

## تابع باور و مدل باور انتقال پذیر

محیا لطفی<sup>۱</sup>، محمد حسین علامت‌ساز<sup>۲</sup>

چکیده:

در گذشته تنها راهکار در شرایط عدم اطمینان، نظریه احتمال بوده است. اما از چند دهه گذشته تا کنون، نظریه‌های گوناگون دیگری برای بررسی متغیرها و سیستم‌هایی که اطلاع نسبت به آنها کافی و دقیق نیست ارائه شده است. یکی از این راهکارها نظریه توابع باور یا نظریه دمپستر-شفر است. این نظریه به عنوان تعمیمی از نظریه احتمال مورد توجه قرار گرفته است که امکان نمایش حالت‌های مختلفی از اطلاعات، یقین کامل تا عدم آگاهی کامل را فراهم می‌کند. تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. یک مدل برای نمایش توابع باور مدل باور انتقال پذیر است. این مدل از نظر مفهومی مانند مدل بیز است. در این مدل باورها در دو سطح قرار دارند، یکی سطح باوری که در آن باورها قبول می‌شوند توسط تابع باور اندازه‌گیری می‌شوند، و دیگری سطح شرط‌بندی که در آن باورها می‌توانند برای تصمیم‌گیری استفاده شوند و توسط تابع احتمال اندازه‌گیری می‌شوند. تفاوت این مدل با مدل بیزی در حضور سطح باور است. مدل بیزی این سطح را ندارد.

**واژه‌های کلیدی:** تابع باور، تابع موجه نمایی، مدل باور انتقال پذیر.

### ۱ مقدمه

از دید نظری استفاده از این رابطه کاملاً صحیح است. اما در عمل پیدا کردن احتمال پیشین ( $p(\theta)$ ) مشکل‌ساز می‌شد. برای غلبه بر این مشکل روش‌های گوناگونی در طی سال‌ها برای به دست آوردن احتمال پسین بدون استفاده از پیشین‌ها معرفی شد. به عنوان مثال می‌توان از روش‌های بحث اعتماد فیشر<sup>۵</sup> (۱۹۷۱)، احتمال‌های مستقیم<sup>۶</sup> دمپستر<sup>۷</sup> (۱۹۶۲) و احتمال‌های بالایی و پایینی دمپستر<sup>۸</sup> (۱۹۶۷) نام برد.

در این میان روش شفر<sup>۹</sup> (۱۹۷۱) کارآمدتر از سایر روش‌ها بود. شفر مجموعه کارهای خود را در کتاب نظریه ریاضی شواهد<sup>۱۰</sup> گردآوری کرد، که این کتاب هنوز کامل‌ترین مرجع در زمینه تابع باور است. یک تابع باور روی دامنه  $\Omega$  بر پایه یک تابع

باورها هنگام وجود عدم اطمینان<sup>۳</sup> پذیدار می‌شوند. عدم اطمینان گاهی اوقات از یک فرایند تصادفی و گاهی به دلیل کمبود اطلاعات ایجاد می‌شود. لذا نظریه توابع باور یا نظریه دمپستر-شفر به عنوان تعمیمی از نظریه احتمال مورد توجه قرار گرفته است زیرا این نظریه امکان نمایش حالت‌های مختلفی از اطلاعات، یقین کامل تا عدم آگاهی کامل<sup>۴</sup> را فراهم می‌کند. به طور کلی در مسائل استنباط آماری وقتي مشاهده  $x$  را داشته باشيم، می‌توان توزيع شرطي  $(x|\theta)p(\theta|x)$  را با استفاده از قضيه بیز به دست آورد:

$$p(\theta|x) = \frac{p(\theta)f(x;\theta)}{\int p(\theta)f(x;\theta)d\theta}$$

<sup>۱</sup>کارشناس ارشد آمار، دانشگاه اصفهان

<sup>۲</sup>عضو هیئت علمی آمار، دانشگاه اصفهان

<sup>۳</sup>Uncertainty

<sup>۴</sup>Total ignorance

<sup>۵</sup>Fisher

<sup>۶</sup>Direct probabilities

<sup>۷</sup>Dempster

<sup>۸</sup>Upper and lower probabilities

<sup>۹</sup>Shafer

<sup>۱۰</sup>A Mathematical Theory of Evidence

می‌تواند انسان، ریاضت و یا برنامه کامپیوتری و ... باشد. مدل باور انتقال‌پذیر از نظر مفهومی با مدل بیزی یکسان است، با این تفاوت که روی تابع باور تعریف می‌شود. این مدل در مسائل تصمیم‌گیری و استدلال و استنباط در قالب نظریه شواهد کابردهای فراوانی دارد. مدل باور انتقال‌پذیر بر اساس یک مدل دوستطحی تعریف می‌شود. سطح باوری<sup>۱۶</sup> که باورها در این سطح وارد می‌شوند، ترکیب شد.

اصلاح می‌شوند و سطح شرط‌بندی<sup>۱۷</sup> که باورها برای اتخاذ تصمیم استفاده می‌شوند. معتقدین به روش بیزی ادعا می‌کردند که باورها را می‌توان توسط اندازه احتمال اندازه‌گیری کرد. آن‌ها اطلاعات در دسترس را توسط احتمال خلاصه می‌کردند. به همین دلیل مدل اندازه‌های درونی روسپینی<sup>۱۸</sup> (۱۹۸۷) است. نظریه تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. به طور کلی، تابع باور می‌تواند به عنوان یک تابع احتمال باشد که اصل‌های کلموگروف به جز اصل جمع پذیری را دارا

کیبرگ<sup>۱۹</sup> (۱۹۶۱) و اسمیتز<sup>۲۰</sup> (۱۹۶۱) ثابت کردند که باورها توسط خانواده‌ای از اندازه‌های احتمال قابل اندازه‌گیری هستند.

