۸ □ سال پنجم ، شماره دوم ـــ

مطلبی درباره استقلال پیشامدها

محمدحسین پورسعید [۱]

چکیده

در این نوشتار رابطه بین «استقلال دو پیشامد» و «استقلال افرازهای آن دو پیشامد» مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فرض کنید که اطلاعات زیر مربوط به تعداد تلویزیون X و رادیو Y، خانوارهای ساکن در یک شهرک است و می‌خواهیم استقلال بین «داشتن تلویزیون» و «داشتن رادیو» را بررسی نماییم.

جدول شماره ۱:

Y / X	۰	۱	۲	۳
۰	۶۰	۱۸۰	۴۵	۱۵
۱	۲۰۰	۶۰۰	۱۵۰	۵۰
۲	۱۴۰	۴۲۰	۱۰۵	۳۵

در این صورت پیشامد «داشتن تلویزیون» شامل زیرپیشامدهای «داشتن یک و دو تلویزیون» و پیشامد «داشتن رادیو» شامل زیرپیشامدهای «داشتن یک، دو و سه رادیو» خواهد بود و بدیهی است که «استقلال بین داشتن تلویزیون و داشتن رادیو» مفهومی متفاوت از «استقلال بین حالتهای مختلف داشتن تلویزیون و حالات مختلف داشتن رادیو» را دارد و ممکن است این سؤال مطرح شود که آیا این دو مقوله با هم ارتباط دارند؟ حال نشان می دهیم که در حالت کلی اگر افرازهای دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه دو پیشامد مستقل از هم خواهندبود ولی عکس این مطلب در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد.

اگر پیشامدهای A و B به‌ترتیب به m و n زیرپیشامد افراز شده بطوریکه زیرپیشامدهای A با زیرپیشامدهای B دو بدو مستقل از هم باشند یعنی

$$\bigcup_{i=1}^{m} A_i = A \quad \forall i,j \quad i \neq j \quad \& \; i,j = 1,2,\ldots,m : \; A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^{n} B_i = B \quad \forall i,j \quad i \neq j \quad \& \; i,j = 1,2,\ldots,n : \; B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\forall i,j \quad i = 1,2,\ldots,m \;,\; j = 1,2,\ldots,n \; : \quad P(A_i \cap B_j) = P(A_i).P(B_j)$$

[۱] محمدحسین پورسعید، گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-08-02]

در اینصورت نشان می‌دهیم هر اجتماعی از زیر پیشامدهای A مستقل از هر اجتماعی از زیر پیشامدهای B است. بدون اینکه خللی به کلیت مسئله واردآید فرض می‌کنیم که دو اجتماع دلخواه از زیر پیشامدهای A و B بصورت $\bigcup_{i=1}^{k}(A_i)$ و $\bigcup_{j=1}^{p}(B_j)$ باشند، در اینصورت خواهیم داشت

$$P((\bigcup_{i=1}^{k} A_i)\bigcap(\bigcup_{j=1}^{p} B_j)) = P(\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{p}(A_i \bigcap B_j))$$

نظر به اینکه A_iها و B_jها عضوهایی از افرازهای A و B بوده که مستقل از یکدیگرند، داریم

$$= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} P(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} P(A_i).P(B_j)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} P(A_i).\sum_{j=1}^{p} P(B_j) = P(\bigcup_{i=1}^{k} A_i).P(\bigcup_{j=1}^{p} B_j)$$

حال با توجه به داده‌های جدول شماره۱ اگر پیشامدهای «نداشتن رادیو، داشتن یک رادیو، دو رادیو و سه رادیو» را به ترتیب با $A_۳, A_۳, A_۲, A_۰$ و پیشامدهای «نداشتن تلویزیون ،داشتن یک تلویزیون و دو تلویزیون» را به ترتیب با $B_۲, B_۱, B_۰$ نشان دهیم، به آسانی می‌توان نشان داد A_iها با B_jها دو به دو مستقل از هم هستند. بنابراین حتی بدون انجام محاسبات و با توجه به مطلب فوق «داشتن رادیو» یعنی $\bigcup_{i=1}^{۳} A_i$ از پیشامد «داشتن تلویزیون» یعنی $\bigcup_{j=1}^{۲} B_j$ مستقل خواهد بود.

اکنون با تغییر در داده‌های جدول شماره۱ حالتی را در نظر می‌گیریم که دو پیشامد A و B از همدیگر مستقلند ولی با این وجود می‌توان زیر پیشامدهایی از A و B را یافت بطوریکه از هم مستقل نباشند. به همین منظور تحویل یافته جدول شماره۱ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم

جدول شماره۲:

Y / X	۰	۱	۲	۳
۰	۶۰	۱۸۰	۴۵	۱۵
۱	۲۰۰	۱۵۰	۶۰۰	۵۰
۲	۱۴۰	۴۲۰	۱۰۵	۳۵

همانطوریکه ملاحظه می‌شود پیشامد «داشتن رادیو» اجتماعی از سه پیشامد $(\bigcap_{i=1}^{۳} A_i)$ وپیشامد «داشتن تلویزیون» نیز اجتماعی از دو زیر پیشامد $(\bigcap_{j=1}^{۲} B_j)$ است بنابراین:

$$P(\bigcup_{i=1}^{۳} A_i) = \frac{۱۶۰۰}{۲۰۰۰} = ۰/۸$$

$$P(\bigcup_{j=1}^{۲} B_j) = \frac{۱۷۰۰}{۲۰۰۰} = ۰/۸۵$$

$$P(\bigcup_{i=1}^{۳} A_i).P(\bigcup_{j=1}^{۲} B_j) = ۰/۶۸$$

$$P((\bigcup_{i=1}^{۳} A_i)\bigcap(\bigcup_{j=1}^{۲} B_j) = \frac{۱۳۶۰}{۲۰۰۰} = ۰/۶۸$$

یعنی دو پیشامد از هم مستقلند ولی اگر پیشامدهای «داشتن دو رادیو» و «داشتن یک تلویزیون» به عنوان زیر پیشامدهایی از «داشتن رادیو» و «داشتن تلویزیون» در نظر گرفته شوند،خواهیم داشت

$$P(A_۲) = \frac{۷۵۰}{۲۰۰۰} = ۰/۳۷۵$$

$$P(B_۱) = \frac{۱۰۰۰}{۲۰۰۰} = ۰/۵$$

$$P(A_۲).P(B_۱) = ۰/۱۸۷۵$$

$$P(A_۲ \cap B_۱) = \frac{۶۰۰}{۲۰۰۰} = ۰/۳$$

یعنی دو زیر پیشامد فوق از هم مستقل نیستند.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-08-02]