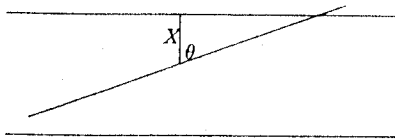


مسئله سوزن بوفن برای شبکه‌های مستطیل شکل

رابرت فاکلر

ترجمه:

مصطفی دانش^۱ طیبه سبحانی^۲

اسکرودر مشاهده کرد کف چوبی اتاقها بطور طولی پوشیده نشده‌اند، پس می‌توان مسئله سوزن را بطور امروزی‌تری به شکل زیر مطرح کرد: هنگامیکه سوزنی به طول l بر روی کفی که با موزائیک‌های مربع شکل به ضلع K پوشیده شده است پرتاب شود چه اتفاقی می‌افتد (وقتیکه $l < K$ باشد)؟ او نیز، به این سؤال پاسخ داد: احتمال اینکه سوزن شکاف کف را قطع کند چقدر است؟ برای حل این مسئله باید موقعیتهای ممکن را که سوزن بر روی زمین قرار می‌گیرد و ارتباط آن با شکافهای کف را با یک مجموعه مستقل از متغیرها نشان دهیم. چه تعدادی از این قبیل متغیرها لازم است؟

برای تعیین نمودن موقعیت یک نقطه روی سوزن دو متغیر به مختصات x و y لازم است. اما سوزن می‌تواند در محل‌های زیاد و نامتناهی بیافتد. این نقاط نسبت به شکافهای کف

اگر سوزنی به طول l را بر روی کفی که به طور یکسان از الوارهای چوبی به پهنای D پوشیده شده بیاندازیم، احتمال اینکه سوزن شکاف بین الوارها را قطع کند چقدر است؟

این سؤال به نام «مسئله سوزن بوفن» معروف است. Schroeder در سال ۱۹۷۴ در مقاله‌ای از مجله "Mathematics Teacher" درباره این مسئله بحث کرد و برای حالتی که طول سوزن $l \leq D$ باشد مسئله را حل نمود.

روش حل برای حالت $l \leq D$ بدینگونه است که متغیر تصادفی X را فاصله وسط سوزن تا نزدیکترین خط موازی و زاویه بین سوزن و این خط عمود را θ در نظر می‌گیریم. X بین 0 و $\frac{D}{2}$ تغییر می‌کند و θ بین 0 و $\frac{\pi}{2}$ تغییر می‌کند، منطقی است که فرض کنیم X و θ متغیرهای تصادفی یکنواخت مستقل هستند که بر فاصله‌های مربوط به طور یکنواخت توزیع شده‌اند.

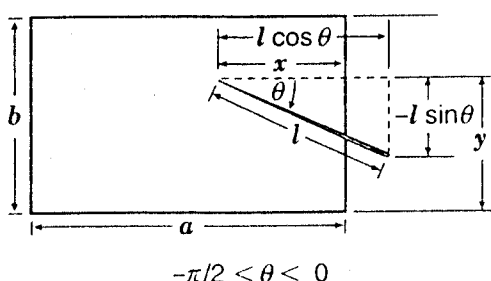
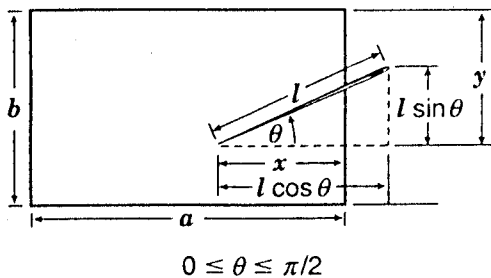
بنابراین:

$$\begin{aligned} P\left\{X < \frac{l}{2} \cos \theta\right\} &= \int_{x < \frac{l}{2} \cos y} \int f_X(x) f_\theta(y) dx dy \\ &= \frac{4}{\pi D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{l}{2} \cos y} dx dy \\ &= \frac{4}{\pi D} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos y dy = \frac{2l}{\pi D} \end{aligned}$$

^۱ مصطفی دانش، دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه فردوسی مشهد
^۲ طیبه سبحانی، دانشجوی ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
^۳ روش حل در مرجع [۲]