والی<sup>۲۱</sup> (۱۹۹۱) در مدلش فرض کرد باورهایی که توسط یک عامل (شما) نگاه داشته شده می‌توانند توسط یک اندازه احتمال اندازه‌گیری شود اما عامل نمی‌تواند مقدار این احتمال‌ها را بیان کند. از دیگر مدل‌ها می‌توان از مدل اشاره کهلاس و مانی<sup>۲۲</sup> (۱۹۹۵) و باسک<sup>۲۳</sup> و پرد<sup>۲۴</sup> (۱۹۹۵)، مدل باور انتقال‌پذیر اسمیتز و کنز<sup>۲۵</sup> (۱۹۹۴) و مهار عدم قطعیت با استفاده از مجموعه‌های ناهموار

ترابی و همکاران<sup>۲۶</sup> (۲۰۰۷) نیز نام برد. تابع باور را به روش‌های

گوناگون تعمیم داده‌اند. یکی از تعمیم‌های تابع باور تعمیم آن به

جرم قرار دارد که به هر زیر مجموعه  $\Omega$  عددی بین صفر و یک اختصاص می‌دهد که آن را با *Bel* نشان می‌دهند. می‌توان گفت تابع باور توسعه طبیعی نظریه احتمال بیزی است. تابع باور کاربرد وسیعی در تجارت، مهندسی، مسائل پزشکی، کنترل کیفیت، تجارت الکترونیکی، آمار، طبقه بندی، خوشه‌بندی، داده‌کاوی، تحلیل تصمیم و استنباط علمی و ... دارد.

تابع باور از روش‌های گوناگونی فرمولبندی شده است. این روش‌ها عبارت از نظریه شفر (۱۹۷۶)، نگاشت چند مقداری دمپستر (۱۹۶۷)، روابط سازگاری توسط شفر (۱۹۸۷) و لورنس<sup>۱۱</sup> (۱۹۸۸)، زیرمجموعه تصادفی توسط انجوین<sup>۱۲</sup> (۱۹۸۵) و اندازه‌های درونی روسپینی<sup>۱۳</sup> (۱۹۸۷) است. نظریه تابع باور یک روش برای استفاده احتمال ریاضی در قضاوت‌های ذهنی عرضه می‌کند. به طور کلی، تابع باور می‌تواند به عنوان یک تابع احتمال باور ارائه شده‌اند.

است. از این دیدگاه تابع باور به عنوان تعمیمی از تابع احتمال معرفی می‌شود. اما در ساختار کلاسیک، احتمال امکان نمایش مناسب عدم آگاهی را بفرام نمی‌کند. در صورتی که حداقل در بیان احتمال شخصی و ذهنی<sup>۱۴</sup> اکثرًا با نوعی عدم آگاهی و نایقینی مواجه هستیم. به علاوه احتمال یک اندازه جمع پذیر است، در حالی که مطالعات تجربی چنین خاصیتی را در مورد احتمال شخصی و ذهنی نشان نمی‌دهد و بیشتر به نظر می‌آید احتمال ذهنی یک اندازه ترتیبی است. مدل باور انتقال‌پذیر<sup>۱۵</sup> (*TBM*) مدلی برای نمایش باورهای کمی است. باورها توسط یک عامل در یک زمان نگهداری می‌شوند که با "شما" نشان‌گذاری می‌شود. "شما"

<sup>۱۱</sup>Lowrance

<sup>۱۲</sup>Nguyen

<sup>۱۳</sup>Ruspiní

<sup>۱۴</sup>Personal and subjective probability

<sup>۱۵</sup>Transferable belief model

<sup>۱۶</sup>Credal level

<sup>۱۷</sup>Pignistic level

<sup>۱۸</sup>Kyburg

<sup>۱۹</sup>Walley

<sup>۲۰</sup>Bosc

<sup>۲۱</sup>Kenz

<sup>۲۲</sup>Zadeh

آنها تمرکز دارند. بهویژه، هنگامی که مجموعه مرجع متناهی باشد تابع  $m$  را می‌توان با فهرست اعضای کانونی و اندازه‌های آنها مشخص کرد.

**تعریف ۳.۲.** تابع باور: تابع مجموعه‌ای  $Bel : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$

تابع باور گویند اگر دارای شرایط زیر باشد:

$$B1) \quad Bel(\emptyset) = 0$$

$$B2) \quad Bel(\Omega) = 1$$

$$B3) \quad (A_1 \cup \dots \cup A_n) \geq \sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Bel\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right), \quad \forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega$$

مقدار  $Bel(A)$  درجه باوری است که بر پایه اطلاعات و شواهد موجود، به رخ دادن پیشامد  $A$  می‌دهند. اصل B3 حالت ضعیف تری از اصل جمع پذیری احتمال است.

**تذکر ۴.۲.** ممکن است  $m(\emptyset) = 0$  صفر نباشد و مقدار مثبتی بگیرد. وقتی  $m(\emptyset) = 0$  ( $Bel(\Omega) = 1$ ) باشد، تابع باور را یک تابع باور نرمال‌سازی شده می‌نامند و در غیر این صورت آن را نرمال‌سازی نشده گویند و تابع باور را با  $b(A) = Bel(A) + m(\emptyset)$  نشان می‌دهند.

**قضیه ۴.۲.** تبدیل موبیوس<sup>۳۲</sup>: اگر  $m$  تخصیص باور پایه باشد،

آنگاه برای هر زیر مجموعه  $A$  از  $\Omega$  رابطه

$$Bel(A) = \sum_{X \subseteq A} m(X)$$

یک تابع باور است و رابطه زیر نیز برقرار است:

$$m(A) = \sum_X (-1)^{|A-X|} Bel(X)$$

که در آن  $|A-X|$  اندازه مجموعه  $X$  است.

