

کاربرد فرآیندهای ایستای گوسی در بررسی پدیده خستگی

سیده زهرا آقامحمدی، احمدرضا سلطانی^۱

چکیده

این مقاله، کاربرد آمار و فرآیندهای تصادفی را همزمان در مهندسی مواد به نمایش می‌گذارد. نقش توزیعهای وایبل^۲ و رالی^۳ و رفتار مسیرهای یک فرآیند ایستا، فراوانی نقاط ماکزیمم و می‌نیمم، و نقاط برخورد مسیر با محور افقی (تعداد صفرهای مسیر) را در مطالعه پدیده خستگی ماده بر اثر تنش محیط بیان می‌دارد. در نگارش این مقاله از مراجع [۲]، [۳] و [۶] استفاده شده است.

مقدمه

در ابتدا، همانطور که از عنوان موضوع دیده می‌شود لازمست که برخی اصطلاحات مربوط به مهندسی مواد برای آشنایی بیشتر آورده شود:

(۱) تنش (Stress): نسبت مقدار نیرو بر مساحت سطحی که نیرو بر آن اعمال می‌شود تنش نام دارد، و با σ نمایش داده می‌شود.

(۲) کرنش (Strain): در اثر اعمال نیروی کششی F بر جسم، مقداری تغییر در طول رخ می‌دهد، اگر طول ابتدا L_0 و سپس به L_1 افزایش یابد، مقدار کرنش ϵ ، عبارتست از:

$$\epsilon = \frac{L_1 - L_0}{L_0}$$

کرنش کمیتی بدون واحد است و بر حسب درصد بیان می‌شود.

تنش با واحد پاسکال (Pa) که برابر مترمربع/نیوتن است

^۱ سیده زهرا آقامحمدی، احمدرضا سلطانی؛ بخش آمار، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز

^۲ Weibull

^۳ Raleigh

چرخه‌های تنش:

با توجه به میزان نیروی اعمالی از نوع کششی یا فشاری، چرخه‌های تنش شکل می‌پذیرد. جهت مثبت محور عمودی تنش از نوع کششی و جهت منفی محور تنش از نوع فشاری است.

چرخه: یک دوره تناوبی کامل را گویند.

ابتدا تعریف مختصری از انواع کلی تنش‌های نوسانی که باعث خستگی می‌شوند را بیان می‌کنیم:

σ_{max} : تنش بیشینه σ_{min} : تنش کمینه

$\sigma_r = \sigma_{max} - \sigma_{min}$: دامنه تنش

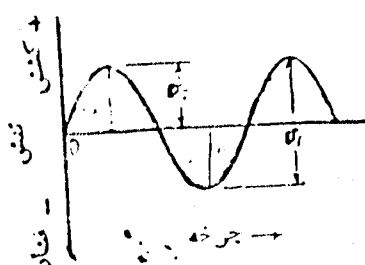
$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}$: میانگین تنش

$$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{2}$$

الف - تنش معکوس: "Reversed Stress" این حالت یک

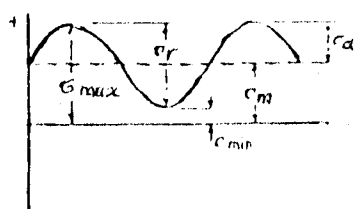
حالت آرمانی است و تقارن و تناوب کامل در چرخه‌های

تنش وجود دارد، یعنی $\sigma_{max} = \sigma_{min}$.



ب - تنشهای تکرارشونده: "Repeated Stress" چرخه کاملاً

متناوب است و لزوماً متقارن نیست.



در این نمودار هر دو تنش کششی اند ولی در یک چرخه

تنش تکراری، تنش‌ها می‌توانند هر دو فشاری و یا

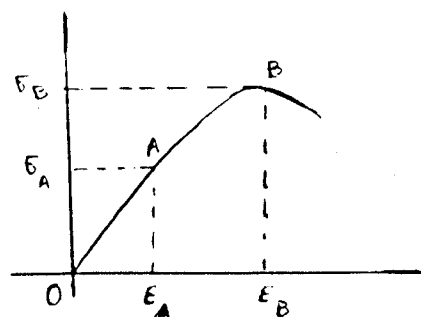
(۳) منحنی تنش-کرنش ($\sigma - \epsilon$): رفتار مواد مختلف (یعنی

میزان و نحوه کرنش کردن آنها) در برابر تنشی که به آنها وارد می‌شود متفاوت است. برای نشان دادن چگونگی

این رفتار از منحنی‌های تنش-کرنش استفاده می‌شود.

این منحنی دارای اشکال متفاوتی است، اما بطور کلی و

برای اغلب مواد نمایش زیر را دارد.



از نقطه O تا نقطه A، هرگاه تنش از جسم برداشته شود،

طول جسم به مقدار اولیه خود بازمی‌گردد و هیچ تغییر

طول پایداری در جسم بوجود نمی‌آید، نقطه A را حد

الاستیک و σ_A را تنش تسلیم می‌نامند. از نقطه A به

بعد ماده وارد منطقه پلاستیک می‌شود، یعنی اگر در

محدود AB تنش از جسم برداشته شود آنگاه بخشی

از تغییر طول که مربوط به تغییر شکل الاستیک بوده

حذف می‌شود اما بخشی از تغییر طول که مربوط به

منطقه پلاستیک بوده در ماده باقی می‌ماند از A تا B را

محدوده تغییر شکل پلاستیک می‌نامند و نقطه B را حد

استحکام کششی گویند.

اگر تنش از σ_B بیشتر شود، جسم شکسته خواهد شد.

بنابراین برای شکست در جسم، باید تنش اعمالی از σ_B

بزرگتر باشد. این موضوع تنها مربوط به حالتی است که

نیرو بصورت استاتیکی اعمال شود، یعنی نیرو در یک

راستا وارد شود. در تنشهای کمتر از σ_A نیز شکست رخ

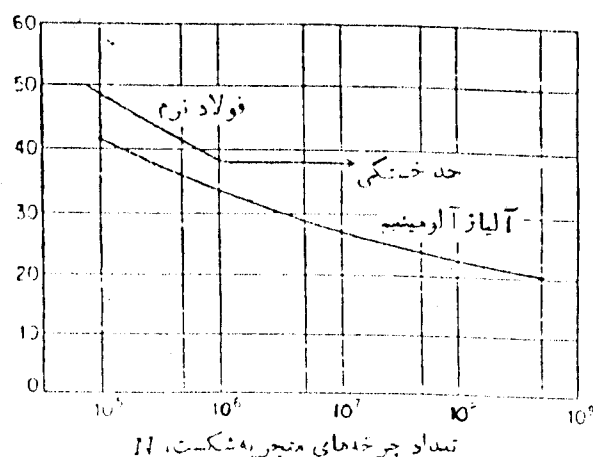
می‌دهد.

در حقیقت خستگی، رخ دادن شکست، در اثر اعمال

نیروهای تکراری (پیایی) می‌باشد، و حداکثر تنش

اعمالی در هر نوبت می‌تواند از σ_A بسیار کمتر باشد.

هستند. از نمودار مربوطه می‌توان دریافت که هرچه تنش کاهش یابد، تعداد چرخه برای انهدام افزایش می‌یابد. در مورد فولادها و آلیاژهای تیتانیوم پس از طی یک مقدار چرخه مشخص در تنش‌های پایین، منحنی S - N حالت افقی پیدا می‌کند که به آن حد خستگی می‌گوییم و این حد بیانگر آن است که در تنش‌های پایین‌تر از آن، جسم دیگر تحت هیچ تعداد چرخه نمی‌شکند.



