

استقلال و توزیع F

جی. چن^۱ . ا. آداتیا

مترجم: مریم شریف دوست^۱

چکیده

در این مقاله اهمیت استقلال بین متغیرهای تصادفی $N(0, 1)$ و $\chi^2_{(r)}$ در ساختن توزیع $t_{(r)}$ بصورت $\frac{N(0, 1)}{\sqrt{\chi^2_{(r)}}}$ بیان شده و نشان داده می‌شود در صورت عدم استقلال، تقریب توزیع کسر فوق به $t_{(r)}$ کاری نامناسب خواهد بود.

۱ مقدمه

فرض کنید $U \sim N(0, 1)$ و $W \sim \chi^2_{(r)}$ و U و W از یکدیگر مستقل باشند پس خواهیم داشت

$$T = \frac{U}{(W/r)^{1/2}} \sim t_{(r)}$$

حال فرض کنید که $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با $N(\mu, \sigma^2)$ باشند. می‌دانیم که $\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ و $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$ از یکدیگر مستقلند و

$$T^2 = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t_{(n-1)}$$

هنگام تدریس این مبحث سؤالات زیر برای دانشجویان پیش می‌آید:

۱- آیا $X_i - \bar{X}$ از S^2 مستقلند؟

^۱ مریم شریف دوست، دانشگاه آزاد اسلامی واحد خمینی شهر

۲- آیا $\frac{X_i - \mu}{S} \sim t_{(n-1)}$ ؟

۳- در صورت عدم استقلال U و W آیا $T \sim t_{(r)}$ ؟
در بخش دوم نشان خواهیم داد که هر سه سؤال فوق جواب منفی دارند و بطور کل حالتی که صورت و مخرج کسر در متغیر تصادفی T مستقل نیستند مورد بررسی قرار خواهند گرفت.

۲ چند مثال

مثال ۱:

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با $N(\mu, \sigma^2)$ باشند پس برای هر i خواهیم داشت X_i و S^2 مستقل نیستند.

برای مثال فرض کنید $n = 2$ ، خواهیم داشت

$$X_1, X_2 \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1) \quad S^2 = \frac{1}{2}(X_1 - X_2)^2$$

متغیرهای تصادفی Y_1 و Y_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Y_1 = X_1 \quad Y_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X_1 - X_2)^2$$

تابع چگالی توأم Y_1 و Y_2 عبارتست از

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}y_2} \{ \exp[-(y_1^2 + y_2 - y_1\sqrt{2}y_2)] + \exp[-(y_1^2 + y_2 + y_1\sqrt{2}y_2)] \} \quad (1-2)$$

$$-\infty < y_1 < \infty, \quad 0 < y_2 < \infty$$

چون این تابع چگالی نمی‌تواند به صورت حاصلضرب توابع چگالی Y_1 و Y_2 درآید پس Y_1 و Y_2 مستقل نیستند. به همین ترتیب $X_i - \bar{X}$ و S^2 نیز از یکدیگر مستقل نیستند.

مثال ۲:

فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با $N(\mu, \sigma^2)$ باشند، متغیر تصادفی $\frac{X - \mu}{S}$ دارای توزیع $t_{(n-1)}$ نمی‌باشد.

در حالت $n = 2$ خواهیم داشت

$$X_1, X_2 \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$$

Y_1 و Y_2 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$Y_1 = X_1 \quad Y_2 = \frac{X_1}{S} = \frac{\sqrt{2}X_1}{|X_1 - X_2|}$$

تابع چگالی احتمال توأم Y_1 و Y_2 عبارتست از

$$g(y_1, y_2) = \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[y_1^2 + y_1^2\left(\frac{1-\sqrt{2}}{y_2}\right)^2\right]\right\} \times \frac{\sqrt{2}|y_1|}{y_2^2} + \frac{1}{2\pi} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left[y_1^2 + y_1^2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{y_2}\right)^2\right]\right\} \times \frac{\sqrt{2}|y_1|}{y_2^2} \quad (2-2)$$

در جاییکه

$$(y_1, y_2) \in \{(y_1, y_2) : y_1 < 0, y_2 < 0 \text{ یا } y_1 > 0, y_2 > 0\}$$

تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای Y_2 برابر است با

$$g_2(y_2) = \frac{\sqrt{2}}{4\pi} \left\{ \frac{1}{y_2^2 - \sqrt{2}y_2 + 1} + \frac{1}{y_2^2 + \sqrt{2}y_2 + 1} \right\}$$

$$, -\infty < y_2 < \infty \quad (3-2)$$

واضح است که تابع چگالی احتمال فوق، چگالی $t_{(1)}$ یا حتی چگالی توزیع کوشی نیست که از عدم استقلال X_i و S^2 ناشی می‌شود.

