

## رگرسیون با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکک<sup>۱</sup>

ماشالله ماشین‌چی<sup>۲</sup>

چکیده

در این مقاله با استفاده از روش‌های موجود در نظریه مجموعه‌های مشکک مقدار تخمین یک متغیر وابسته را در حالتی که مقدار متغیر مستقل به صورت مشکک باشد محاسبه می‌کنیم. همچنین مقدار تخمین یک متغیر وابسته را در حالتی که وابستگی آن به متغیر مستقل به صورت یک پایگاه اطلاعاتی بیان شده باشد ارایه کرده و روشی برای تخمین متغیر وابسته در حالتی که مقدار عددی متغیر مستقل، مفروض باشد ارایه می‌کنیم.

### ۱ مقدمه

است که پس بدست آوردن منحنی برآنش شده بر داده‌ها، مقدار متغیر  $x$  به صورت عددی نبوده بلکه به شکل متغیری زبانی مثل «تقریباً زیاد»، «حول و حوش  $x$ » و غیره باشد که همگی مفاهیمی نادقيق‌اند که به زبان مجموعه‌های مشکک قابل نمایش‌اند. در این مقاله با تلفیقی از روش رگرسیون برای برآنش یک منحنی بر مجموعه‌ای از داده‌های مفروض و روش‌های ابداع شده در نظریه مجموعه‌های مشکک مثال در چگونگی بدست آوردن تخمین  $y$  بر حسب متغیر مشکک مفروض  $x$  بحث می‌کنیم. در انتهای مقاله با بازبینی مثال ارایه شده برای رگرسیون و آن ارزنگاه جملات شرطی به

بسیاری از پدیده‌ها تابعی از پیشامدهای دیگرند. مثلاً رشد جمعیت باعث افزایش مصرف می‌شود، عدم رعایت بهداشت در جامعه سبب افزایش بیماریها می‌شود و میزان تولید محصولات کشاورزی تابعی از میزان بارندگی و نوع خاک و عوامل دیگر است. در هر حال در بسیاری از زمینه‌های تحقیقاتی دانستن رابطه بین پدیده‌ها امری اساسی و مورد نیاز است تا رفتار یک یا چند متغیر را بر حسب یک یا چند متغیر دیگر بررسی کنیم. تحت فرضهای مناسب رگرسیون روشی جالب برای بررسی این روابط‌ها و درنهایت تخمین مقدار عددی یک متغیر مجھول بر حسب سایر متغیرهای معلوم است [۲].

اما موردی را که روش‌های رگرسیون به آن نمی‌پردازند حالتی

<sup>۱</sup> این مقاله را به یاران صمیمی آقایان دکتر شهرام سلیلی و سید عباس ضیایی، به پاس خدمتشان در دانشکده ریاضی و کامپیوتر دانشگاه شهید باهنر کرمان تقدیم می‌کنم.  
<sup>۲</sup> ماشالله ماشین‌چی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

از معادله (۱) به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{y}_0 = f(x_0) = \hat{\alpha}_0 + \hat{\beta}x_0$$

البته روش‌های رگرسیون تنها به دو متغیر و همچنین برازش یک خط راست منحصر نمی‌شوند و می‌توان آنها را در موارد زیاد دیگری بکار برد. اما موردی را که کتب آماری بدان نمی‌پردازند و در اینجا مورد نظر ما می‌باشد، حالتی است که مقدار متغیر  $x$  به صورت یک عدد مشخص بوده بلکه به شکل متغیری زبانی مانند تقریباً زیاد و حول و حوش ... و نظایر آن باشد، که در اینجا آنرا به صورت  $\bar{x}$  نشان می‌دهیم. در این صورت سؤال این است که مقدار  $\bar{y}$  چه خواهد بود؟ چون در این حالت معنی  $f(\bar{x}) = \bar{y}$  روش نمی‌باشد، برای پاسخ به این مطلب نیاز به نظریه مجموعه‌های مشکک و بخصوص اصل توسعی داریم که در اینجا به طور بسیار مختصر برخی از آنها را مرور می‌کنیم. علاقمندان به مطالعه بیشتر می‌توانند به کتابهای [۱۲، ۱۱، ۶، ۵، ۴، ۳] مراجعه کنند البته در این مقاله از نمادهای مرجع [۱۱] استفاده شده است. ما برای اختصار تعریف زیر مجموعه مشکک را دانسته فرض کرده و برای سهولت کار مجموعه همه زیرمجموعه‌های مشکک مجموعه ناتهی  $X$  را، که از این به بعد عناصر آنرا مجموعه مشکک می‌نامیم، به صورت  $F(X)$  نشان می‌دهیم یعنی