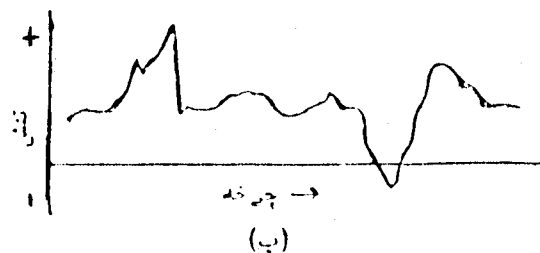
منحنی S-N

ماهیت آماری خستگی:

به علت شرایط آزمایشگاه، نحوه اعمال تنش و نوع تنش و دما و ... به تحلیل‌های آماری داده‌های خستگی و دلایل تغییرپذیری نتایج آزمایش‌های خستگی، توجه زیادی معطوف شده‌است. باید توجه داشت که چون عمر خستگی و حد خستگی، کمیت‌هایی آماری‌اند و از منحنی میانگین یا S - N که فقط توسط چند جسم تعیین شده‌است بدست می‌آیند استنباط قابل توجهی نمی‌توان انجام داد، در نتیجه روش اصلی برای بیان داده‌های خستگی، یک نمودار سه بعدی بصورت زیر خواهد بود که رابطه بین تنش تعداد چرخه‌های لازم برای شکست و احتمال را نشان می‌دهد.

یکی فشاری، دیگری کششی باشد و لزومی ندارد که $\sigma_{max} = \sigma_{min}$ باشد.

پ- تنش‌های بی‌قاعده یا تصادفی: "irregular or random stress" در این حالت چرخه تنش، نامتقارن و نامتناوب است که نوسانات موضعی در آن دیده می‌شود.



این نوع تنش، در قطعه‌ای مانند بال هواپیما دیده می‌شود و این حالتی است که تنش‌های وارده به جسم منطق خاصی ندارد. هر لحظه امکان وارد شدن یکی از سه نوع تنش وجود دارد (در واقع تنش‌های متناوب و متغیر با زمان).

تنش پس‌ماند: تنشی است که در جسم وجود دارد و شرایط غیر تعادلی را در جسم بوجود می‌آورد. اگر جسمی را از دو طرف بکشیم و مقاومت نشان داده شکسته نشود، مقداری از این تنش در جسم باقی می‌ماند و ممکن است در اثر تجمع تنش‌های متوالی آتی جسم به راحتی شکسته شود. تنش‌های پس‌ماند گاهی در جهت تخریب و گاهی در جهت استحکام جسم عمل می‌کند.

منحنی S - N: روش اصلی برای ارایه داده خستگی در مهندسی، استفاده از منحنی‌های S - N است. این منحنی در واقع منحنی تنش S بر حسب تعداد چرخه لازم تا انهدام، N، است. در این منحنی‌ها همیشه محور افقی، تعداد چرخه بر اساس مقیاس لگاریتمی است و مقدار تنش یکی از مقادیر σ_{min} , σ_{max} , σ_a می‌باشد. یک منحنی بصورت شماتیک بصورت شکل زیر است.

خستگی در چرخه‌های بیشتر از 10^5 را خستگی در چرخه‌های زیاد و در کمتر از 10^5 را خستگی در چرخه‌های کم گویند. تنش‌ها اعمال شده برای خستگی، در حد الاستیک

(۱) شروع ترک

(۲) رشد ترک روی صفحاتی با تنش کششی زیاد

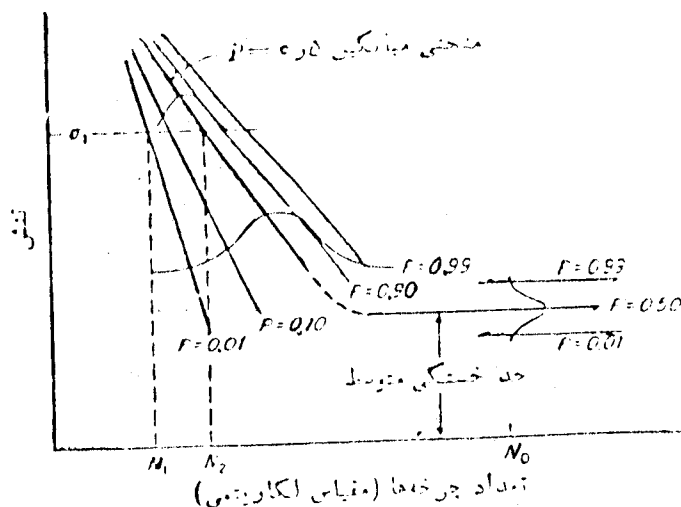
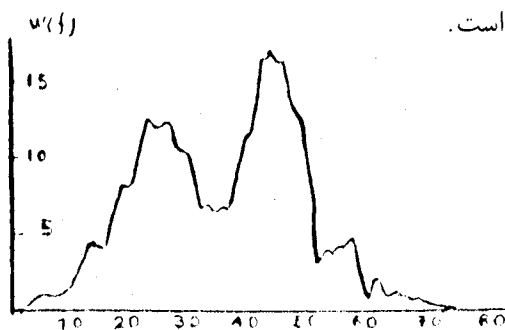
(۳) شکست نهایی

مهمترین علت شکست سازه‌های فلزی و اجزاء مکانیکی که در معرض تنش‌های نوسانی قرار می‌گیرند پدیده خستگی است. با توجه به عوامل گوناگون در پدیده خستگی، اخیراً روشهای طراحی بر مبنای علم آمار و احتمال گسترش یافته است و امکان دستیابی به روشها و راه‌حلهای منطقی برای برخورد با متغیرهای پدیده خستگی را بوجود آورده است.

هدف از این تحقیق، گسترش یک روند برای طراحی و مطالعه خستگی قطعاتی است که در معرض فرآیند تنشی ایستا "stationary process" و برگشت‌پذیر "ergodic" قرار می‌گیرند. این فرآیند تنشی در حالت کلی می‌تواند بصورت دامنه نامحدود "Wide band" باشد. چنین روندی برای سازه‌های زمینی، دریایی، فضایی، اسکله‌ها و ... قابل استفاده است. کارهای اخیر محققین در مورد طراحی خستگی، شامل کارهایی است که نولت "Nolte" و هانس‌فورد "Hansford" روی اسکله‌ها و وتزل "wetzel" روی سازه‌های ماشین‌ها و انگ "Ang" و مونس "Munse" روی پلها و دیتر "Dieter" روی متالورژی مکانیکی (مرجع شماره ۱) انجام داده‌اند.

شاخص‌های مسیر فرآیند خستگی:

فرض می‌کنیم $X(t)$ یک فرآیند گوسی ایستا با تابع چگالی طیفی $W(f)$ باشد. یک جسم از $W(f)$ در شکل زیر نشان داده شده است.



مثلاً در تنش σ_1 انتظار می‌رود که یک درصد نمونه‌ها در N_1 چرخه بشکنند.

دلایل خستگی و خصوصیات ساختاری خستگی:

هیچگونه تغییر واضحی در ساختار فلزی که به علت خستگی می‌شکند وجود ندارد تا بتوان به عنوان مدرکی برای شناخت دلایل شکست خستگی از آن استفاده کرد. با پیشرفت صنعت و افزایش وسایلی از قبیل خودرو، هواپیما، کمپرسور و ... چنین برداشت می‌شود که عامل حداقل ۹۰ درصد شکست‌های ناشی از دلایل مکانیکی حین کار، خستگی می‌باشد.

دلیل عمده خطرناک بودن شکست خستگی این است که بدون آگاهی قبلی و قابل رؤیت بودن رخ می‌دهد. سه عامل عمده برای وقوع شکست خستگی وجود دارد: (۱) تنش کششی حداکثر به مقدار زیاد (۲) تغییرات به حد کافی زیاد یا نوسانی در تنش وارده، (۳) زیاد بودن چرخه‌های تنش وارده. علاوه بر این، متغیرهای دیگری مانند تمرکز تنش، خوردگی، دما، بار اضافی، تنشهای باقی‌مانده و ... شرایط را برای ایجاد خستگی تقویت می‌کنند.

در مطالعات تغییرات ساختاری اصلی، فرآیند خستگی به مراحل زیر تقسیم می‌شود:

اگر $0 < \alpha \leq 1$ ، $\alpha = 1$ گوئیم $X(t)$ دارای دامنه محدود است و اگر $\alpha \neq 1$ دامنه $X(t)$ نامحدود است. طریقه محاسبه α به صورت زیر است.

