

آنالیز ترکیبی ترازو و وزنه‌ها (قسمت دوم)

خسرو فضلی^۱

چکیده

در قسمت اول مقاله [۱] به این موضوع پرداختیم که با تعدادی وزنه مشخص و یک ترازوی دوکفه چند مقدار مختلف قابل توزین است. در مقاله حاضر ضمن ادامه مطلب به بررسی این مسئله که چه مقادیری قابل توزین هستند، نیز می‌پردازیم.

۱ مقدمه و یادآوری

که همه وزنه‌ها برابر باشند.

بنابراین در حالت کلی:

$$n \leq M(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{3^n - 1}{2}$$

همچنین لازم است به این مطلب توجه شود که اگر C یک عدد

حقیقی مثبت باشد، آنگاه:

$$M(cx_1, cx_2, \dots, cx_n) = M(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

زیرا هر مقدار قابل توزین با وزنه‌های x_n, x_2, x_1 کمیتی

به صورت $W = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$ است که $\alpha_i = 0, \pm 1$ و درنتیجه $cW = \sum_{i=1}^n \alpha_i(cx_i)$ بنابراین تناظر یک به یکی بین

همانگونه که در [۱] نشان داده شده است با وزنه‌های

x_n, \dots, x_2, x_1 و یک ترازوی دوکفه حداقل تعداد $\frac{3^n - 1}{2}$ مقدار

مختلف قابل توزین است. پس اگر نماد $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$

نشان دهنده تعداد مقادیر قابل توزین با مجموعه وزنه‌های

x_n, x_2, x_1 باشد، داریم:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \frac{3^n - 1}{2}$$

ضمناً نشان دادیم که یک شرط کافی برقراری تساوی

این است که نامساویهای $x_i < 2 \sum_{i=1}^{k-1} x_i \leq k \leq n$ برای x_k برقرار باشد. از طرفی نیز به سادگی دیده می‌شود که همواره

$M(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq n$ و تساوی فقط در صورتی برقرار است

^۱ خسرو فضلی، گروه ریاضی دانشگاه کردستان

۳ تعداد مقادیر قابل توزین

بدیهی است که ماهیت کمی وزنهای تأثیر قاطعی بر تعداد مقادیر قابل توزین دارد. جنبه‌هایی از این مطلب در [۱] بررسی شده است. در این بخش به بیان برخی نتایج دیگر در این زمینه می‌پردازیم.

قضیه ۲. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n اعداد طبیعی بیشتر از واحدی هستند که دو به دو نسبت به هم اول می‌باشند. در این صورت با وزنهای $\ln x_1, \ln x_2, \dots, \ln x_n$ دقیقاً تعداد $\frac{3^n - 1}{3}$ مقدار مختلف قابل توزین است.

اثبات. هر مقدار قابل توزین M کمیتی به صورت $M = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i$ است که $\alpha_i = 0 \pm 1$. نشان می‌دهیم که مقدار M تناظر یک به یکی با ضرایب $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ دارد. برای این منظور فرض کنید ضرایب $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ چنان هستند که:

$$\begin{aligned} M &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i = \sum_{i=1}^n \beta_i \ln x_i \\ \ln \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} &= \ln \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i} \\ \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i} &= \prod_{i=1}^n x_i^{\beta_i} \\ \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i - \beta_i} &= 1 \end{aligned}$$

واضح است که $\alpha_i - \beta_i = \pm 1$. اما با توجه به اینکه x_i ها نسبت به هم اول هستند، فقط امکان $\alpha_i - \beta_i = 0$ قابل قبول است، زیرا اگر برای بعضی نهاده داشته باشیم $\alpha_i - \beta_i \neq 0$ ، آنگاه یا $\alpha_i - \beta_i > 0$ یا $\alpha_i - \beta_i < 0$. پس اگر x_i هایی که برای آنها $\alpha_i - \beta_i = \gamma_i > 0$ باشد، را با y_1, \dots, y_r و مواردی را که $\alpha_i - \beta_i = d_i < 0$ باشد، w_1, \dots, w_s نشان دهیم داریم:

$$y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2} \dots y_r^{\gamma_r} = w_1^{d_1} w_2^{d_2} \dots w_s^{d_s}$$

اما این تساوی غیرممکن است زیرا اولاً y_i ها و w_i ها مقادیر مختلف هستند و ثانیاً همه عوامل چه در سمت راست

مقادیر قابل توزین با x_1, x_2, \dots, x_n و مجموعه وزنهای cx_1, \dots, cx_2, cx_n وجود دارد.

۲ مقادیر قابل توزین

در مسأله وزنهای و ترازو، علاوه بر این سؤال که چند مقدار مختلف را می‌توان وزن کرد، این سؤال نیز مطرح است که چه مقادیری قابل توزین می‌باشد؟ تحت شرایط خاصی که در قضیه زیر آمده می‌توان به این سؤال جواب داد:

قضیه ۱. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_n مقادیر صحیحی هستند به طوری که $\sum_{i=1}^n x_i = N$. در این صورت هر مقدار صحیح از ۱ تا N قابل توزین است.