مجموعه‌های فازی بود که اولین بار توسط زاده<sup>۲۲</sup> (۱۹۷۹) صورت گرفت. بعد از زاده محققین زیادی در این زمینه کار کردند که از جمله آن می‌توان از اسمیتز (۱۹۸۱)، یاگر<sup>۲۳</sup> (۱۹۸۲)، یعنی<sup>۲۴</sup> (۱۹۹۰)، و لوکاس<sup>۲۵</sup> و اعرابی (۱۹۹۹) نام برد. یکی دیگر از تعمیم‌های تابع باور تعمیم آن به مجموعه اعداد حقیقی بود که حاصل تلاش‌های اسمیتز (۱۹۷۸)، استرات<sup>۲۶</sup> (۱۹۸۴) و ریستک<sup>۲۷</sup> و اسمیتز (۲۰۰۴) و اسمیتز (۲۰۰۵) است. اخیراً دنوکس<sup>۲۸</sup> (۲۰۰۹) تعمیم ترتیب‌های تصادفی به توابع باور روی خط حقیقی را بیان کرد.

## ۲ تابع باور

**تعریف ۱.۲.** تابع جرم: یک مجموعه غیر تهی متناهی در نظر بگیرید که آن را چارچوب تشخیص<sup>۲۹</sup> می‌نامند. تابع  $m : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  را تابع جرم یا تخصیص باور پایه<sup>۳۰</sup> گویند اگر دارای شرایط زیر باشد:

$$m_1) \quad m(\emptyset) = 0.$$

$$m_2) \quad \sum_{A \subseteq \Omega} m(A) = 1.$$

که در آن  $2^\Omega$  به مفهوم تمام زیر مجموعه‌های ممکن  $\Omega$  می‌باشد. کمیت  $m(A)$ ، که آن را جرم  $A$  می‌نامند، درجهی اطمینان از رخداد خود پیشامد  $A$  (ونه هیچ زیر مجموعه‌ی مشخص دیگر از آن) است.

**تعریف ۲.۲.** عضو کانونی<sup>۳۱</sup>:

هر مجموعه  $A \in \Omega$  که برای آن  $m(A) > 0$  باشد، یک عضو کانونی  $m$  نامیده می‌شود.

اعضای کانونی، زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع (چارچوب تشخیص) هستند که اطلاعات و شواهد و گواه‌های موجود، بر

<sup>۳۲</sup>Yager

<sup>۳۳</sup>Yen

<sup>۳۴</sup>Lucas

<sup>۳۵</sup>Start

<sup>۳۶</sup>Ristic

<sup>۳۷</sup>Denoeux

<sup>۳۸</sup>Frame of discernment

<sup>۳۹</sup>Basic belief assignment

<sup>۴۰</sup>Focal element

<sup>۴۱</sup>Mobius transformation

(A) درجه اطمینانی است که برای رخ دادن دقیقاً پیشامد  $A$  و یا هر پیشامد دیگری که با  $A$  اشتراکی دارد، قائل می‌شوند. برای یک زیر مجموعه  $A$  اطلاعات مشمول در توابع شواهدی را توسط یک

فاصله باور نمایش می‌دهند یعنی

$$[Bel(A), Pl(A)].$$

طول بازه یعنی  $Pl(A) - Bel(A)$  میزان عدم ناآگاهی در مورد مجموعه  $A$  است.

**تعریف ۷.۲.** باور پوچ<sup>۳۴</sup>: یک تابع باور

$$Bel : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$$

اثبات. کافی است ثابت کنیم که تعریف ارائه شده در قضیه دارای شرایط تعریف ۱.۲ است. داریم

$$\begin{aligned} m(\emptyset) &= \sum_{X \subseteq \emptyset} (-1)^{|\emptyset-X|} Bel(X) \\ &= Bel(\emptyset) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m(\Omega) &= \sum_{X \subseteq \Omega} (-1)^{|\Omega-X|} Bel(X) \\ &= Bel(\Omega) = 1. \end{aligned}$$

□

را تابع باور پوچ می‌نامند اگر

$$Bel(\Omega) = 1 \quad Bel(A) = 0 \quad A \neq \Omega.$$

در نتیجه تابع تخصیص باور پایه آن به صورت زیر می‌شود:

$$m(\Omega) = 1 \quad m(A) = 0 \quad A \neq \Omega$$

**تعریف ۶.۲.** تابع موجه‌نمایی<sup>۳۳</sup> : تابع مجموعه‌ای  $Pl : 2^\Omega \rightarrow [0, 1]$  را تابع موجه‌نمایی گویند اگر رابطه‌های زیر برقرار باشند:

$$Pl(\emptyset) = 0.$$

$$Pl(\Omega) = 1.$$

$$Pl(A_1 \cap \dots \cap A_n) \leq$$

$$\sum_{I \subseteq \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{|I|+1} Pl(\bigcup_{i \in I} A_i),$$

$\forall A_1, A_2, \dots, A_n \subset \Omega.$

به این ترتیب می‌توان نوشت

$$Pl(A) = 1 - Bel(\bar{A})$$

بنابراین تابع باور و موجه‌نمایی دوگان یکدیگرند.