شکل ۱- a یک جسم $X(t)$ از فرآیند ایستای گوسی و خط $x(t) = \xi$ (که ξ را آستانه گویند) را نشان می‌دهد. شکل ۲- a نمودار

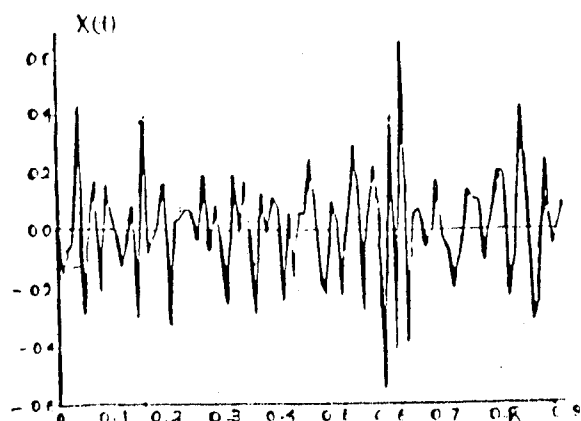
$$Y(t) = I[X(t) - \xi]$$

است که تابع پله‌ای $I[\]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Y(t) = \begin{cases} 0 & X(t) > \xi \\ \frac{1}{\gamma} & X(t) = \xi \\ 0 & X(t) < \xi \end{cases}$$

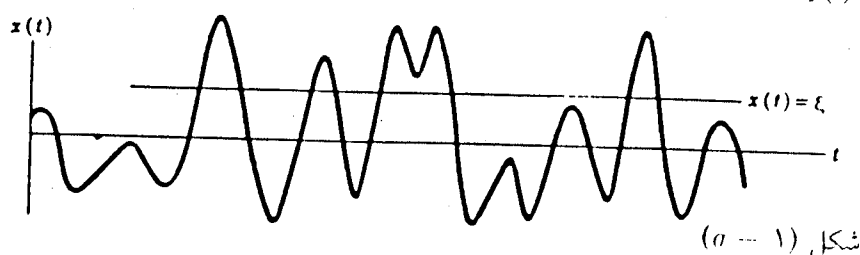
شکل ۳- a نمودار $\dot{Y}(t)$ ، مشتق $Y(t)$ نسبت به t می‌باشد:

$$\dot{Y}(t) = \dot{X}(t)[X(t) - \xi]$$

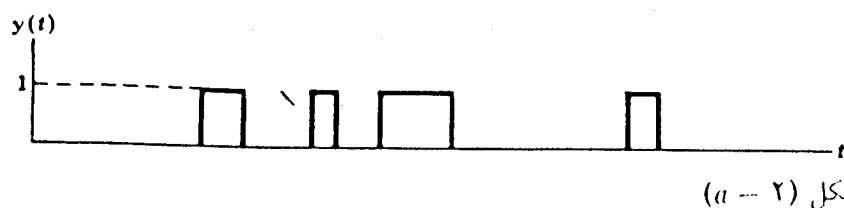


را $\sigma_x = \sigma_X$ ، $X(t)$ را $\sigma_Y = \sigma_{\dot{X}}$ ، $\dot{X}(t)$ را $\sigma_Y = \sigma_{\dot{X}}$ معیار $\dot{X}(t)$ در نظر می‌گیریم و $m_0 = E[M_T(t)]$ را امید ریاضی مجموع ماکزیمم‌های موضعی و $n_0 = E[N_+(\infty)]$ را امید ریاضی تعداد تقاطع‌های محور t ریشه‌های حقیقی فرآیند، تعریف می‌کنیم. یکی از شاخص‌های شکل طیف ضریب بی‌قاعدگی (بی‌نظمی) α است،

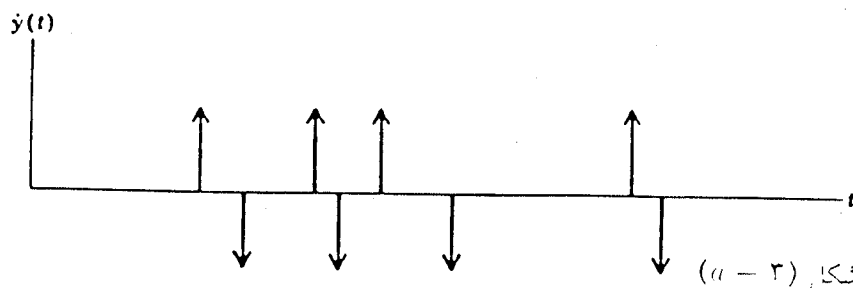
$$\alpha = \frac{n_0}{m_0} = \frac{E[N_+(\infty)]}{M_T(t)} \quad (1)$$



شکل (۱- a)



شکل (۲- a)



شکل (۳- a)

در جایی که آستانه ξ ما صفر باشد ($y = 0$) مسأله به تقاطع صفر "Zero crossing" مشهور است، پس امید ریاضی تعداد تقاطعهای صفر از پایین به عبارت زیر تبدیل می‌شود.

$$E[N + (0)] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X}$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{XX}(\omega) d\omega$$

$$\sigma_Y^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \phi_{XX}(\omega) d\omega$$

توزیع ماکزیم‌های موضعی:

یک ماکزیم موضعی در تابع $X(t)$ زمانی اتفاق می‌افتد که مشتق اول $\dot{X}(t)$ صفر و مشتق دوم $\ddot{X}(t)$ منفی باشد. چنین اطلاعاتی در مورد توزیع ماکزیم‌های موضعی از $X(t)$ ، بوسیله توزیع توأم $X(t)$ ، $\dot{X}(t)$ ، $\ddot{X}(t)$ بدست می‌آید، بنابراین فرض می‌کنیم که $X(t)$ حداقل تا مرتبه دوم مشتق‌پذیر باشد. تعداد ماکزیم‌های موضعی بوسیله m و تعداد ماکزیم‌های موضعی در واحد زمانی، توسط M نشان داده می‌شود.

امید تعداد ماکزیم‌های موضعی در $X(t)$ درون یک فاصله زمانی $[t_1, t_2]$.

$$E[m(\xi, t_1, t_2)] = \int_{t_1}^{t_2} E[M(\xi, t)] dt$$

$$E[M(\xi, t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} d\dot{x}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_{\{X\}\{\dot{X}\}\{\ddot{X}\}}(x, \dot{x}, \ddot{x}, t) \times \ddot{x} \delta(\dot{x}) I[x - \xi] d\ddot{x}$$

$$= - \int_{\xi}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} p_{\{X\}\{\dot{X}\}\{\ddot{X}\}}(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}$$

امید مجموع تعداد ماکزیم‌های موضعی در واحد زمانی از معادله بالا توسط تبدیل ξ به $-\infty$ بدست می‌آید.

$$E[M_T(t)] = - \int_{-\infty}^{\infty} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} p_{\{X\}\{\dot{X}\}\{\ddot{X}\}}(x, 0, \ddot{x}, t) d\ddot{x}$$

تعریف می‌کنیم $\pi(\xi, t_1, t_2)$ فرآیند شمارشی باشد که تعداد برخورد فرآیند $X(t)$ با خط ξ ، درون فاصله زمانی $[t_1, t_2]$ را می‌شمارد، در نتیجه

$$\pi(\xi, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{X}(t)| \delta[X(t) - \xi] dt$$

اگر

$$N(\xi, t) = |\dot{X}(t)| \delta[X(t) - \xi]$$

در صورت وجود $E(N(\xi, t))$ داریم:

$$E(N(\xi, t)) = \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}| p_{X(t), \dot{X}(t)}(\xi, \dot{x}, t) d\dot{x}$$

که $p_{X(t), \dot{X}(t)}$ چگالی توأم $X(t)$ ، $\dot{X}(t)$ است. تابع کوواریانس $N(\xi, t)$ بصورت زیر می‌باشد.

$$\Phi_{NN}(\xi, t_1, t_2) = E[N(\xi, t_1) N(\xi, t_2)]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\dot{x}_1| |\dot{x}_2| p_{X(t_1), \dot{X}(t_1)}(\xi, \dot{x}_1, t_1) p_{X(t_2), \dot{X}(t_2)}(\xi, \dot{x}_2, t_2) d\dot{x}_1 d\dot{x}_2$$

در صورت ایستا بودن فرآیند $X(t)$ ،

$$(X(t), \dot{X}(t)) \stackrel{d}{=} (X(s), \dot{X}(s))$$

در نتیجه چگالی توأم $(X(t), \dot{X}(t))$ مستقل از t است. لذا $N(\xi, t)$ نیز ایستا است. در حالت‌های خاصی تنها اطلاع در مورد تقاطع آستانه ξ از پایین نیاز است. پس

$$E[N_+(\xi, t)] = \int_0^{\infty} \dot{x} p_{\{X\}\{\dot{X}\}}(\xi, \dot{x}, t) d\dot{x}$$

در اینجا چون $X(T)$ فرآیند ایستای گوسی با میانگین صفر می‌باشد، پس $X(t)$ و $\dot{X}(t)$ مستقل از یکدیگر و تابع توأمشان بصورت زیر است.

$$p_{\{X\}\{\dot{X}\}}(x, \dot{x}) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_{\dot{X}}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_X^2} - \frac{\dot{x}^2}{2\sigma_{\dot{X}}^2}\right)$$

با جایگزینی معادله بالا داریم:

$$E[(N + (\xi))] = \frac{1}{2\pi} \frac{\sigma_{\dot{X}}}{\sigma_X} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\sigma_X^2}\right)$$

است.