$$F(X) = \{\tilde{A} \mid \tilde{A} : X \rightarrow [0 ; 1]\}$$

یکی از روش‌های ساده و مرسوم برای بیان یک  $\tilde{A}$ ، که آنرا تابع عضویت می‌گوییم، استفاده از «اعداد مشکک مثلثی» است که به صورت  $(a, b, c) = \tilde{A}$  نشان می‌دهیم. در این حالت  $\tilde{A} \in F(R)$  و تابع  $\tilde{A}$  به صورت زیر تعریف می‌شود،  $a, b, c \in R$

$$\tilde{A}(x) = \begin{cases} 0 & , x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & , a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b} & , b \leq x < c \\ 0 & , c \leq x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{اگر} \\ \text{اگر} \\ \text{اگر} \\ \text{اگر} \end{array}$$

صورت «اگر-آنگاه»، به معرفی یک پایگاه اطلاعاتی مشکک<sup>۲</sup> پرداخته و بیان می‌کنیم که در برخی مسایل ممکن است رابطه بین  $y$  و  $x$  به صورت گزاره‌های شرطی اگر-آنگاه یا به عبارتی در قالب یک پایگاه اطلاعاتی مشکک باشد [۱۴]. در این حالت روش‌های رگرسیون یا تلفیق روش‌های رگرسیون با نظریه مجموعه‌های مشکک کاربرد ندارند ولذا ما در این حالت روش پیدا کردن تخمین  $\bar{y}$  را برای حالتی که  $x$  یک مقدار عددی مفروضی باشد ولی رابطه بین  $y$  و  $x$  به صورت یک پایگاه اطلاعاتی مشکک بیان شده باشد، ارایه می‌کنیم.

## ۲ پیشنباز

فرض کنید  $n$  داده‌های مفروضی باشند که رابطه بین دو متغیر  $x$  و  $y$  را نشان می‌دهند. در بسیاری از موارد معادله یک خط راست می‌تواند وابستگی  $y$  به  $x$  نشان دهد. خط راستی که می‌توان به این داده‌ها برازش داد تحت شرایط مناسب، به صورت زیر است

$$\hat{y} = f(x) = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x \quad (1)$$

که در آن  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  از حل دستگاه معادلات نرمال:

$$\sum_{i=1}^n y_i = n\hat{\alpha} + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \hat{\alpha} \sum_{i=1}^n x_i + \hat{\beta} \sum_{i=1}^n x_i^2$$

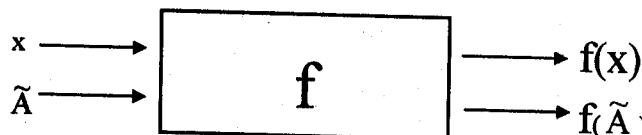
به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\hat{\beta} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - (\sum_{i=1}^n x_i)(\sum_{i=1}^n y_i)}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - (\sum_{i=1}^n x_i)^2} \quad (3)$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x}$$

با محاسبه  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  خط رگرسیون برازش شده بر داده‌های مفروض، کاملاً مشخص می‌شود. حال فرض کنید که مقدار متغیر  $x$  برابر با عدد مشخصی مانند  $\bar{x}$  باشد، آنگاه تخمین  $y$

به ازاء ورودی مشکک  $\tilde{A}$ ، می‌تواند خروجی مشکک  $f(\tilde{A})$  را نیز مشخص کند. برای مطالعه بیشتر در مورد این دیدگاه به مقاله [۹] مراجعه کنید.



شکل ۲: توجیه اصل توسعی

### ۳ کاربرد اصل توسعی در رگرسیون

در این بخش با ارایه دو مثال ساده به چگونگی کاربرد اصل توسعی در رگرسیون می‌پردازیم.