مثال ۳:

فرض کنید $U \sim N(0, 1)$ و $W \sim \chi_{(r)}^2$ باشد، پس $T = \frac{U}{(W/r)^{1/2}} \sim t_{(r)}$ اگر و فقط اگر U و W از یکدیگر مستقل باشند.

اثبات شرط کافی از تعریف توزیع t بدست می‌آید. برای اثبات شرط لازم حالت $r = 1$ را در نظر می‌گیریم. در حالت کلی اثبات طولانی‌تر خواهد بود.

فرض کنید $(X, Y) \sim N_2(0, \Sigma)$ در صورتی که $\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix}$ و $0 \leq \rho < 1$ و V, U را بصورت زیر تعریف کنیم

$$U = X \quad V = \frac{Y}{\left(\frac{X^2}{1}\right)^{1/2}} = \frac{Y}{|X|}$$

خواهیم داشت

$$g(u, v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{\frac{-1}{2\pi(1-\rho^2)}(u^2 - 2\rho uv + u^2v^2)\right\} |u| \quad (4-2)$$

و تابع چگالی احتمال حاشیه‌ای V برای $-\infty < v < \infty$ عبارتست از

$$g_2(v) = \frac{\sqrt{(1-\rho^2)}}{2\pi} \times \left\{ \frac{1}{v^2 - 2\rho v + 1} + \frac{1}{v^2 + 2\rho v + 1} \right\} \quad (5-2)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+v^2} \quad \text{اگر و فقط اگر } \rho = 0 \quad (6-2)$$

از $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ از یک $ARMA(1, 1)$ با مدل زیر شبیه سازی نموده

$$X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$$

که در آن $\varepsilon_t \stackrel{i.i.d}{\sim} N(0, 1)$ می باشند. برای جفت ثابت θ, ϕ آماره t معمول به صورت

$$T_T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - 0)}{S}$$

برای هر ۱۰۰۰۰ نمونه محاسبه و چندک P درصد توزیع نمونه ای T_T برای

$P = 0/8$ و $0/85$ و $0/9$ و $0/95$ و $0/975$ و $0/995$ برآورد شده است، نتایج در جدول شماره ۲ در مقایسه با چندکهای P درصد استنباط بر اساس $t_{(10-1)}$ آورده شده است. همانطور که دیده می شود، توزیع نمونه ای T_T با $t_{(10-1)}$ یکسان نیست و استنباط بر اساس $t_{(10-1)}$ ما را به نتیجه گیری غلط رهنمون می سازد.

۳ نتیجه

اگر $U \sim N(0, 1)$ و $W \sim \chi^2_{(r)}$ ، شرط لازم و کافی برای آنکه $T_1 = \frac{U}{(W/r)^{1/2}} \sim t_{(r)}$ این است که U و W از یکدیگر مستقل باشند.

اگر $X_1, X_2, \dots, X_{10}$ مستقل و هم توزیع با $N(\mu, \sigma^2)$ باشند پس:

$$T_T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S}$$

تنها آماره ای است که دارای توزیع $t_{(n-1)}$ است.

چون توزیع t اغلب برای برآورد فاصله اطمینان و مسایل آزمون فرض در نمونه های کوچک مورد استفاده قرار می گیرد، دو مثال بعد را بر این اساس و با توجه به عدم استقلال بیان می کنیم.

مثال ۴:

برای n معلوم، ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی از $X_1, X_2, \dots, X_n$ با توزیع $N(0, 1)$ را شبیه سازی می کنیم. پس اگر

$$U = X_1, \quad W = (n-1)S^2$$

آنگاه

$$U \sim N(0, 1), \quad W \sim \chi^2_{(n-1)}$$

ولی U و W از یکدیگر مستقل نیستند. برای هریک از ۱۰۰۰۰ نمونه تصادفی عبارت

$$T_T = \frac{X_1 - 0}{[W/(n-1)]^{1/2}}$$

و چندک P درصد توزیع نمونه ای T_T را برای $P = 0/8$ و $0/85$ و $0/9$ و $0/95$ و $0/975$ و $0/995$

محاسبه می کنیم و با چندک مربوط در $t_{(n-1)}$ برای $n = 5, 10, 15$ مقایسه می کنیم که نتایج در جدول ۱ نمایش داده شده است.

به خوبی دیده می شود که T_T دارای توزیع $t_{(n-1)}$ نمی باشد، اما اثر عدم استقلال بین U و W با افزایش نمونه کاهش می یابد. چون توزیع t برای نمونه های کوچک بیشتر مورد استفاده قرار می گیرد، در صورت عدم استقلال بین U و W به هیچ عنوان نمی توان توزیع T_T را با $t_{(n-1)}$ تقریب زد.