با توجه به تعریف تابع باور و تابع موجه‌نمایی می‌توان نتیجه گرفت که رابطه زیر برقرار است

$$Pl(A) \geq Bel(A)$$

و با استفاده از آن می‌توان روابط زیر را به دست آورد:

$$Pl(A) + Pl(\bar{A}) \geq 1. Bel(A) + Bel(\bar{A}) \leq 1$$

تعریف دیگر تابع موجه‌نمایی بر حسب تابع جرم به صورت زیر است:

$$Pl(A) = \sum_{X \cap A \neq \emptyset} m(X).$$

**مثال ۸.۲.** با یک مثال عدم آگاهی کامل را بیان می‌کنیم. فرض

کنید سه گزاره، که با  $A$ ,  $B$  و  $C$  نشان داده شده است، وجود دارد و هیچ‌گونه اطلاعاتی درباره این که کدام درست هستند قرار دارید. شما فقط می‌دانید که تنها و تنها یکی از آن‌ها درست است و محتويات گزاره‌ها جز این نکته که می‌دانیم فقط و فقط یکی از آن‌ها صحیح است، نداریم. بنابراین هیچ دلیلی ندارد که یکی از آن‌ها را بیشتر از بقیه باور کنیم. به این ترتیب باور ما درباره درستی

<sup>۳۳</sup>Plausibility function

<sup>۳۴</sup>Vacuous belief function

**تعريف ۲.** ۱۰.۲. به  $K = \frac{1}{N}$  ثابت نرمال‌سازی جمع‌های متعامد  $m_1$  و  $m_2$  می‌گویند. ثابت نرمال‌سازی اختلاف بین دو تابع جرم را

$$\log\left(\frac{1}{N}\right) = -\log(N) = -\log(1 - E)$$

را اختلاف وزنی بین  $m_1$  و  $m_2$  می‌نامند و با

$$wett(m_1, m_2)$$

نشان می‌دهند.

آن‌ها برابر با

$$Bel(A) = Bel(B) = Bel(C) = \alpha$$

است که در آن  $\alpha \in [0, 1]$ . علاوه بر این هیچ دلیلی نداریم که باور کمتری به  $A \cup B$  در مقابل  $C$  داشته باشیم. در نتیجه:

$$Bel(A \cup B) = Bel(C) = \alpha.$$

تابع باور پوچ تنها تابع باوری است که این شرایط را دارا است زیرا

$$Bel(A \cup B) = Bel(A) = Bel(B) = \alpha$$

است و طبق تعريف ۳.۲ داریم:

### ۳ مدل باور انتقال‌پذیر

#### ۱.۳ فضای گزاره‌ای<sup>۳۶</sup>

فرض کنید  $L$  یک زبان گزاره‌ای متناهی و  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$

مجموعه جهان‌های متناظر با تعابیر  $L$  باشد. گزاره‌ها زیر مجموعه‌های  $\Omega$  را شناسایی می‌کنند. برای هر گزاره  $X$ ، فرض کنید  $\Omega \subseteq [[X]]$  مجموعه جهان‌هایی باشد که توسط  $X$  معرفی می‌شود.  $A$  را زیر مجموعه‌ای از  $\Omega$  در نظر بگیرید، آنگاه  $f_A$  هر گزاره‌ای است که  $A$  را مشخص می‌کند، بنابراین داریم

$$A = [[f_A]].$$

بر اساس تعريف، یک جهان واقعی<sup>۳۷</sup>  $\bar{\omega}$  وجود دارد که یک عضو از  $\Omega$  است. دو گزاره  $A$  و  $B$  در  $L$  را به طور منطقی معادل گفته می‌شوند و با  $A \equiv B$  نشان داده می‌شوند، اگر و فقط اگر  $[[A]] = [[B]]$

$\Pi$  را یک افزار  $\Omega$  (چارچوب تشخیص) قرار دهید. اعضای افزار  $\Pi$ ، جبر بولی  $\mathfrak{R}$  را می‌سازند. اعضای افزار  $\Pi$  را عنصر  $\mathfrak{R}$  می‌نامند و با  $At(\mathfrak{R})$  نشان می‌دهند و زوج  $(\Omega, \mathfrak{R})$  را فضای گزاره‌ای می‌نامند. برای راحتی کار تفاوتی بین زیرمجموعه‌های  $\Omega$  و گزاره‌های تعیین شده توسط آن‌ها قائل نمی‌شوند و از نمادگذاری یکسانی برای هر دو استفاده می‌کنند.

همه باورهای پذیرفته شده توسط شما در زمان  $t$  درباره این که

$$Bel(A \cup B) \geq Bel(A) + Bel(B) - Bel(A \cap B).$$

اگر  $A \cap B = \emptyset$  باشد، آنگاه  $Bel(A \cap B) = 0$  می‌شود و نامساوی بالا تبدیل به  $\alpha \geq 2\alpha$  می‌شود که تنها جواب آن  $= 0$  است. در نتیجه تابع باور برای هر  $\Omega \subseteq A$  برابر صفر است که همان تابع باور پوچ است.

**تعريف ۹.۲.** ۲ قانون ترکیب دمپستر شفر: تابع جرم  $m_1$  و  $m_2$  روی چارچوب یکسان  $\Omega$  را در نظر بگیرید. فرض کنید رابطه

$$E = \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y) < 1$$

برقرار است و قرار دهید

$$N = \sum_{X \cap Y = \emptyset} m_1(X)m_2(Y).$$

بنابراین تابع  $m$  یک تابع جرم است که آن را جمع متعامد<sup>۳۸</sup>  $m_1 \oplus m_2$  می‌نامند و با نماد  $m_{1,2}$  یا  $m_1 \oplus m_2$  نشان می‌دهند مشروط بر آن که دارای شرایط زیر باشد:

$$m(\emptyset) = 0,$$

$$m_{1,2}(A) = \frac{1}{N} \sum_{X \cap Y = A} m_1(X)m_2(Y),$$

$$A \neq \emptyset$$

اگر  $N = 0$ ، در نتیجه جمع متعامد  $m_1 \oplus m_2$  وجود ندارد و  $m_1$  و  $m_2$  در تناقض با یکدیگرند.