اثبات. چون وزنهای صحیح هستند، پس هر کمیت قابل توزین نیز عددی صحیح است که بزرگترین آنها $\sum_{i=1}^n x_i = N$ می‌باشد و چون دقیقاً N مقدار را می‌توان توزین نمود، لذا این مقادیر عبارتند از $1, 2, \dots, N$.

مثال ۱. با پنج وزن $1, 2, 3, 9, 27, 81$ تمام مقادیر صحیح از ۱ تا ۱۲۱ قابل توزین است، زیرا همچنانکه در قسمت اول مقاله [۱]، نشان دادیم با این وزنهای تعداد $\frac{3^5 - 1}{3 - 1} = 121$ مقدار را می‌توان وزن کرد و مجموع آنها نیز ۱۲۱ است.

حال فرض کنید با وزنهای دلخواه x_1, x_2, \dots, x_n تعداد N مقدار قابل توزین است، و:

$$k = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{N}, \quad y_i = \frac{x_i}{k} \quad i = 1, 2, \dots, n$$

در این صورت N صورت $\sum_{i=1}^n y_i = \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{k} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{k} = \frac{Nk}{k} = N$ است. پس اگر $\sum_{i=1}^n y_i = N$ مقادیر صحیحی باشند، تساوی $\sum_{i=1}^n y_i = N$ نشان می‌دهد که با این وزنهای هر مقدار صحیح از ۱ تا N قابل توزین است و در نتیجه با x_1, x_2, \dots, x_n متناظراً مقادیر $Nk, \dots, 2k, k$ را می‌توان وزن کرد.

می‌دهیم. حال اگر همه n وزنه $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n$ را به کاربریم مقادیری به شرح زیر را می‌توان توزین نمود:

$$(1) \quad W_i \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(2) \quad w_i + x_n \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(3) \quad |w_i - x_n| \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$(4) \quad x_n$$

واضح است که تمام مقادیر گروه (۲) با هم تفاوت دارند و به علت اینکه x_n کمیتی گنج است و w_i ها گویا هستند، مجموعه مقادیر (۳) از هم متمایز بوده و در ضمن با (۲) نیز اشتراکی ندارند. همچنین به سادگی دیده می‌شود که تک مقدار x_n نیز با هیچکدام از موارد قبلی برابر نیست. بنابراین $1 + 2N$ مقدار مختلف قابل توزین است.

نتیجه. تحت شرایط قضیه (۲) اگر

$$M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = \frac{3^{n-1} - 1}{2}$$

$$M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = \frac{3^n - 1}{2}$$

اثبات.

$$\begin{aligned} M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) &= 3N + 1 \\ &= \frac{3^{n-1} - 1}{2} + 1 \\ &= \frac{3^n - 3}{2} + 1 \\ &= \frac{3^n - 1}{2} \end{aligned}$$

و چه در سمت چپ نسبت به هم اولند. بنابراین باید برای هر i داشته باشیم $\beta_i = \alpha_i$ و درنتیجه هر مقدار M به صورت منحصر به فرد با ضرایب $\alpha_1, \dots, \alpha_2, \alpha_1$ مشخص می‌شود. چون 3^n ضریب وجود دارد که یکی از آنها مشخص کننده $M = 0$ و نصف بقیه مشخص کننده $< M$ هستند، لذا تعداد $\frac{3^n - 1}{2}$ مقدار برای $> M$ داریم که همان مقادیر قابل توزین می‌باشند.

نتیجه. اگر x_1, x_2, \dots, x_n اعداد اول متمایز بزرگتر از واحد باشند، آنگاه دویه دو نسبت به هم اول هستند و درنتیجه با وزنهای $\ln x_n, \dots, \ln x_2, \ln x_1$ تعداد $\frac{3^n - 1}{2}$ مقدار مختلف قابل توزین است.

در قضیه زیر تأثیر گویابودن و گنجگوبودن وزنهای تا حدی مشخص شده است.

قضیه ۳. فرض کنید x_1, x_2, \dots, x_{n-1} مقادیر گویا هستند و x_n گنجگ می‌باشد در این صورت:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n) = 3M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) + 1$$

اثبات. برای سادگی قرار دهید:

$$M(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = N$$

چون x_1, x_2, \dots, x_{n-1} گویا هستند، پس N مقدار قابل توزین با آنها نیز گویا است. این مقادیر را با w_1, w_2, \dots, w_n نشان

مراجع

[۱] خسرو فضلی، آنالیز ترکیبی ترازو و وزنهای، اندیشه آماری، سال اول، شماره اول.