مثال ۲:

فرض کنید که رفتار تابع  $f$  به صورت جدول زیر مشخص شود

$x_i$	$y_i$
۰	۲
۱	۵
۲	۸

جدول ۱: رفتار تابع  $f$  توسط سه مشاهده

به عبارتی فرض کنید سه نقطه از تابع  $R \rightarrow R : f$  مانند جدول ۱ مشخص باشد.

(الف) مقدار تخمین  $\hat{y}$  برای حالت  $x = 5$  چقدر است؟  
(ب) مقدار تخمین  $\hat{y}$  برای حالتی که  $x$  حول وحوش ۵ باشد چقدر است؟

برای پاسخ به (الف)، می‌توان دید که خط رگرسیون برازش شده بر داده‌های جدول ۱ با استفاده از روابط (۳) به صورت زیر است

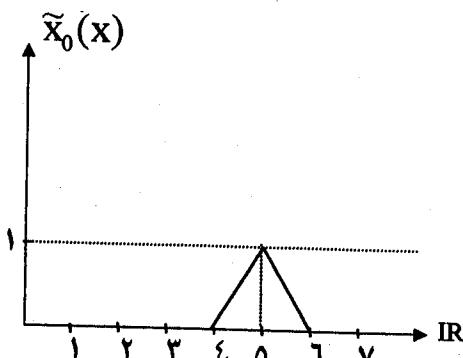
$$\hat{y} = f(x) = 2 + 3x$$

حال با قرار دادن  $x = 5$  در تابع  $f$  مقدار  $\hat{y} = f(5) = 17$  محاسبه می‌شود. اما برای تخمین  $\hat{y}$  در حالت (ب) باید مقدار  $f(\tilde{A})$  را محاسبه کنیم که در آن  $\tilde{A} \in F(R)$ . مجموعه مشکک حول وحوش ۵ است. اگر  $\tilde{A}$  را مانند عدد مشکک

مثال ۱:

فرض کنید  $\tilde{x} \in F(R)$ . مجموعه مشکک «حول وحوش ۵» باشد. آنگاه می‌توان  $\tilde{x}$  را به صورت عدد مشکک مثلثی  $(4, 5, 6)$  بیان کرد که ضابطه تابع عضویت و نمودار آن به صورت شکل ۱ است.

$$\tilde{x}_0(x) = \begin{cases} x - 4 & 4 \leq x < 5 \\ -x + 6 & 5 \leq x < 6 \\ 0 & x < 4 \text{ یا } x \geq 6 \end{cases}$$

شکل ۱: مجموعه مشکک  $\tilde{x}_0$  حول وحوش ۵

در ادامه این بخش فرض کنید  $X \rightarrow Y : f$  یک تابع مفروض باشد، آنگاه  $f$  یک تابع جدید، که آنرا نیز برای سادگی با  $f$  نشان می‌دهیم، به طریق زیر القاء می‌کند

$$f : F(X) \rightarrow F(Y)$$

$$\tilde{A} \mapsto f(\tilde{A})$$

که در آن

$$f(\tilde{A})(y) = \begin{cases} \sup_{x: f(x)=y} \tilde{A}(x) & f^{-1}(\{y\}) \neq \emptyset \\ 0 & f^{-1}(\{y\}) = \emptyset \end{cases} \quad (4)$$

مجموعه مشکک  $f(\tilde{A}) \in F(Y)$  را که در (۴) تعریف شده است توسعی مستقیم  $\tilde{A}$  تحت  $f$  گوییم و روند فوق را اصل توسعی<sup>۵</sup> می‌خوانیم. در واقع توسط اصل توسعی می‌توان مفاهیم مختلفی از ریاضیات را مشکک سازی کرد. اصل توسعی را می‌توان چنین تعبیر کرد که اگر رفتار یک سیستم را توسط تابع  $f$  مطابق شکل ۲ بیان کنیم، آنگاه این سیستم نه تنها قادر است به ازاء ورودی معمولی  $x$  خروجی  $f(x)$  را معین کند، بلکه

لذا اگر مجدداً  $\hat{x} = (4, 5, 6)$  مجموعه مشکک «حول و حوش» باشد، آنگاه تخمین  $f(\hat{x}) = \hat{y}$  را می‌توان با توجه به اصل توسيع و با استفاده از (۴) به صورت

$$\hat{y} = f(\hat{x}) = (16, 25, 36)$$

محاسبه کرد که تعبیر آن عبارت است از مجموعه مشکک «حول و حوش».<sup>۲۵</sup> تذکرای. در مثال ۲(ب) و مثال ۳ چنانچه بخواهیم مقداری عددی برای  $\hat{y}$  بدست آوریم لازم است که  $\hat{y}$  را «مشکک زدایی»<sup>۱</sup> نماییم.