<sup>۳۵</sup>Orthogonal sum

<sup>۳۶</sup>Propositional space

<sup>۳۷</sup>Actual world

<sup>۳۸</sup>Evidential corpus

$$\begin{aligned} P(M) &= P(M|Reliable)P(Reliable) \\ &+ P(M|NotReliable) \\ P(NotReliable) & \\ &= 1 \times 0.7 + 0.5 \times 0.3 = 0.85 \end{aligned}$$

*Reliable* به قابلیت اعتماد شاهد برمی‌گردد. در مدل باور انتقال‌پذیر یک باور ۰.۷ به قاتل داده می‌شود یعنی  $Bel(M)$  برابر ۰.۷ است. در روش احتمالی مقدار ۰.۷ به عنوان مؤلفه موجه و به مقدار ۰.۱۵ به عنوان مؤلفه بسته به بخت در نظر گرفته می‌شود. مدل باور انتقال‌پذیر فقط شامل مؤلفه‌های موجه است. حال فرض کنید که دو مرد مظنون وجود دارد: حسن و حسین. و همچنین می‌دانید که حسن قاتل نیست. بنابراین قابلیت اعتماد ۰.۷ شما طبق شهادت اولیه به "قاتل حسن یا حسین است" با اطلاعات جدید درباره حسن، حالا به "قاتل حسن است" دلالت می‌کند.

### ۳.۳ کاستن

فرض کنید شما هیچ باوری روی چارچوب تشخیص  $\Omega$  ندارید، اما یک عامل قابل اعتمادی باورش روی  $\Omega$  را به شما دیکته می‌کند که این باور را توسط تشخیص باور پایه  $m_{\Omega}$  نشان داده می‌شود. عامل باید کاملاً قابل اعتماد باشد تا شما باورهایش را پذیرید و به عنوان باورهای خودتان اتخاذ کنید. حال فرض کنید عامل کاملاً قابل اعتماد نیست.  $m_0$  باور پیشین شما درباره قابلیت اعتماد این عامل است که در آن

$$\begin{aligned} m_0 &= 1 - \alpha, && \text{(قابل اعتماد نبودن)} \\ m_0 &= \alpha. && \text{(قابل اعتماد بودن)} \end{aligned}$$

ترکیب باور پیشین شما  $m_0$  با  $m_{\Omega}$  روی  $\Omega$  منجر به یک باور کاسته شده  $Bel_{\Omega}^{\alpha}$  می‌شود (شفر، ۱۹۷۶).

بنابراین  $Bel_{\Omega}^{\alpha}$  برای هر  $A \subseteq \Omega$  به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} bel_{\Omega}^{\alpha}(A) &= \alpha bel_{\Omega}(A), \\ bel_{\Omega}^{\alpha}(\Omega) &= \alpha bel_{\Omega}(\Omega) + (1 - \alpha). \end{aligned}$$

جهان، جهان واقعی  $\bar{\omega}$  است، توسط یک مجموعه شواهد  $(EC_t^y)^{38}$  می‌کند:

معین می‌شوند. باورها در دو سطح فکری آشکار می‌شوند: سطح باوری که باورها در این سطح وارد می‌شوند، ترکیب می‌شوند و اصلاح می‌شوند و سطح شرط‌بندی که باورها برای گرفتن تصمیم استفاده می‌شوند. در واقع ذهنیت و قضاوت شخصی شما است که  $\bar{\omega} \in A$  برای هر  $A \in \mathcal{R}$  را توضیح می‌دهد.

وقتی می‌گوییم " $A$  درست است" یا "درستی در  $A$  است" همان معنی  $\bar{\omega} \in A$  می‌دهد. در سطح شرط‌بندی از باورها برای گرفتن تصمیم استفاده می‌شود. فرض بر این است که سطوح‌های باور و سطح شرط‌بندی مجزا هستند. در سطح باور، باورها توسط توابع باور نمایش داده می‌شوند و در سطح شرط‌بندی، یک تابع احتمال را القا می‌کند که برای تصمیم‌گیری استفاده می‌شود.

### ۲.۳ شرطی کردن

$m$  را تشخیص باور پایه روی چارچوب تشخیص  $\Omega$  در نظر بگیرید. فرض کنید که شواهد جدیدی می‌گوید که  $B \subseteq \Omega$  درست است. تشخیص باور پایه  $m$  به

$$m_B(A) : \mathcal{R} \longrightarrow [0, 1]$$

تبديل می‌شود که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} m_B(A) &= c \sum_{x \subseteq B} m(A \cup x) A \subseteq B \\ m_B(A) &= 0 \quad A \not\subseteq B \\ m_B(\emptyset) &= 0 \quad c = \frac{1}{1 - \sum_{x \subseteq B} m(x)} \end{aligned}$$

مثال ۱.۳. فرض کنید در یک حادثه قتل شاهد معتمدی شهادت می‌دهد که قاتل یک مرد است و  $\alpha = 0.7$  = قابلیت اعتمادی است که شما به این شهادت می‌دهید. فرض کنید که شما از قبل یک باور برابری برای زن یا مرد بودن قاتل دارید. در روش کلاسیک احتمالی، احتمال اینکه قاتل مرد است،  $P(M)$  را این گونه محاسبه

<sup>۳۹</sup>Discounting

<sup>۴۰</sup>Least commitment principle

### ۴.۳ اصل کمترین تعهد<sup>۴۰</sup>

اصل کمترین تعهد نقش مهمی در نظریه توابع باور ایفاء می‌کند و مانند اصل ماقسیم آنتروپی در نظریه احتمال بیزی عمل می‌کند. اصل کمترین تعهد اظهار می‌دارد زمانی که دوتابع سازگار با یک مجموعه قیود در اختیار است، مناسب‌ترین آن‌ها تابع باور با آگاهی بخشی کم‌تر است.

$$Bel_i(\bar{\Lambda}_i^{-1}(B)) = Bel(B)$$

برای هر  $i = 1, 2, B \in \mathcal{R}$  برقرار باشد.