امید مجموع تعداد ماکزیمم‌های موضعی در واحد زمان
بوسیله جایگزینی (۳) در (۴) بدست می‌آید.

$$E[M_T(t)] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_T}{\sigma_Y}$$

در نتیجه

$$\alpha = \frac{E[N + (\circ)]}{E[M_T]} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_T}{\sigma_Y}}{\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sigma_T}{\sigma_Y}} = \frac{\sigma_Y^2}{\sigma_X^2}$$

فرض می‌شود تنش‌های اعمالی به فرآیند تصادفی (متغیر و متناوب با زمان، که همان سومین نوع تنش توضیح داده شده می‌باشد) در حد الاستیک بوده و تنها خستگی تحت چرخه‌های بالا مورد توجه می‌باشد و تنشهای پس‌ماند وجود ندارد و نیز در فرآیند $n, X(t), t \in (\circ, T)$ را متغیر تصادفی که نمایانگر تعداد چرخه‌های تنشی در طول عمر T است در نظر می‌گیریم. بزرگیهای (دامنه) چرخه تنش را با متغیر تصادفی S که دارای تابع چگالی احتمال $f_S(s)$ می‌باشد بیان می‌کنیم.

رفتار خستگی:

داده‌ها و اطلاعات زیادی در مورد بسیاری از فلزات برای حالتی که این مواد دچار خستگی با چرخه‌هایی با بزرگی ثابت می‌شوند، وجود دارد. از طرف دیگر برای حالتی که خستگی در اثر چرخه‌های تصادفی رخ می‌دهد داده‌های زیادی وجود ندارد. بعلاوه، بسط و گسترش یک مدل مهندسی که بیانگر خستگی در اثر ایجاد و پیشرفت ترک در اثر چرخه‌های تصادفی باشد مشکل است. رویکرد کلی و عمومی در این باره (یعنی درباره حالت خستگی تحت چرخه‌های تصادفی)، استفاده از اطلاعات مربوط به حالت چرخه‌هایی با بزرگی ثابت به همراه استفاده از قاعده تجمع تخریب خطی می‌باشد (قاعده تجمع

تابع توزیع ماکزیمم‌های موضعی در زمان t

$$F_E(\xi, t) = p[E(t) \leq \xi] = 1 - E\left[\frac{M(\xi, t)}{M_T(t)}\right] \quad (2)$$

فرض استقلال

$$\left[\frac{M(\xi, t)}{M_T(t)}\right], [M_T(t)]$$

بیان می‌کند که:

$$F_E(\xi, t) = 1 - \frac{E[M(\xi, t)]}{E[M_T(t)]}$$

تابع چگالی ماکزیمم‌های موضعی بر اساس فرض استقلال،
بوسیله مشتق از عبارت (۲) بدست می‌آید.

$$p_E(\xi, t) = -\frac{1}{E[M_T(t)]} \frac{\partial}{\partial \xi} E[M(\xi, t)] \\ = -\frac{1}{E[M_T(t)]} \times \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{x} p_{\{X\}\{\dot{X}\}\{\ddot{X}\}}(\xi, \circ, \ddot{x}, t) d\ddot{x} \quad (3)$$

ماتریس کوواریانس $X(t)$ و $\dot{X}(t)$ و $\ddot{X}(t)$ بصورت:

$$S = \begin{bmatrix} \sigma_X^2 & \circ & -\sigma_{\dot{X}}^2 \\ \circ & -\sigma_{\dot{X}}^2 & \circ \\ -\sigma_{\dot{X}}^2 & \circ & -\sigma_{\ddot{X}}^2 \end{bmatrix}$$

می‌باشد.

جاییکه σ_X^2 و $\sigma_{\dot{X}}^2$ و $\sigma_{\ddot{X}}^2$ از تابع همبستگی $\phi_{XX}(\omega)$ از $X(t)$ محاسبه می‌شوند.

$$\sigma_X^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{XX}(\omega) d\omega$$

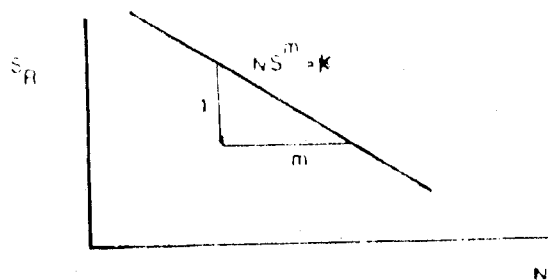
$$\sigma_{\dot{X}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \Phi_{XX}(\omega) d\omega$$

$$\sigma_{\ddot{X}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \omega^4 \Phi_{XX}(\omega) d\omega$$

$$p_{\{X\}\{\dot{X}\}\{\ddot{X}\}}(x, \circ, \ddot{x}) = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{\frac{1}{2}} |S|^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2|S|} (\sigma_{\dot{X}}^2 \sigma_{\ddot{X}}^2 x^2 + 2\sigma_{\dot{X}}^4 x\ddot{x} + \sigma_{\dot{X}}^2 \sigma_{\ddot{X}}^2 \ddot{x}^2)\right] \quad (4)$$

جاییکه

$$|S| = \sigma_X^2 \sigma_{\dot{X}}^2 \sigma_{\ddot{X}}^2 - \sigma_{\dot{X}}^4 \\ = \sigma_{\ddot{X}}^2 (\sigma_X^2 \sigma_{\dot{X}}^2 - \sigma_{\dot{X}}^4)$$



به این ترتیب معادله (۵) به فرم زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} D &= n \int \frac{1}{k(\Psi Y^\phi)^{-m}} f_Y(y) dy \\ &= \frac{n}{k} \Psi^m \int \frac{y^{\phi m} dy}{\theta e^{-\frac{y}{\theta}}} \\ z &= \frac{y}{\theta} \Rightarrow \sqrt{2} \theta z = y \\ dz &= \frac{y}{\theta} dy \\ &= \frac{n}{k} \Psi^m \int (\sqrt{2} \theta z)^{\frac{\phi m}{2}} e^{-z} dz \\ &= \frac{n}{k} \Psi^m \delta^{\phi m} \Gamma(1 + \frac{m\phi}{2}) \end{aligned} \quad (8)$$

در حالت خاصی که $X(t)$ فرآیند گوسی با دامنه محدود $(\alpha = 1)$ باشد، S دارای توزیع رالی است و با محاسباتی به مانند بالا، معادله (۸) را می‌توان بصورت

$$D = \frac{n}{k} (2\sqrt{2}\delta x)^m \Gamma(1 + \frac{m}{2}) \quad (9)$$

نوشت.

مهمترین هدف:

مهمترین هدف در این مقاله، بدست آوردن $f_S(s)$ برای حالتی که $X(t)$ گوسی با دامنه نامحدود است می‌باشد. دومین نکته بررسی شده در این باره، امکان ساده کردن تعریف خستگی از طریق مشخص کردن فرکانس موجود در $X(t)$ بوسیله α ، یعنی یک عدد حقیقی، به جای تابع $W(f)$ است.