#### ۴ تخمین با استفاده از پایگاه اطلاعاتی مشکک

برای اینکه روشن کنیم منظور از یک پایگاه اطلاعاتی چیست ابتدا به مثال ۲ بر می‌گردیم. همانطور که در این مثال ملاحظه می‌کنیم تابع  $f$  توسط سه مشاهده به صورت  $(x, y)$  مشخص می‌شود، که می‌توان آنها را به شکل گزاره‌های شرطی زیر بیان کرد

$$\begin{aligned} \text{قاعده اول: } & \text{اگر } x = 0, y = 2, \text{ آنگاه } 2 \\ \text{قاعده دوم: } & \text{اگر } x = 1, y = 5, \text{ آنگاه } 5 \\ \text{قاعده سوم: } & \text{اگر } x = 2, y = 8, \text{ آنگاه } 8 \end{aligned} \quad (5)$$

هنوز هم می‌توان در گزاره‌های (۵) بازنگری کرده آنها را به صورت زیر بیان کرد:

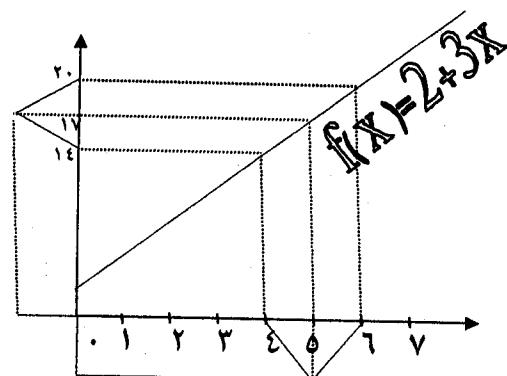
$$\begin{aligned} \text{قاعده اول: } & \text{اگر } x \text{ حول و حوش صفر باشد،} \\ & \text{آنگاه } x \text{ حول و حوش صفر است.} \\ \text{قاعده دوم: } & \text{اگر } x \text{ حول و حوش یک باشد،} \\ & \text{آنگاه } x \text{ حول و حوش پنج است.} \\ \text{قاعده سوم: } & \text{اگر } x \text{ حول و حوش دو باشد،} \\ & \text{آنگاه } x \text{ حول و حوش هشت است.} \end{aligned} \quad (6)$$

به آنچه که در (۶) آمده است یک «پایگاه اطلاعاتی مشکک» گوییم. خواننده علاقمند به این موضوع می‌تواند به فصل‌های چهار و پنج کتاب [۱۲] مراجعه کند. این موضوع اساس کار

مثلثی در مثال ۱ به صورت  $\hat{x} = (4, 5, 6)$  بگیریم، آنگاه تخمین  $\hat{y}$  را می‌توان با توجه به اصل توسيع، با استفاده از (۴) و کمی محاسبه، به شکل عدد مشکک مثلثی

$$\hat{y} = f(\hat{x}) = (14, 17, 20)$$

بدست آورد، که عبارت است از مجموعه مشکک «حول و حوش».<sup>۱۷</sup> البته اگر نخواهیم وارد جزئیات محاسبه شویم می‌توان مقدار  $\hat{y}$  را از روی شکل ۳ و با توجه به اینکه  $f$  دارای ضابطه  $f(x) = 2 + 3x$  است به سادگی ملاحظه کرد



شکل ۳: محاسبه تخمین  $\hat{y}$  برای یک مقدار مشکک  $\hat{x}_0$

بنابراین در حالت (ب) به جای بدست آوردن یک مقدار عددی برای  $\hat{y}$  یک مقدار مشکک  $\hat{y} \in F(R)$  می‌آوریم.