می‌گوییم  $m$  متعهدتر از  $m'$  است اگر

$$Pl(A) \leq Pl'(A) \quad \forall A \subseteq \Omega,$$

و یا به طور معادل

$$Bel(A) \geq Bel'(A) \quad \forall A \subseteq \Omega,$$

باشد.

### ۵.۳ باورهای سازگار<sup>۴۱</sup> و تظریف شده<sup>۴۲</sup>

فرض کنید  $[[EC_t^y]]$  نشان دهنده مجموعه جهان‌هایی در  $\Omega$  است که در آن همه گزاره‌های القا شده روی  $\Omega$  از  $EC_t^y$  درست باشد. همه جهان‌هایی در  $\Omega$  که در  $[[EC_t^y]]$  نیستند را به عنوان "غیرممکن" توسط شما در زمان  $t$  قبول می‌کنیم. دو گزاره  $A$  و  $B$  برای شما در زمان  $t$  را معادل اعتقادی گویند و با  $A \cong B$  نشان می‌دهند اگر فقط اگر

$$[[EC_t^y]] \cap [[A]] = [[EC_t^y]] \cap [[B]].$$

### تعريف ۴.۳. اصل سازگاری:

دو فضای باور  $(\Omega_i, \mathcal{R}_i, Bel_i)$  را در نظر بگیرید که نمایش دهنده باور شما روی دو جبر  $\mathcal{R}_1$  و  $\mathcal{R}_2$  القا شده توسط  $EC_t^y$  باشند. فرض کنید برای هر  $A_1 \in \mathcal{R}_1$  و  $A_2 \in \mathcal{R}_2$  اگر  $A_1 \cong A_2$  آن‌گاه

$$Bel_1(A_1) = Bel_2(A_2)$$

برقرار می‌شود. این اصل به‌این معنی است که گزاره‌های معادل اعتقادی درجه باور یکسانی را دارند.

### ۶.۳ احتمال شرط‌بندی

یک فضای باور  $(\Omega, \mathcal{R}, Bel)$  را در نظر بگیرید که در آن  $Bel$  باورهای شما را در سطح باور اندازه‌گیری می‌کند. وقتی که تصمیمی وابسته به  $w_0$  باید ساخته شود، باید یک تابع احتمالی روی  $\mathcal{R}$  برای اتخاذ تصمیم بهینه ایجاد کرد. فرض کنید تابع

دو زبان گزاره‌ای  $L_1$  و  $L_2$  را در نظر بگیرید. همیشه می‌توان یک زبان گزاره‌ای مشترکی مانند  $L$  ساخت که در آن هر گزاره  $L_1$  یا  $L_2$  گزاره‌ای از  $L$  می‌باشد.  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  را مجموعه‌های جهانی مرتبط با  $L_1$  و  $L_2$  و قرار دهید. هر جهان  $\Omega_1$  با یک مجموعه از  $\Omega$  مرتبط است. تصویر جهان‌های  $\Omega_1$  و  $\Omega_2$  افزایی از  $\Omega$  را تشکیل می‌دهند. بنابراین هر جا دو فضای گزاره‌ای باشد، می‌توان از یک  $\Omega$  مشترک بدون این که از کلیت کاسته شود استفاده کرد. در حقیقت در یک فضای گزاره‌ای  $(\Omega, \mathcal{R})$  جزء مهم جبر بولی  $\mathcal{R}$  است. همه باورها روی جبر  $\mathcal{R}$  ساخته می‌شوند نه روی  $\Omega$ . بنابراین تعریف دو فضای گزاره‌ای  $(\Omega_i, \mathcal{R}_i)$  با یک مجموعه‌های مختلف  $\Omega_i$  با تعریف دو فضای گزاره‌ای  $(\Omega, \mathcal{R}_i)$  و  $i = 1, 2$  برابر هستند.

دو فضای گزاره‌ای  $(\Omega, \mathcal{R}_1)$  و  $(\Omega, \mathcal{R})$  را در نظر بگیرید.  $\Lambda_1$  را یک نگاشت یک به چند مقداری از  $\mathcal{R}_1$  به  $\mathcal{R}$  قرار دهید که در آن هر عنصر  $\mathcal{R}_1$  روی یک گزاره  $\mathcal{R}$  نگاشته می‌شود. تصویر عنصرهای  $\mathcal{R}_1$  یک افزای از  $\Omega$  را تشکیل می‌دهد.  $\Lambda_1$  را تظریف  $\mathcal{R}_1$  به  $\mathcal{R}$  می‌نامند.  $\mathcal{R}_1$  را یک تظریف از  $\mathcal{R}$  و  $\mathcal{R}$  را ضخیم شده<sup>۴۳</sup>  $\mathcal{R}_1$  می‌نامند(شفر ۱۹۷۶). برای  $B \in \mathcal{R}$ ، قرار دهید:

$$\bar{\Lambda}_1^{-1}(B) = \cup\{A : A \in \mathcal{R}_1, \Lambda_1(A) \cap B \neq \emptyset\}.$$

<sup>۴۰</sup>Consistent

<sup>۴۱</sup>Refinement

<sup>۴۲</sup>Coarsening

<sup>۴۳</sup>Doxastically Equivalent

به راحتی می‌توان نشان داد که  $BetP$  تعیین شده از فرمول بالا یک تابع احتمال است و انتقال شرط‌بندی از یک تابع احتمال نیز تابع احتمال است.