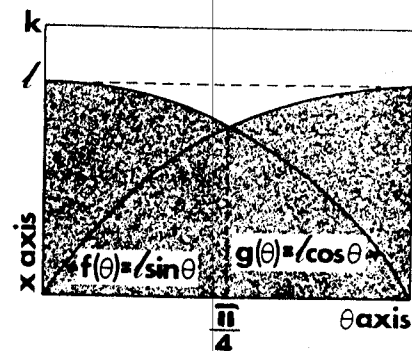
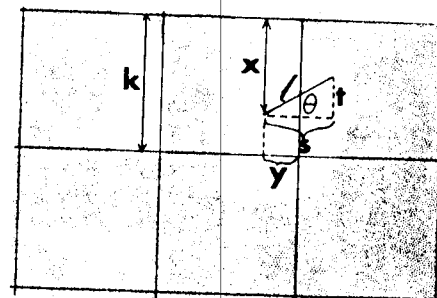
در اینجا مسئله اسکرودر به صورت کلی‌تر برای ما مطرح می‌شود که روی آن تأمل کنیم و آن عبارت است از سوزنی که با طول l بر روی شبکه‌های مستطیل شکلی که از مستطیل‌های به ابعاد $a \times b$ تشکیل شده پرتاب شود. اگر یک سوزن به طول l بر روی شبکه مستطیلی که شامل مستطیل‌های به ابعاد $a \times b$ است پرتاب شود، احتمال اینکه سوزن یک خط شبکه را قطع کند چقدر است؟ ما فرض می‌کنیم که $l \leq a$ و $l \leq b$ است. (در حالت‌های $a < l < \sqrt{a^2 + b^2}$ یا $b < l < \sqrt{a^2 + b^2}$ این مسئله مشکل می‌شود و ما حل این مسئله جالب را برای علاقه‌مندان کنار می‌گذاریم. اگر $l \geq \sqrt{a^2 + b^2}$ باشد، در این حالت سوزن همیشه یک خط را قطع می‌کند و بنابراین احتمال اینکه سوزن یک خط را قطع کند برابر «یک» است.)

مسئله اسکرودر، در حالت خاصی است که در این حالت $a = b = k$ می‌باشد. برآمد هر پرتاب سوزن را با x و y و θ مشخص می‌کنیم که در آن x فاصله نوک سوزن تا نزدیکترین خط عمودی در طرف راست آن، y فاصله نوک سوزن تا خط افقی که دورتر از آن واقع شده است و θ زاویه طول سوزن و خطی که از نوک سوزن در امتداد افقی به سمت راست کشیده شده است می‌باشد. (شکل زیر را مشاهده کنید.)



موقعیتهای یکسانی دارند، اما شبیه‌ها متفاوت است. برای تعیین موقعیت واحدی از سوزن و مشخص نمودن موقعیت یک نقطه خاص، ما باید شیب سوزن را تعیین کنیم، پس این فرآیند احتیاج به متغیر سومی نیز دارد. بنابراین ما برای مشخص نمودن نتیجه سوزنی که بر روی کف پرتاب شده است، به سه متغیر مستقل نیاز داریم.

اسکرودر، در حل مسئله بوفن (از دیدگاه خودش) به اشتباه از دو متغیر برای نشان دادن همه پرتابهای ممکن سوزن استفاده کرده بود و جواب نادرست $P = \frac{2l\sqrt{2}}{k\pi}$ را بدست آورد.



به صورت زیر^۲:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{2}{k\pi} \left\{ \int_0^{\pi/4} l \cos \theta d\theta + \int_{-\pi/4}^0 l \sin \theta d\theta \right\} \\
 &= \frac{2l}{k\pi} \left\{ [\sin \theta]_0^{\pi/4} + [-\cos \theta]_{-\pi/4}^0 \right\} \\
 &= \frac{2l}{k\pi} \left[\sin \frac{\pi}{4} - \sin \theta - \cos \frac{\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right] \\
 &= \frac{2l}{k\pi} \left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right] \\
 &= \frac{2l}{k\pi} (\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}l}{k\pi}
 \end{aligned}$$

^۲مرجع شماره [۱]

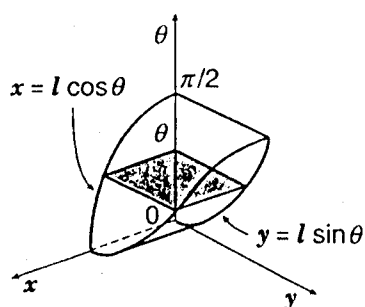
ناحیه R^+ اجتماع دو استوانه قائم با ارتفاعهای a و b و به ترتیب با پایه‌های B_1 و B_2 است. حجم این استوانه‌ها به ترتیب برابر است با: $a \times (\text{مساحت } B_1)$ و $b \times (\text{مساحت } B_2)$. اشتراک این دو استوانه ناحیه I را تشکیل می‌دهند، پس حجم R^+ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{حجم } R^+ = (\text{مساحت } B_1) \times a + (\text{مساحت } B_2) \times b - I$$

$$\text{مساحت } B_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \sin \theta d\theta = -L \cos \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = l$$

$$\text{مساحت } B_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L \cos \theta d\theta = L \sin \theta \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = l$$

حجم I را می‌توان به روش «جزء به جزء کردن حجم‌ها» بدست آورد. توجه کنید که سطح مقطع I به صورت عمود بر محور θ ، یک مستطیل با ابعاد $l \cos \theta$ و $l \sin \theta$ می‌باشد. شکل زیر را مشاهده کنید:



بنابراین مساحت $A(\theta)$ برابر است با

$$A(\theta) = (l \cos \theta)(l \sin \theta) = l^2 \sin \theta \cos \theta$$

و نیز داریم:

$$\begin{aligned} \text{حجم } I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l^2 \sin \theta \cos \theta d\theta \\ &= l^2 \left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l^2}{2} \end{aligned}$$

$$\text{بنابراین: } \text{حجم } R^+ = la + lb - \frac{l^2}{2}$$

در اینجا داریم: $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq b$ و $0 \leq \theta \leq \pi/2$. ما می‌توانیم مجموعه‌ای از همه برآمدهای ممکن آزمایش سوزن را با نقاط یک مکعب مستطیل، به صورت زیر تعریف کنیم:

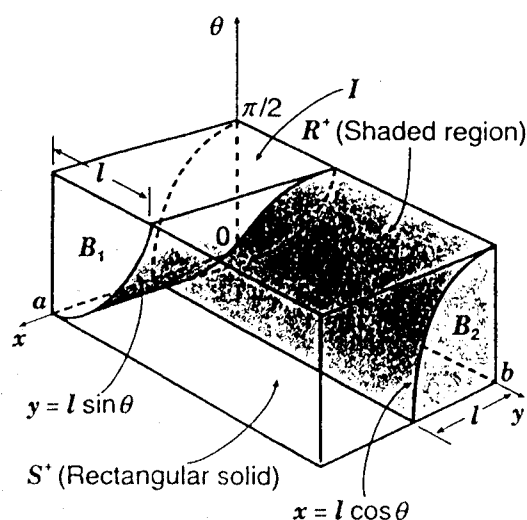
$$S = \{(x, y, \theta) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b, -\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}\}$$

فرض کنید R زیر ناحیه‌ای از S باشد که همه برآمدهای حاصل از قطع نمودن خط توسط سوزن را شامل شود. پس احتمال P احتمال قطع خط توسط سوزن برابر است با:

$$p = \frac{\text{حجم } R}{\text{حجم } S}$$

هرگاه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ باشد آنگاه سوزن یک خط را قطع می‌کند اگر و فقط اگر $X \leq l \cos \theta$ یا $Y \leq l \sin \theta$ باشد. S^+ زیر ناحیه‌ای از S شامل نقاطی از S بطوریکه $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$ باشد را در نظر بگیرید.

در این حالت، نتایج پرتابهایی که منجر به قطع شدن یک خط می‌شود را می‌توان توسط نقاطی در ناحیه R^+ شامل آن دسته نقاط از S^+ که درون اجتماع دو استوانه با $x = l \cos \theta$ و $y = l \sin \theta$ هستند، مشخص نمود. نواحی R^+ و S^+ در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



شبکه‌های مربع شکل مطرح شده توسط اسکرودر است و به آن پاسخ صحیح می‌دهد.

مشاهده جالب در این روش حل، این است که اگر ما یکی از ابعاد را در نظر بگیریم مثل ضلع a بطوریکه طول آن نامتناهی فرض شود، آنگاه می‌توان مسئله سوزن را مانند حالت خطوط موازی در نظر گرفت که b فاصله بین دو خط مجاور است. ما می‌توانیم این نتیجه صحیح بدست آمده را مشاهده کنیم زیرا:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{2l + \frac{2lb}{a} + \frac{l^2}{a}}{\pi b} = \frac{2l}{\pi b}$$

در پایان یاد آور می‌شویم که در حل مسئله سوزن، نیاز به استفاده از انتگرال برای بدست آوردن حجم R داریم. یک روش دیگر برای اجتناب از انتگرال‌گیری این است که یک برنامه کامپیوتری بنویسیم که در آن آزمایش پرتاب سوزن را شبیه‌سازی کند. می‌توانیم با تکرار برنامه پرتاب سوزن به تعداد زیاد، یک تخمین تجربی از احتمال قطع خط، توسط سوزن را داشته باشیم که عبارت است از تقسیم تعداد دفعاتی که سوزن یک خط را قطع می‌کند بر تعداد دفعاتی که سوزن پرتاب می‌شود.

```

10 REM VARIABLES
20 REM PI....THE CONSTANT PI
30 REM N.....NUMBER OF TOSSES
40 REM S.....NUMBER OF TIMES NEEDLE
   CROSSES A LINE
50 REM X.....DISTANCE BETWEEN
   LEFTMOST END OF
   NEEDLE AND NEAREST
   VERTICAL LINE TO THE
   RIGHT
60 REM Y.....DISTANCE BETWEEN LOWER
   END OF NEEDLE AND
   NEAREST HORIZONTAL
    
```