مثال ۳: فرض کنید که رفتار تابع  $f$  به صورت جدول زیر مشخص شود

$x_i$	$y_i$
۰	۰
۱	۱
۲	۴
۳	۹

جدول ۲: رفتار تابع  $f$  توسط چهار مشاهده

در اینجا نیز با استفاده از روش‌های رگرسیون که از جزئیات آن صرف‌نظر می‌کنیم، می‌توان دید که منحنی برازش شده بر داده‌های جدول ۲ به صورت زیر است

$$\hat{y} = f(x) = x^2$$

خروجی) نهایی به صورت یک مجموعه مشکك به مشکك زدایی این خروجی می‌پردازیم. روش‌های متعددی برای این کار وجود دارد که علاقمندان می‌توانند به فصل هشت کتاب [۱۳] و همینطور کتاب‌های [۱۵، ۱۴] مراجعه کنند.

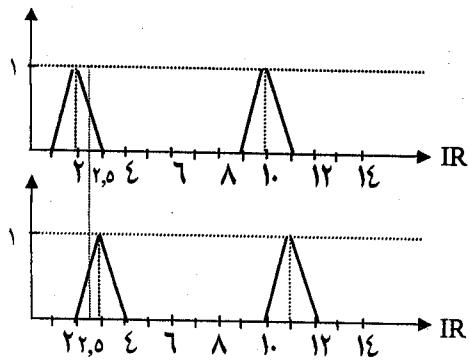
حال برای روشن شدن مطالب این بخش و برای جلوگیری از طولانی شدن مقاله از توضیح بیشتر در مورد جزئیات این بخش صرفنظر کرده و صرفاً به ارایه یک مثال ساده می‌پردازیم.

مثال ۴:

یک سیستم ورودی-خروجی با یک ورودی  $x$  و یک خروجی  $y$  براساس یک پایگاه اطلاعاتی مشکك با دو قاعده زیر مفروض است. برای ورودی  $x = 2/5$  مقدار تخمین  $y$  چقدر است؟

قاعده اول: اگر  $x$  «حول و حوش ۲» باشد، آنگاه  $y$  «حول و حوش ۱۰» است.

قاعده دوم: اگر  $x$  «حول و حوش ۳» باشد، آنگاه  $y$  «حول و حوش ۱۱» است.



شکل ۴: یک سیستم ورودی-خروجی براساس دو قاعده

حال برای بدست آوردن مقدار خروجی (تخمین) با از روش (الف) در تذکر ۲ استفاده می‌کنیم. ابتدا از نقطه  $x_0 = 2/5$  به موازات محور قائم، عمودی رسم می‌کنیم تا با دو مثلث در مؤلفه‌های ورودی دو قاعده اول و دوم برخورد کند. سپس از آن در محل برخورد دو خط به موازات محور افقی رسم کرده تا با دو مثلث در مؤلفه‌های خروجی در دو قاعده اول و دوم برخورد کند و دو ذوزنقه بدست آید. تعبیر این است که خروجی قاعده

کنترل کننده‌های مشکك نیز می‌باشد که خواننده برای آگاهی از این موضوع نیز می‌تواند به مقاله [۵] مراجعه کند. در حالت کلی یک پایگاه اطلاعاتی مشکك را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

قاعده نام: اگر  $x_1$  به صورت  $A_1^i$ ،  $x_2$  به صورت  $A_2^j$ ، ...،

$y_1$  به صورت  $B_1^k$ ،  $y_2$  به صورت  $B_2^l$ ، ...،

$y_m$  به صورت  $B_m^m$  است، (۷)

که در آن  $1, 2, \dots, i = i$  و هر کدام از  $A_i^j$  ها

مجموعه‌های مشکك مفروضی هستند.

قواعد (۷) را شکل متعارف یک پایگاه اطلاعاتی مشکك با ورودی‌های چندگانه  $x$  و خروجی‌های چندگانه  $y$  گویند. در واقع مسئله ما این است که با توجه به قواعد (۷)، تخمین (یا استنتاج) متغیرهای خروجی  $y_1, y_2, \dots, y_m$  را بدست آوریم در حالی که بدانیم مقدار متغیرهای ورودی  $x_1, \dots, x_n$  به ترتیب عبارتند از  $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$ .