فرضیات پالم گرن-ماینر^۴

بر مبنای فرضیات پالم گرن-ماینر (پ-م) شکست، زمانی

تخریب خطی در ادامه بحث گفته می‌شود). بنابراین لازمست که بتوانیم چرخه تنش معادل (یعنی بزرگی (دامنه) چرخه تنش معادل و تعداد چرخه‌های آن را) محاسبه کنیم، که برای این کار از روش ریزش باران استفاده می‌شود.

قاعده تجمع تخریب خطی:

تخریب پس از n چرخه تنشی را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$D = n \int_0^\infty \frac{f_S(s)}{N(s)} ds \quad (5)$$

که $N(s)$ تعداد چرخه‌های لازم برای رخ دادن شکست در آزمایش با محدوده تنشی S می‌باشد. معادله (۵) را می‌توان بصورت

$$D = n E\left(\frac{1}{N(s)}\right) \quad (6)$$

نیز نوشت.

شکلی برای D بوسیله نولت "Nolte" و هانس فورد "Hansford" بر مبنای فرضیات زیر ارایه شده‌است.

(۱) بار اعمالی، بصورت یک متغیر تصادفی با دامنه Y بوده که Y دارای توزیع وایبل با پارامترهای (ξ, δ) می‌باشد. تابع توزیع Y به شکل زیر است.

$$F_Y(y) = 1 - \exp\left\{-\left(\frac{y}{\delta}\right)^\xi\right\} \quad (7)$$

(۲) تبدیل از Y به دامنه تنش S به شکل زیر فرض می‌شود:

$$S = \Psi Y^\phi$$

(۳) منحنی خستگی شکل (۲) بصورت خطی (با محورهای با مقیاس لگاریتمی) و به شکل زیر می‌باشد،

$$N(S) = K S^{-m}$$

و برای همه مقادیر $S > 0$ برقرار است.

از $X(t)$ ، چندین روش محاسبه چرخه پیشنهاد شده است اما روشهایی که به نظر می‌رسد دقیق‌ترین پیش‌بینی را در مورد رفتار مواد آرایه می‌دهد روشهای ریزش باران و الگوریتم محاسبه چرخه پیشنهاد شده بوسیله وتزل "Wetzel" می‌باشد. ارزش این روش این است که آنچه در یک رشته تنش پیچیده رخ می‌دهد را با حالت خستگی در اثر چرخه با بزرگی ثابت، مطابق می‌کند و ایراد اساسی این روش این است که از پیوستگی اعمال تنش چشم‌پوشی می‌کند.

روش ریزش باران، برای محاسبه بزرگیهای چرخه تنش یعنی S_i و همچنین محاسبه n از طریق مسیر $X(t)$ بکار می‌رود. بدین ترتیب که مسیر $X(t)$ را نقطه‌ای کرده و آن را تبدیل به ماکزیمم‌های موضعی و شکافها می‌کنند (شکل ۴)، محور زمان در جهت عمودی و جهت مثبت آن به طرف پایین می‌باشد. با توجه به شکل، فرآیند را به صورت یک سری سقفهای متوالی که باران روی آنها می‌بارد در نظر بگیرید. مسیرهای جاری شدن باران بر اساس قواعد زیر معین می‌شود.

(۱) یک مسیر جریان باران از هر فراز و هر فرودی شروع می‌شود.

(۲) هنگامیکه مسیر جریان باران شروع می‌شود، از یک شکاف به طرف نقطه فراز، این جریان در صورتیکه شکاف مقابل نسبت به شکاف آغاز در مسیر مورد نظر منفی باشد، متوقف می‌گردد (به عنوان مثال مسیرهای [۸-۱] و [۹-۱۰] در شکل ۴).

همچنین، جریان چنانچه از یک ماکزیمم موضعی شروع شود بوسیله ماکزیمم موضعی دیگری که نسبت به ماکزیمم موضعی آغازین مثبت باشد متوقف می‌گردد (مثلاً [۲-۳] و [۴-۵] و [۶-۷] در شکل ۴).

(۳) اگر بارانی که از یک سقف فرو می‌ریزد جریان مسیر قبلی را قطع کند، این جریان متوقف می‌شود (مثلاً [۳-۳a] و [۵-۵a] در شکل ۴).

(۴) یک مسیر جدید آغاز نمی‌شود تا زمانی که مسیری که قبلاً

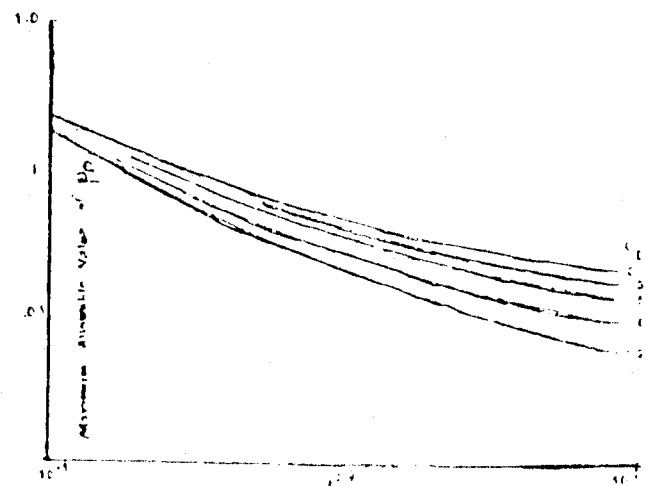
در جسم رخ می‌دهد که $D = 1$. به هر حال، این موضوع روشن است که قاعده (پ-م) در آرایه یک پیش‌بینی دقیق رفتار خستگی ناموفق است، با این حال به نظر می‌رسد این قاعده به مراتب ساده‌تر از سایر روشهای پیشنهادی است. ورشینگ "Wirsching" و یائو "Yao" یک رویه برخورد با مسئله خستگی ناشی از چرخه‌هایی تصادفی را آرایه کرده‌اند. بدین ترتیب که Δ را برابر مقدار D در لحظه شکست تعریف کرده و به صورت یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال لگاریتمی $(\mu_\Delta, \delta_\Delta = 1)$ مدل‌سازی کرده‌اند. فرضیات آنها، بر مبنای ترکیب کردن نتایج بدست آمده از آزمایشهای محققین بدست آمده است. بدین ترتیب، احتمال شکست یعنی P_f به صورت

$$p_f = p(D \geq \Delta) \quad (10)$$

تعریف شده است.

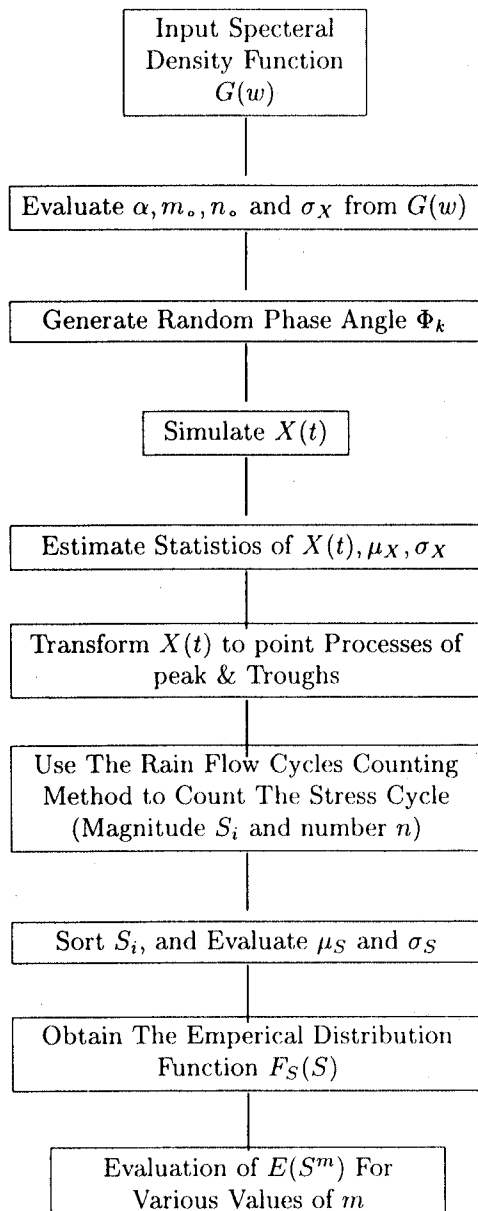
فرض کنیم که D نیز یک متغیر تصادفی با توزیع نرمال لگاریتمی باشد و نیز اینکه p_f ، تابعی از μ_d و C_D (ضریب تغییرات D) باشد که از شکل ۳ بدست می‌آید.