**مثال ۵.۳.** هدف از مطرح کردن این مثال نشان‌دادن تفاوت راه حل مدل باور انتقال‌پذیر و روش بیزی است.

فرض کنید قاضی حکم داده است که آقای جعفری باید توسط یکی از سه نفری (مرتضی، مصطفی، مینا) که در اتاق انتظارش بوده‌اند به قتل رسیده باشد. قاضی قاتل فرضی را از پرتاب تاس انتخاب خواهد کرد و بدین گونه عمل می‌کند که اگر عدد زوج بیاید قاتل زن است و اگر عدد فرد بیاید قاتل مرد است. شما، کارشناس، از روند بالا اطلاع دارید، ولی نتیجه را نمی‌دانید و همچنین نمی‌دانید در صورت فرد آمدن تاس قاضی چگونه مرتضی یا مصطفی را انتخاب می‌کند. با توجه به اطلاعات موجود در زمان  $t_0$  شما یک امتیاز ۱-۱ به جنسیت قاتل می‌دهید.

در زمان  $t_1 < t_0$  شما می‌دانید که اگر قاضی مرتضی را به عنوان قاتل انتخاب نکرده است پس مرتضی حتماً به اداره پلیس رفته و توجیهی برای زمان قتل ارائه داده است. قابل ذکر است که این اطلاعات تنها این مفهوم را می‌رساند که

$$P = \text{(مرتضی توجیهی کامل دارد امروزی قاتل نیست)}$$

روش مدل باور انتقال‌پذیر:

که  $E_0$  را قاتل در نظر بگیرید. اطلاعات در مورد اتاق انتظار  $E_0$  و پرتاب تاس تخصیص باور پایه  $m_0$  را القا می‌کند:

$$E_0 : k \in \Omega = \{\text{مینا، مصطفی، مرتضی}\},$$

$$\mathfrak{R}_0 = 2^\Omega,$$

$$m_0 = \{\text{مینا مصطفی، مرتضی}\} = 1.$$

پرتاب تاس (شواهد  $E_1$ ) تخصیص باور پایه زیر را القا می‌کند:

$$E_1 : \text{مرد، زن} = \mathfrak{R}_1 = \{\text{آزمون تاس}\},$$

$$m_1\{\text{زن}\} = 0.5, \quad m_1\{\text{مرد}\} = 0.5,$$

شرطی کردن  $m_0$  روی  $E_1$  توسط قانون دمپستر شرطی تخصیص

احتمال تعریف شده روی  $\mathfrak{R}$  یک تابعی از تابع باور  $Bel$  است. بنابراین باید  $Bel$  را به تابع احتمالی انتقال داد تا برای انتخاب بهترین تصمیم بتوان از آن استفاده کرد.  $BetP$  این تابع احتمال را مشخص می‌کند. این انتقال شرط‌بندی می‌نامند و با  $\Gamma_{\mathfrak{R}}$  نشان می‌دهند. اندیس  $\mathfrak{R}$  در  $\Gamma_{\mathfrak{R}}$  جبر بولی را نشان می‌دهد که  $Bel$  و  $BetP$  روی آن تعریف شده‌اند. بنابراین، داریم

$$BetP = \Gamma_{\mathfrak{R}}(Bel),$$

که در آن  $Bel$  و  $BetP$  از  $\mathfrak{R}$  به  $[0, 1]$  نگاشت می‌شوند.  $BetP$  را یک احتمال شرط‌بندی می‌نامند که اندازه احتمال برای اتخاذ تصمیم است.  $BetP$  یک اندازه احتمال کلاسیک است. تحت فرضیات زیر می‌توان یک  $\Gamma_{\mathfrak{R}}$  یکتا به دست آورد (اسمیتز ۱۹۹۰):

فرض ۱: فرض کنید  $Bel_1$  و  $Bel_2$  دو تابع باور روی فضای گزاره‌ای  $(\Omega, \mathfrak{R})$  هستند و  $\Gamma_{\mathfrak{R}}$  را یک انتقال شرط‌بندی در نظر بگیرید که یک تابع باور تحت  $\mathfrak{R}$  را به یک تابع احتمال  $BetP$  تحت  $\mathfrak{R}$  انتقال می‌دهد. پس برای هر  $\alpha \in [0, 1]$  دارای خاصیت زیر است:

$$\Gamma_{\mathfrak{R}}(\alpha Bel_1 + (1 - \alpha) Bel_2) = \alpha \Gamma_{\mathfrak{R}}(Bel_1) + (1 - \alpha) \Gamma_{\mathfrak{R}}(Bel_2).$$

فرض ۲: احتمال شرط‌بندی مربوط به تصویر  $A \in \mathfrak{R}$  بعد از جایگشت عضوهایی از  $\mathfrak{R}$  با احتمال شرط‌بندی مربوط به  $A$  قبل از جایگشت برابر است.

فرض ۳: احتمال شرط‌بندی یک پیشامد غیرممکن برابر صفر است.

### ۷.۳ انتقال شرط‌بندی

فضای باور  $(\Omega, \mathfrak{R}, Bel)$  در نظر بگیرید. قرار دهید

$$BetP = \Gamma_{\mathfrak{R}}(Bel).$$

تنها راه حلی که همه شرایط بالا را داشته باشد برای هر عضو  $\omega$  از  $\mathfrak{R}$  به صورت زیر است:

$$BetP(\omega) = \sum_{A: \omega \subseteq A \in \mathfrak{R}} \frac{m(A)}{|A|(1 - m(\phi))}$$

که در آن  $|A|$  تعداد عضوهای  $\mathfrak{R}$  در  $A$  و  $m$  تخصیص باور پایه مرتبط با  $Bel$  است

$$BetP(A) = \sum_{\omega: \omega \in At(\mathfrak{R}), \omega \subseteq A \in \mathfrak{R}} BetP(\omega) \quad \forall A \in \mathfrak{R}$$

روش بیزی:

باور پایه  $m_{0,1}$  را القا می‌کند:

برای استفاده از روش بیزی درجه باورها توسط توزیع احتمال اندازه‌گیری می‌شود.