که در آن  $A_i^j$  ها همگی مجموعه‌های مشکك مفروضی هستند. تذکر ۲. به منظور بدست آوردن تخمین متغیرهای خروجی دو روش (الف) و (ب) به شرح زیر وجود دارد که در رساله [۱۲] آمده‌اند

(الف) ابتدا از هر قاعده در (۷) استنتاج کرده و سپس همه

استنتاجها را همسو می‌کنیم،

(ب) ابتدا همه قواعد در (۷) را در یک قاعده همسو کرده و سپس از این قاعده استنتاج می‌کنیم.

سپس

(ج) پس از انتخاب یکی از مرحله‌های (الف) یا (ب) عملگرهای «و<sup>۲</sup>»، «یا<sup>۸</sup>» و «همسو ساز<sup>۹</sup>» که در قواعد (۷) در قسمت (الف) و (ب) ظاهر می‌شوند داریم. روش معمول این است که برای «و» عملگر  $\min$ ، برای «یا» و «همسو ساز» عملگر  $\max$  را انتخاب کنند که به آنها عملگرهای «زاده» نیز می‌گویند. و بالاخره

(د) پس از انجام مرحله (ج) و بدست آوردن تخمین (یا

And<sup>v</sup>

Or<sup>۸</sup>

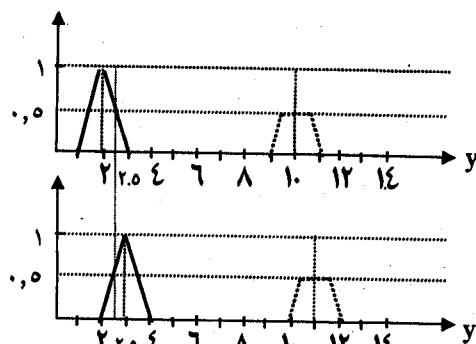
Aggregator<sup>۹</sup>

رگرسیون به حالتی پرداختیم که رابطه بین متغیر وابسته  $y$  و متغیر مستقل  $x$  به صورت یک پایگاه اطلاعاتی مشکک است مفروض باشد که در آن نمی‌توان از روش‌های رگرسیون برای تخمین  $y$  استفاده کرد. لذا بایستی روش‌های نظریهٔ مجموعه‌های مشکک را در آنها بکار برد. مثال‌های ارایه شده در این مقاله همگی دارای یک متغیر وابسته  $y$  و یک متغیر مستقل  $x$  بودند ولی این روش‌ها را می‌توان برای حالتی که چندین متغیر وابسته و چندین متغیر مستقل وجود داشته باشد نیز بکار برد. لازم به ذکر است که معمولاً راحت‌ترین حالت هنگامی است که فقط یک متغیر خروجی داشته باشیم که به صورت تابعی معمولی از متغیرهای مستقل بیان شده باشد. روش پایگاه اطلاعاتی مشکک برای درون‌بابی توابع نیز می‌تواند کاربرد داشته باشد [۸]. این دیدگاه کاربردهای وسیعی منجمله در بهینه‌سازی دارد که نگارنده نیز اخیراً در حال مطالعهٔ این موضوع می‌باشد. آنچه که در این مقاله ارایه شد برداشت شخصی مؤلف از منابع مختلف بوده است که آنها را به سلیقهٔ خود طوری تنظیم کرده است که قابل استفاده برای علاقمندان بیشتری گردد. امید که اینچنین باشد.

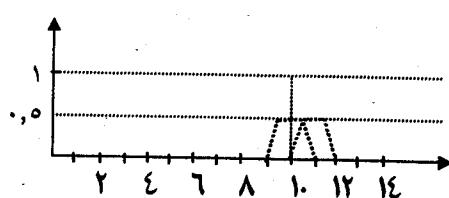
اول یک مجموعهٔ مشکک است که توسط ذوزنقه‌ای با خط پر در شکل ۵ و خروجی قاعدةٔ دوم یک مجموعهٔ مشکک است که توسط ذوزنقه‌ای نقطه‌چین در شکل ۵ مشخص شده‌اند. با این عمل از هر قاعده بطور جداگانه یک استنتاج انجام دادیم و لذا دو خروجی داریم حال باید این دو خروجی را همسو کنیم. در اینجا با استفاده از قسمت (ج) در تذکر ۲ از عملگر  $\max$  استفاده می‌کنیم ولذا خروجی حاصل از ورودی  $= \frac{2}{5}x$  به صورت یک ذوزنقه رسم شده است بدست می‌آید. در نهایت محل مشکک زدایی جواب خروجی، که مثلاً می‌تواند مرکز ثقل ذوزنقه یا مقدار متوسط  $9 + 12 = 10.5$  باشد که ما مقدار  $\frac{10}{5}$  را انتخاب می‌کنیم. وقت شود که اعتقاد ما به این جواب به میزان  $50\%$  یعنی درجه عضویت  $10/5$  در جواب خروجی در شکل ۶ است. این موضوع بدین علت است که مقدار ورودی یعنی  $\frac{2}{5}x$  نیز با درجه عضویت  $5/5$  در ورودی هر کدام از دو قاعدهٔ اول و دوم صادق است.