به عنوان مثال، چنانچه لازمه طراحی $10^{-3} \leq p_f$ باشد و با فرض $C_D = 0.5$ باید $\mu_D = 0.04$ باشد.

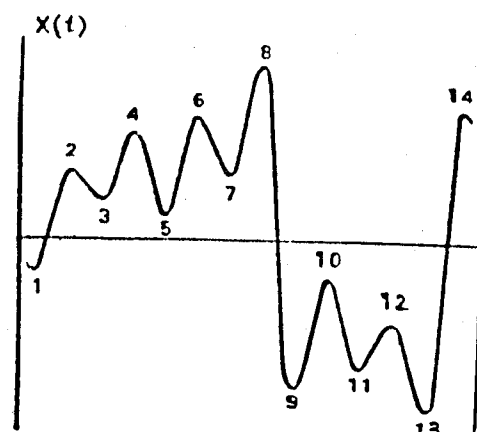
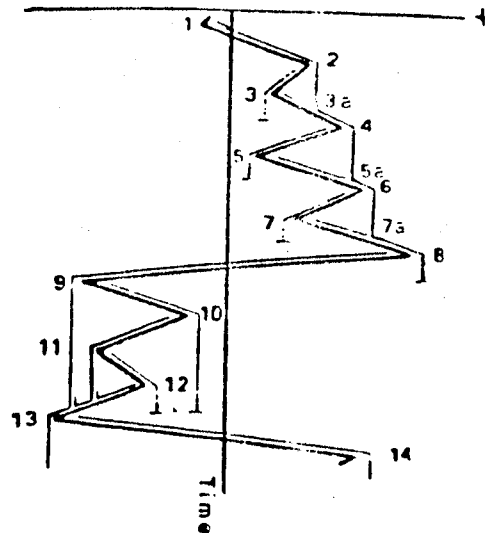


روش ریزش باران برای محاسبه دوره:

برای بکار گرفتن قاعده پ-م، یا حالت بهسازی شده آن در مورد یک فرآیند $X(t)$ ، لازمست که توزیع آماری S و n را بدانیم. برای بدست آوردن نمونه‌ای از S و n از یک مسیر



مورد نظر بوده است، متوقف شود. نیم چرخه‌های شکاف که مقادیر بزرگیهای دامنه تنشی را باعث شده‌اند، یعنی S_i باید به فواصلی روی محور تنش تصویر شوند (مثلاً $[۱-۸]$ و $[۳-۳a]$ در شکل زیر).



شبیه سازی:

به لحاظ پیچیدگی روش ریزش باران، بدست آوردن $f(s)$ از $u(f)$ بسیار مشکل است. بدین حال، روش مونت کارلورا می‌توان برای ساده کردن $X(t)$ و تقریب $f(s)$ بکاربرد، یک برنامه کامپیوتری که توانایی‌های آن در شکل (۵) نشان داده شده ارایه و گسترش یافته‌است.

با یک $W(f)$ اختیاری داده شده، شکل کلی شبیه‌سازی شده $X(t)$ ، به صورت زیر (۱۰) می‌باشد. بطور مثال برای تابع چگالی داده شده زیر، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

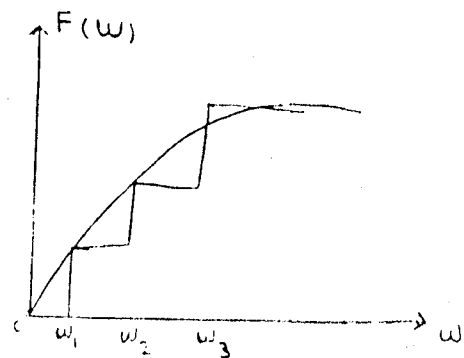
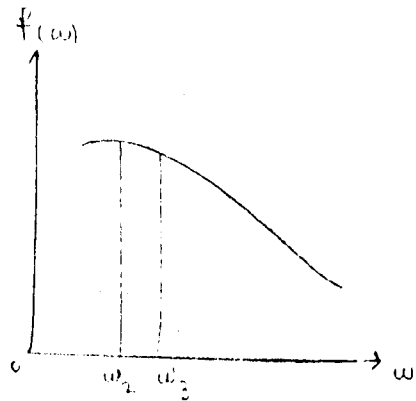
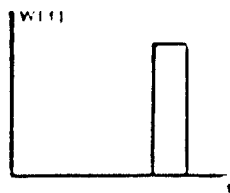
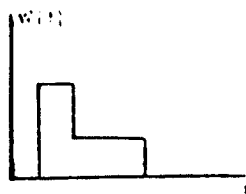
در فرمول (۱۱) $G(\omega)$ تابع چگالی طیفی بر حسب فرکانس ω می باشد، که بر حسب $\frac{W(f)}{2\pi}$ یعنی $\frac{\text{رادیان}}{\text{ثانیه}}$ فرکانس $G(\omega) = \frac{W(f)}{2\pi}$ در محدوده $(0, \omega_u)$ تعریف می شود، با قسمتهایی که طول هر کدام برابر $\Delta\omega_k$ می باشد. چنانچه

$$\omega_u = \sum_{k=1}^j \Delta\omega_k \quad (12)$$

ϕ یک زاویه فاز تصادفی است که به طور یکسان در محدوده $(0, 2\pi)$ توزیع شده است. تعداد مؤلفه های هارمونیک J ، اختیاری است، اما در این تحقیق مقادیر $12 < J < 20$ استفاده شده است. به هر حال مشخص شد که $J = 20$ برای بدست آوردن نتایج مناسب، قابل قبول است. پس از اینکه $X(t)$ برای طول عمر T شبیه سازی شد، به نقاط ماکزیمم موضعی و شکاف تبدیل می شود و بعد به روش چرخه ریزش باران مقادیر S_i و n بدست می آید.

نتایج:

شبیه سازی $X(t)$ برای یازده شکل $W(f)$ با مقادیر α بین $0/218$ تا $0/998$ انجام شد. $W(f)$ های مورد استفاده، بیشتر به صورت با قاعده بوده (مستطیلی و مثلثی) که برخی از آنها در شکل ۶ نشان داده شده اند. برای هر شبیه سازی، S_i و n ثبت گردیده است. در همه حالات n با 95% اطمینان برابر $m \cdot T$ بدست آمده است.



$$\Delta\omega_k \approx \frac{2\pi}{n}$$

$$\frac{1}{2} R_k^2 = \text{مساحت مستطیل هیستوگرام} \\ = \text{ارتفاع} \times \frac{2\pi}{N}$$

بنابراین ارتفاع هیستوگرام، $I(\omega_k)$ دوره نگار نامیده می شود و برآورد تقریبی تابع چگالی طیفی $f(\omega_k)$ است.

$$R_k^2 = \frac{4\pi}{N} I(\omega_k) = \frac{4\pi}{N} f(\omega) = 2\Delta\omega_k f(\omega)$$

ولی از آنجاییکه تغییرات در سری زمانی، ممکن است معلول تغییرات در چندین فرکانس مختلف باشد، رابطه تعمیم یافته زیر را داریم:

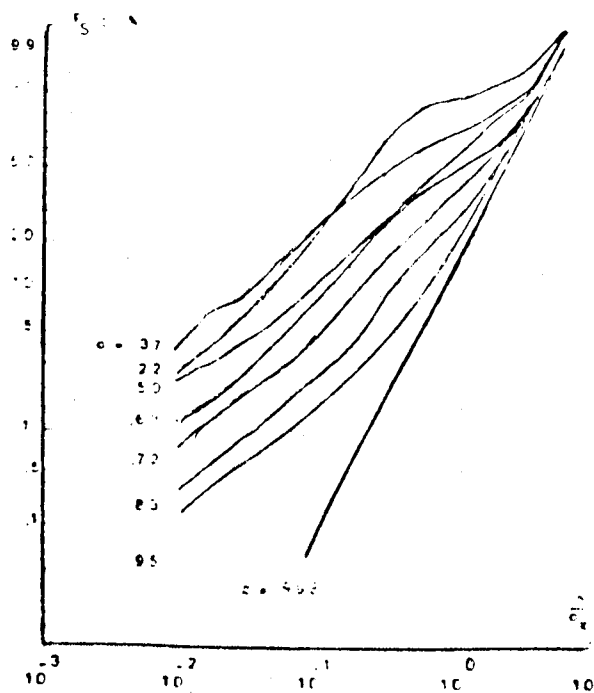
$$X(t) = \sum_{k=1}^I R_k \cos(\omega_k t + \phi_k)$$

$$X(t) = \sum_{k=1}^I (2G(\omega_k)\Delta\omega_k)^{\frac{1}{2}} \cos(\omega_k t + \phi_k) \quad (11)$$