$$E_{01} : E_0, E_1 \mathfrak{R}_{01} = 2^\Omega$$

$E_1$  داده شده است، شما یک توزیع احتمال  $P_1$  روی  $\Omega = \{\text{مینا، مصطفی، مرتضی}\}$

$$m_{0,1} = 0.5$$

$$m_{0,1} = 0.5 \quad \{\text{مصطفی، مرتضی}\}$$

جرم باور داده شده به  $\{\text{مصطفی، مرتضی}\}$  مربوط به قسمتی از باور می‌سازید:

$$P_1(k \in \{\text{مینا}\}) = 0.5,$$

$$P_1(k \in \{\text{مصطفی، مرتضی}\}) = 0.5,$$

شما روی مرد یا زن بودن قاتل با نسبت ۱ به ۱ شرط می‌بندید. وقتی که  $E_2$  را می‌دانید، شما  $P_{12}$  که احتمال شرطی  $P_1$  روی  $\{\text{مینا، مصطفی}\}$  را به دست می‌آورید:

است که "مرتضی یا مصطفی" را تأکید می‌کند، اما به دلیل کمبود اطلاعات نمی‌تواند تمیز بیشتری بین مرتضی و مصطفی بدهد. توجیه مرتضی (شواهد  $E_2$ ) تخصیص باور پایه  $m_2$  را القا می‌کند:

$$\begin{aligned} E_2 : A &= \text{"مرتضی توجیهی دارد"} \\ &= \text{"مرتضی به اداره پلیس رفته است"} \end{aligned}$$

$$E_2 : k \in \{\text{مینا، مصطفی}\}, \mathfrak{R}_2 = 2^\Omega,$$

$$m_2 = 1. \quad \{\text{مصطفی، مینا}\}$$

شرطی کردن  $m_{0,1}$  روی  $E_2$  توسط قانون دمپستر شرطی منجر به  $m_{0,1,2}$  می‌شود:

$$E_{012} : E_{01}, E_2 \mathfrak{R}_{012} = 2^\Omega$$

$$m_{0,1,2} = m_{0,1,2} = 0.5 \quad \{\text{مصطفی}\}$$

جرم باور پایه‌ای که به "مرتضی یا مصطفی" داده شده بود به صورتی که درمورد روش مدل باور انتقال پذیر به یک جواب نهایی مصطفی انتقال یافت. نسبت شرط شما روی مرد در مقابل زن رسیدیم که این مزیت نشان‌دهنده مدل باور انتقال پذیر نسبت به روش بیزی را است. هنوز مانند قبل ۱ به ۱ است.

## مراجع

- [1] Bosc, P. and Prade, H. (1995). *An introduction to fuzzy set and possibility theory-based approaches to the treatment of uncertainty and imprecision in data base management systems*, Puerto Andraitx, 2.
- [2] Dempster, A.P. (1962). On direct probabilities, *J. the Royal Statistical Society, 25*, 100–110.
- [3] Dempster, A.P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multivalued mapping, *Annals of Mathematical Statistics, 38*, 325–339.
- [4] Denoeux, T. (2009). Extending stochastic ordering to belief functions on the real line, *Information Sciences, 179*, 1362-1376.

- [5] Fisher, R. A. (1930). Inverse probability. *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **26**, 154–57.172–173. Reprinted in Bennett, J. H. (1971). Collected Papers of R. A. Fisher 2, Univ. of Adelaide
- [6] Kohlas, J. and Monney, P.A. (1994). *Representation of Evidence by Hints*. In: R. R. Yager, M. Fedrizzi, J. Kacprzyk (eds.) Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence. Wiley, 473-492.
- [7] Kohlas, J. and Monney, P. A. (1995). *A mathematical theory of hints: An approach to dempster-shafer theory of evidence*. *Economics and Mathematical Systems* , 425, Springer-Verlag.
- [8] Kyburg, H. E. Jr. (1961). *Probability and the logic of rational belief*. Wesleyan Univ. Press.
- [9] Lucas, C. and Araabi, BN. (1999). Generalization of the Dempster-Shafer theory: A fuzzy valuedmeasure, *IEEE Trans Fuzzy Syst*,**7**,255–270.
- [10] Nguyen, Hung T. (1978). On random sets and belief functions, *J. Mathematical Analysis and Applications*, **65**,531-542.
- [11] Ristic, B. and Smets, P. (2004). Belief function theory on the continuous space with an application to model based classification, *In IPMU-2004 (Ed.),Information processing and management of uncertainty*, 1119–1126.
- [12] Rusconi, Enrique H. (1987). Epistemic logics, probability, and the calculus of evidence, *IJCAI*, **87**, 924-931.
- [13] Shafer, G. (1976). *A mathematical theory of evidence*. Princeton University Press, Princeton, NJ.
- [14] Shafer, G. (1987). Belief functions and possibility measures of The Analysis of Fuzzy Information, **1**, 51-84.
- [15] Smets, P. (1961). Consistency in statistical inference and decision, *J. Roy. Statist.Soc*, **23**,1-37.
- [16] Smets, P. (2005). Belief functions on real numbers, *International J. Approximate Reasoning*, **40**, 181–223.
- [17] Smets, P. and Kennes, R. (1994). The Transferable Belief Model, *Artificial Intelligence*, **66**, 191–243.
- [18] Strat, T. H. (1984). Continuous belief functions for evidential reasoning, *National conference on artificial intelligence*, 308–313.
- [19] Torabi, H. Davvaz, B and. Behboodian, J.( 2007). Inclusiveness measurement of random events using rough set theory, *International J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, **15**, 483-491.
- [20] Walley, P. (1991). *Statistical reasoning with imprecise probabilities*. Chapman and Hall,London.
- [21] Yager, R. (1986). The entailment principle for Dempster-Shafer granules, *Int. J. Intell. Systems*, **1**, 247-262.
- [22] Yen, J. (1990). Generalizing the Dempster-Shafer theory to fuzzy sets, *IEEE Trans Syst Man Cybern*, **20**, 559 –570.