## ۵ نتیجه‌گیری

در این مقاله ضمن ارایه کاربرد مجموعه‌های مشکک در



شکل ۵: محاسبهٔ خروجی برای هر یک از دو قاعدهٔ اول و دوم



شکل ۶: همسوسازی دو خروجی بدست آمده در شکل ۵

## مراجع

- [۱] ارقامي، ناصر رضا؛ مروري بر رگرسion فازی، گزارش اولین سمینار مجموعه‌های مشکك و کاربردهای آن، دانشگاه شهید باهنر کرمان، ۱۳۷۱.
- [۲] رضائي، عبدالمجيد و سلطانى، افшин؛ مقدمه‌اي بر تحليل رگرسion کاربردي، مرکز نشر دانشگاه صنعتي اصفهان، ۱۳۷۷.
- [۳] زاهدي، مرتضي؛ تئوري مجموعه‌های فازی و کاربردهای آن، نشر کتاب دانشگاهي، ۱۳۷۸.
- [۴] کاسکو، بارت؛ تفکر فازی، ترجمه علی غفاری و سايرين، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسى، ۱۳۷۷.
- [۵] طاهرى، سيد محمود؛ آشنایي با نظرية مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهي مشهد، ۱۳۷۵.
- [۶] طاهرى، سيد محمود؛ کنترل فازی، مقاله در دست چاپ، دانشگاه صنعتي اصفهان، ۱۳۷۹.
- [۷] ماشين‌چي، ماشالله؛ استدلال تقريري و عملگرهای استلزم کارگاه رياضيات فازی، ۲۶امين کنفرانس رياضي کشور، دانشگاه شهيد باهنر کرمان، صص ۱۱۶-۹۱، ۱۳۷۴.
- [۸] ماشين‌چي، ماشالله و سايرين؛ درون‌يابي توابع با استفاده از کنترل کننده‌های فازی، ۲۶امين کنفرانس رياضي کشور، صص ۲۲۷-۲۲۱، ۱۳۷۴.
- [۹] ماشين‌چي، ماشالله؛ رياضيات مفاهيم نادقيق و سистемهای هوشمند، گزارش کامپيوتر، جلد ۱۶، شماره ۱۳۰، صص ۳۰-۲۵، ۱۳۷۵.
- [۱۰] ماشين‌چي، ماشالله؛ تاريخچه مختصری از رياضيات مشکك، اندیشه آماری، جلد ۴، شماره ۱، صص ۱۴-۱۰، ۱۳۷۸.
- [۱۱] ماشين‌چي، ماشالله؛ مجموعه‌های مشکك، انتشارات دانشگاه شهيد باهنر کرمان، ۱۳۷۹.
- [۱۲] ناسوتی فرد، عليرضا؛ عملگرهای عطف و استلزم غير استندارد در فرآيند چند قاعده‌اي استنتاج، رساله کارشناسي ارشد، دانشگاه شهيد باهنر کرمان، ۱۳۷۵.
- [۱۳] وانگ، لي؛ سیستم‌های فازی و کنترل فازی و کاربردهای آن، ترجمه محمد تشنه‌لب و سايرين، انتشارات دانشگاه خواجه نصیرالدین طوسى، ۱۳۷۷.
- [14] Bardossy, A. and Duckstein, L.; Fuzzy rule-based modeling with applications to geophysical, *Biological and Engineering Systems*, CRC Press, 1995.
- [15] Jamshidi, M., Vadiee, N. and Ross, T.J.; Fuzzy logic and control, *Software and hardware applications*, Vol. 2, Prentic Hall International Edition, 1993.