نشان می‌دهد و در حالتی که $\alpha \approx 0$ مقدار $\bar{S}$ به صفر نزدیک می‌شود و رابطه $\frac{\bar{S}}{\sigma_x}$ با α به صورت خطی ظاهر می‌گردد. دلیل دیگر توزیع وایبل این است که این توزیع به طور گسترده‌ای در کاربردهای مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد. شکل (۸) توابع توزیع تجربی S را که برای شبیه‌سازی‌های مختلف بر روی کاغذ احتمال وایبل رسم شده است، نشان می‌دهد. از شکل (۸) چنین به نظر می‌رسد که توزیع S در حالت کلی به صورت وایبل نمی‌باشد. پارامترهای وایبل یعنی (ξ, δ) به روش زیر برآورده می‌شود، که این رابطه برای $\frac{\bar{S}}{\sigma_x} < 2$ صادق است.

$$\xi = \left(\frac{\bar{S}}{S}\right)^{-1/0.8}$$

$$\delta = \frac{\bar{S}}{\Gamma(1 + \frac{1}{\xi})}$$



شکل (۸)

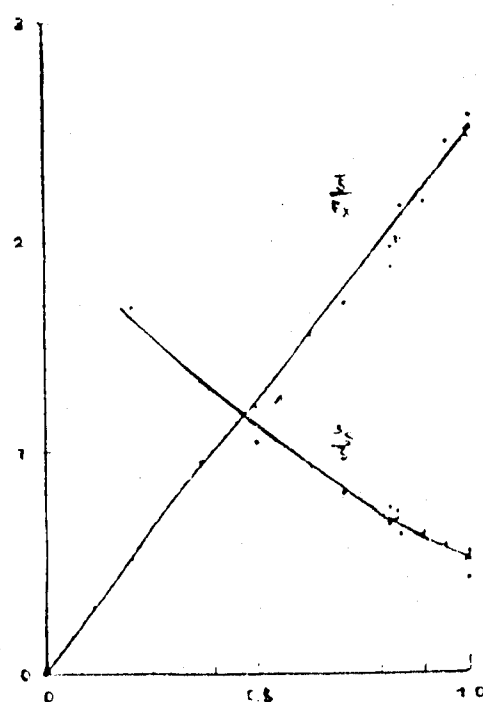
شکل (۹) رسم پارامترهای بدون واحد وایبل یعنی ξ و $\frac{\delta}{\sigma_x}$ برحسب α را نشان می‌دهد. در حالتی که $\alpha = 1$ باشد، $\xi = 2$ و $\frac{\delta}{\sigma_x} = \sqrt{8}$ خواهد بود.

μ_s و σ_s به ترتیب بوسیله $\bar{S}$ و S_s تخمین زده می‌شود. بصورتیکه:

$$\bar{S}_s = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i$$

$$S_s = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [S_i - \bar{S}]^2$$

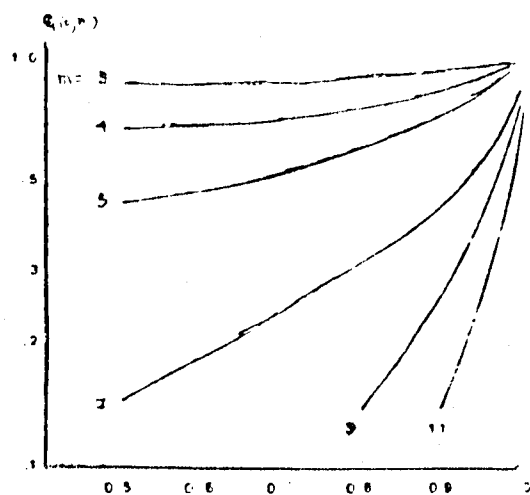
شکل (۷) مقادیر بدون واحد $\frac{\bar{S}}{\sigma_x}$ و $\frac{S_s}{\sigma_x}$ که به صورت تابعی از a رسم شده را نشان می‌دهد.



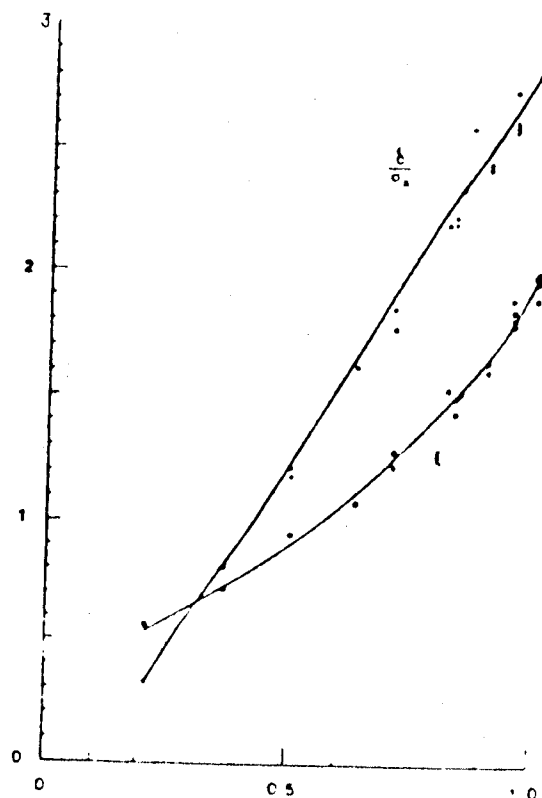
شکل (۷)

از این شکل برای تشخیص دادن توزیع S استفاده می‌کنیم، زیرا همانطور که می‌دانیم برای تعیین مقدار D ، لازمست که توزیع S را بدانیم. امکان تشخیص دادن توزیع وایبل برای S برای α های غیریک و توزیع رالی برای $\alpha = 1$ مورد بررسی و تحقیق گرفته است. توزیع وایبل بدین جهت مورد توجه است که S دارای توزیع رالی برای $\alpha = 1$ است، زیرا که با مقادیر $\xi = 2$ و $\delta = \sqrt{8}\sigma_x$ مقادیرهای بدست آمده $\frac{\bar{S}}{\sigma_x} = 2/5$ و $\frac{S_s}{\sigma_x} = 0/52$ در شکل (۷) رسم شده کاملاً توزیع رالی را

برای مقادیر α از ۰/۵ تا ۱ و محدوده m که قبلاً اشاره شد، محاسبه شده است و $Q(\alpha, m)$ در شکل (۱۰) رسم شده است.



شکل (۱۰)



شکل (۹)

برای حالتی که منحنی $S - N$ را بتوان با رابطه $NS^m = k$ بیان کرد، D برابر خواهد بود با (از معادله ۶):

$$D = \frac{N}{k} E(S^m) \quad (۱۳)$$

مقدار $E(S^m)$ از برنامه شبیه‌سازی برای مقادیر مختلف α و برای ۱۱ و ۹ و ۷ و ۵ و ۴ و ۳ به فرم زیر تخمین زده می‌شود:

$$E(S^m) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i^m \quad (۱۴)$$

با فرض اینکه S به صورت وایبل است $E(S^m)$ برابر است با:

$$E(S^m)_W = \delta^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{\xi}\right) \quad (۱۵)$$

که مقدار ξ و δ برای یک α مشخص از شکل (۹) بدست می‌آید.