فرض دیگر این است که $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ باشد، پس سوزن هنگامی خط را قطع خواهد کرد که (x, y, θ) به R متعلق باشد اگر و فقط اگر $x < l \cos \theta$ یا $y < -l \sin \theta$ باشد. R^- را زیر ناحیه‌ای از R در نظر بگیرید که شامل نقاطی است که در آن $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ قرار دارد. پس R^- شامل تمام نقاط (x, y, θ) در R است که $-\frac{\pi}{4} < \theta < 0$ قرار دارد و همچنین $x < l \cos \theta$ یا $y < -l \sin \theta$ می‌باشد. ما ادعا می‌کنیم که زیر ناحیه R^+ در $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ صدق می‌کند نسبت به صفحه xy متقارن با زیر ناحیه R^- است. در این ارتباط ما متوجه می‌شویم که $(x, y, -\theta)$ نقطه تقارن (x, y, θ) نسبت به صفحه xy است پس داریم:

$$\begin{aligned} (x, y, -\theta) \in R^- &\Leftrightarrow (x < l \cos(-\theta) \text{ or } y < -l \sin(-\theta)) \\ &\text{and } -\frac{\pi}{4} < -\theta < 0 \\ &\Leftrightarrow (x < l \cos \theta \text{ or } y < -l \sin \theta) \\ &\text{and } 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \\ &\Leftrightarrow (x, y, -\theta) \in R^+ \text{ and } 0 < \theta < \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

بنابراین حجم زیر ناحیه R^+ شامل تمام نقاط $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ برابر با حجم ناحیه R^- است. چون این حجم با حجم R^+ یکسان است بنابراین داریم:

$$\text{حجم } S = 2(\text{حجم } R^+)$$

همچنین به سادگی دیده می‌شود که:

$$\text{حجم } S = 2(\text{حجم } S^+)$$

چون حجم S^+ برابر است با $\frac{\pi ab}{4}$ داریم:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\text{حجم } R}{\text{حجم } S} = \frac{2(\text{حجم } R^+)}{2(\text{حجم } S^+)} \\ &= \frac{\text{حجم } R^+}{\text{حجم } S^+} = \frac{la + lb - \frac{l^2}{4}}{\pi ab} \\ &= \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} \end{aligned}$$

موقعیکه مستطیل به مربع تبدیل می‌شود می‌توان a را برابر b قرارداد. بنابراین:

$$a = b = k \Rightarrow p = \frac{4lk - l^2}{\pi k^2}$$

این روش حل مسئله، راه حل درستی برای مسئله سوزن با

NO. OF TOSSES PROBABILITY ESTIMATE

1000	.465
2000	.4805
3000	.4743334
4000	.4995
5000	.4552
6000	.4805
7000	.475
8000	.474375
9000	.471
10000	.4735

برای مثال فرض کنید $a = 2$ و $b = 3$ را در نظر بگیریم. برنامه فوق، یک برنامه کامپیوتری به زبان BASIC را شامل می‌شود که در این حالت، برآوردهای احتمال تجربی را با شروع از ۱۰۰۰ پرتاب محاسبه می‌کند و گام به گام از ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ ادامه می‌دهد. در اینجا می‌توان به مدت زمان زیاد اجرای برنامه دقت نمود. در این حالت احتمال اینکه سوزن خط را قطع کند (با استفاده از فرمول ریاضی)، برابر است با:

$$p = \frac{2(1)(2+3) - 1^2}{\pi(2)(3)} = \frac{9}{6\pi} \approx 0.477$$

LINE ABOVE IT

```

70 REM THETA.ANGLE MADE BY NEEDLE
    WITH A HORIZONTAL
    LINE THROUGH ITS
    LOWER END
80 REM I.....INDEX VARIABLE FOR
    FOR-NEXT LOOP
90 LET PI=3.14159
100 PRINT "NO. OF TOSSES". TAB(17);
    "PROBABILITY ESTIMATE"
110 FOR N=1000 TO 10000 STEP 1000
120     RANDOMIZE(N)
130     LET S=0
140     FOR I=1 TO N
150         LET X=2*RND
160         LET Y=3*RND
170         LET THETA=(PI/2)*RND
180         IF X <= COS(THETA) OR
            Y <= SIN(ABS(THETA))
            THEN S=S+1
190     NEXT
200     PRINT TAB(5); N; TAB(23); S/N
210 NEXT N

```

- [1] schroeder, Lee L. "Buffen's Needle problem : An Exciting Application of many Mathematical concepts."
Mathematics Teacher 67 (February 1974): 183-86
- [2] Ross, Sheldon M. "A First Course In Probability "3rd edition, Macmilan Publishing Co.(1988)

اصل این مقاله با عنوان

Buffons Needle Problem for a Rectangular Grid

نوشته Robert Fakler است که در

Mathematics Teacher, VOL. 88, NO.3 (march 1995) 205-208

به چاپ رسیده است.
