چاپ دانشگاه یزد.