نسبت این دو حالت یعنی رابطه

$$Q(\alpha, m) = \frac{E(S^m)}{E(S^m)_W} \quad (۱۶)$$

اکنون می‌توان یک فرم کلی برای معادله نولت و هانس‌فورد به صورت زیر نوشت:

$$D = Q(\alpha, m) \frac{n}{k} \delta^m \phi \Psi^m \Gamma\left(1 + \frac{m\phi}{\xi}\right) \quad (۱۷)$$

Q یک ضریب تصحیح است که وارد معادله می‌شود. زیرا در حالتی که S به صورت وایبل نبوده فرض شده است که S به صورت وایبل بوده و بنابراین نیاز به یک ضریب تصحیح می‌باشد.

مثال:

یک تیر، یک پایه را با ابعاد داده شده در شکل (۱۱) در نظر بگیرید که یک نیرو به صورت متمرکز در انتهای آن وارد می‌شود.

است. نمودار به صورت $NS^m = k$ مدل داده شده است که $m = 4/895$ و $k = 1/8 \times 10^{17} MPa^m$ می‌باشد. ضخامت تیر یعنی t از معادله (۱۷) بدست می‌آید.

ابتدا با استفاده از شکل ۱۰ و داشتن مقادیر α و m مقدار $Q(\alpha, m)$ برابر $0/68$ بدست می‌آید. حداکثر تنش (S) ناشی از ایجاد خمش از رابطه

$$S(t) = \Psi Q(t)^\phi \quad (18)$$

بدست می‌آید. مقدار Φ برابر ۱ می‌باشد، زیرا فرض شده است که تنش مستقیماً متناسب با نیرو است. بنابراین با استفاده از روابط مقاومت مصالح مقدار Ψ به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\Psi = \frac{\text{مساحت مقطع تیر}}{\text{همان اینرسی}} = \frac{L \times (\frac{t}{4})}{\frac{bt^3}{12}} = \frac{6L}{bt^2} \quad (19)$$

تنش متوسط برابر می‌شود با:

$$S_m \Psi \mu_Q = 6 \mu_Q \frac{L}{bt^2} \quad (20)$$

برای محاسبه حالتی که تنش متوسط مخالف صفر باشد، نمودار $S - N$ با استفاده از یک مقدار کوچکتر برای k یعنی k' به طرف پایین منتقل می‌شود. مقدار k' از رابطه زیر بدست می‌آید:

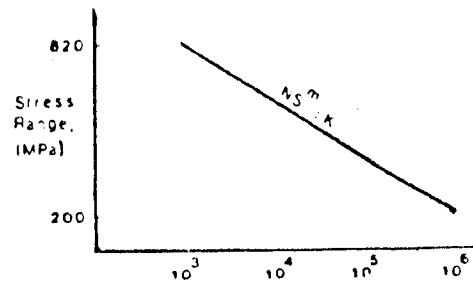
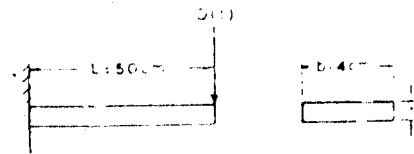
$$k' = k \left(1 - \frac{S_m}{S_f}\right)^m \quad (21)$$

که S_m تعداد تنش متوسط است که از رابطه (۲۰) بدست می‌آید و k مربوط به حالتی است که تنش متوسط صفر باشد. S_f ، تنش واقعی شکست است که به صورت تجربی از رابطه

$$S_f \cong S_0 + 245 = 815 MPa \quad (22)$$

بدست می‌آید. جایگزین کردن معادلات (۲۰) و (۲۲) در معادله (۲۱) و معادلات (۱۹) و (۲۱) در معادله (۱۷)، معادله خستگی را به صورت زیر می‌دهد:

$$D = \frac{Q^n}{k} \delta^m \left[\frac{\frac{6L}{bt^2}}{\left(1 - \frac{6\mu_Q L}{815 bt^2}\right)} \right]^m \Gamma\left(1 + \frac{m}{\xi}\right) \quad (23)$$



شکل (۱۱)

$W(f)$ مربوط به $Q(t)$ در شکل (۱) برای $\alpha = 0/840$ ، $\sigma_Q = 0/2 KN$ و $m_0 = 46 \frac{peak}{s}$ ، $m_0 = 38/6 \frac{crossing}{s}$ شده است. مقدار متوسط نیرو یعنی $\mu_Q = 0/15 KN$ می‌باشد. مطلوب است محاسبه حداقل ضمانت تیر، بر اساس شرایط زیر:

(۱) مقدار N حداقل 5×10^6 چرخه باشد.

(۲) حداکثر مقدار مجاز برای p_f برابر با 10^{-2} باشد (فرض کنید $C_D \leq 0/5$). این فرض با توجه به شکل (۳) معادل است با اینکه بگوییم $(\mu_D = 0/04)$.

(۳) ماده مورد استفاده (یعنی جنس تیر) در استاندارد $ASTM - 36$ دارای استحکام متوسط (مگا پاسکال) $290 MPa$ و استحکام کششی متوسط $470 MPa$ می‌باشد. دیاگرام $S - N$ در شکل (۱۱) نشان داده شده است. تمام عوامل مؤثر بر خستگی مانند کیفیت سطح، محیط و ... در دیاگرام $S - N$ لحاظ شده

می‌سازد. با توجه به ماهیت منبع تنش، مدل‌های احتمال زیر را برای فرآیند تنش پیشنهاد می‌شود.
چند جمله‌ای‌ها با ضرایب تصادفی:

$$Q_n(t) = \sum_{j=0}^n A_j t^j, \quad -\infty < t < +\infty$$

فرآیندهای ایستای هارمونیک پایدار:

$$X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \Phi(dx), \quad -\infty < t < +\infty$$

با فرض گوسی بودن ضرایب، چند جمله‌ای تصادفی غیر ایستا است که با درجه n بزرگ، رفتار تناوب گونه را به نمایش می‌گذارد.

فرآیندهای ایستای هارمونیک پایدار، مدل مناسبی برای فرآیند تنش ایستای با واریانس بزرگ است. برای تنش‌های نسبتاً شدید متوالی از نوع کششی و فشاری در فواصل زمانی، مدل هارمونیک پایدار مناسب به نظر می‌رسد (مرجع شماره ۴).

از شکل (۹) برای $\alpha = 0/840$ و $\xi = 1/52$ و $\frac{\delta}{\sigma_D} = 2/3$ مقدار $\delta = 0/481 kN$ را خواهیم داشت. با جایگزین کردن مقادیر m و k و ξ و D و μ_Q و δ در معادله (۲۳) و قرار دادن $D = \mu_D = 0/04$ مقدار $t > 2/64 cm$ بدست می‌آید.

برای سهولت، می‌توان فرض کرد که S دارای توزیع weibull با $Q(\alpha, m) = 1$ بوده و نتیجه محاسبه، $t > 2/64 cm$ خواهد بود. استفاده از فرمولهای ساده مربوط به حالت دامن نامحدود معادله ۸ نیز نتایج خوب و سازگاری بدست می‌دهد. مثلاً برای این مثال $t > 2/76$ بدست می‌آید.

دیدگاههای تازه:

چنانچه در قسمت قبل مشاهده شد، فرآیندهای ایستای گوسی با زمان پیوسته، مدل احتمال برای تنش‌های وارده در نظر گرفته می‌شود. بهر حال استفاده از این فرآیند، محاسبه شاخص‌های مورد نظر در مطالعه پدیده خستگی را امکان‌پذیر

مراجع

[۱] مقدمه‌ای بر تحلیل سریهای زمانی C. Chatfield ترجمه حسینعلی نیرومند و ابوالقاسم بزرگ‌نیا، انتشارات دانشگاه فردوسی مشهد ۱۳۷۲.

- [2] Dieter, G. E. Mechanical metallurgy, 3d. e. d., New York, Mc Graw Hill, 1986.
- [3] Lin, Y. K. Probabilistic Theory of Structural Dynamics, Mc Graw Hill, 1967.
- [4] Rezakhan, S. and Soltani, A. R. Expected number of real zeros of Levy and harmonizable stable random polynomials. To appear, Georgian Mathematics Journal, 7, 2000.
- [5] Sun, T. C., and Chaka, M. on simulation of a Gaussian Stationary Processes. J. Time Series Anal. 18 79-93, 1997.
- [6] Wirsching, R. H. and Shehata, M. Fatigue Under Wide Band Random Stresses Using the Rain - Flow Method. J. Eng. Mater. Tech. 99, 205-11.