مثال ۵:

برای جفت های متعدد از θ, ϕ ، ۱۰۰۰۰ نمونه

جدول ۱: درصد توزیع نمونه ای T_T :

n	P					
	۰/۸۰۰	۰/۸۵	۰/۹۰۰	۰/۹۵	۰/۹۷۵	۰/۹۹۵
۵	۰/۹۴۱۰	۱/۱۸۹۶	۱/۵۳۳۲	۲/۱۳۱۸	۲/۷۷۶۴	۴/۶۰۴۱
	۰/۹۶۱۹	۱/۱۵۳۴	۱/۳۹۱۵	۱/۷۱۸۶	۱/۹۹۷۵	۲/۶۴۵۱
۱۰	۰/۸۸۳۴	۱/۰۹۹۷	۱/۳۸۳۰	۱/۸۳۳۱	۲/۲۶۲۲	۳/۲۴۹۸
	۰/۹۱۶۸	۱/۱۱۷۹	۱/۳۵۰۰	۱/۶۸۸۹	۱/۹۸۸۰	۲/۴۴۷۱
۱۵	۰/۸۶۸۱	۱/۰۷۶۳	۱/۳۴۵۰	۱/۷۶۱۳	۲/۱۴۴۸	۲/۹۷۶۸
	۰/۸۹۳۶	۱/۰۷۶۷	۱/۳۲۹۱	۱/۶۷۶۵	۱/۹۴۳۹	۲/۴۶۸۳

برای هر n ؛ سطر اول شامل درصدهای $t_{(n-1)}$ و سطر دوم شامل برآورد درصدی T_T می باشد.

جدول ۲: درصد توزیع نمونه‌ای T_2 :
ردیف Exact شامل چندکهای P درصدای توزیع $t_{(1)}$ می‌باشد.

Exact		P					
		۰/۸۰۰	۰/۸۵	۰/۹۰۰	۰/۹۵	۰/۹۷۵	۰/۹۹۵
ϕ	θ	۰/۸۸۳۴	۱/۰۹۹۷	۱/۳۸۳۰	۱/۸۳۳۱	۲/۲۶۲۲	۳/۲۴۹۶
۰/۰	۰/۰	۰/۸۸۱۱	۱/۰۰۰۱	۱/۳۷۴۴	۱/۸۶۷۶	۲/۲۹۱۸	۳/۲۷۰۱
۰/۳	۰/۰	۱/۱۹۹۰	۱/۵۳۱۴	۱/۹۲۷۵	۲/۵۶۳۷	۳/۱۲۷۳	۴/۶۷۶۵
۰/۶	۰/۰	۱/۸۹۷۳	۲/۳۵۹۲	۳/۰۱۶۷	۴/۱۲۵۸	۵/۲۳۱۵	۷/۲۹۵۰
۰/۹	۰/۱	۴/۴۵۵۳	۵/۶۱۰۹	۷/۳۷۴۷	۱۰/۱۴۶۳	۱۳/۰۰۰۸	۱۹/۰۵۸۳
۰/۱۰	۰/۳	۱/۱۰۵۸	۱/۳۸۰۴	۱/۷۴۲۲	۲/۲۹۸۱	۲/۸۱۹۱	۴/۰۹۳۸
۰/۱۰	۰/۶	۱/۲۶۶۳	۱/۵۸۹۳	۲/۰۲۸۰	۲/۷۵۷۱	۳/۴۳۷۱	۴/۷۹۵۱
۰/۱۰	۰/۹	۱/۳۶۲۵	۱/۶۷۶۰	۲/۱۲۰۶	۲/۸۴۳۸	۳/۴۷۹۷	۵/۰۱۷۲
۰/۳	-۰/۹	۰/۳۳۲۵	۰/۴۱۳۵	۰/۵۱۸۶	۰/۶۷۸۰	۰/۸۲۸۵	۱/۱۶۸۷
-۰/۹	۰/۳	۰/۴۲۲۳	۰/۵۲۷۶	۰/۶۸۴۷	۰/۹۲۸۳	۱/۲۰۹۳	۱/۷۵۲۹
۰/۸	۰/۴	۳/۶۲۸۵	۴/۵۴۳۷	۵/۸۵۰۴	۷/۷۹۹۳	۹/۸۳۱۱	۱۵/۳۴۷۹
-۰/۴	-۰/۸	۰/۲۵۰۴	۰/۳۰۹۶	۰/۳۸۵۰	۰/۵۰۱۲	۰/۶۱۱۴	۰/۸۴۲۳

مراجع

- [1] Browker, A. H., and Lieberman, G. J. (1972), *Engineering Statistics (2nd ed.)*. Englewood cliffs, NJ: prentice. Hall.

اصل این مقاله با عنوان "Independence and t Distribution"

نوشته A. Adatia و Gemai Chen است که در

The American Statistician, May 1997, Vol. 51, NO. 2

چاپ شده است.