

مدلهای چندمتغیری میانگین متحرک مرتبه ۹

عباس مقصودی

چکیده

در این مقاله مدل‌های سری زمانی چندمتغیری میانگین متحرک معرفی شده، برخی خواص این مدل‌ها به همراه یک حالت خاص مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مقدمه

می‌تواند خود عامل مهمی برای برآزندن یک مدل احتمالی به داده‌ها باشد.

قسمتی از روش‌های آماری که به بررسی و تجزیه و تحلیل این گونه مشاهدات می‌پردازد، تجزیه و تحلیل سریهای زمانی نامیده می‌شود. این تحلیل می‌تواند با استفاده از یک متغیر یا بیش از یک متغیر صورت گیرد. اگر فقط با یک متغیر سروکار داشته باشیم، می‌توانیم ارتباط بین مشاهدات متوالی از این متغیر در طول زمان را با استفاده از تحلیل سریهای زمانی مشخص کنیم. در این صورت به این روش تحلیل سریهای زمانی یک متغیری می‌گویند.

اما اگر تعداد متغیرهای مورد بررسی بیش از یکی باشد، در این صورت هدف، پیدا کردن ارتباط هم‌زمان بین مشاهدات متوالی هر یک از متغیرها با یکدیگر و ارتباط متقابل بین متغیرها در هر لحظه از زمان است. مانند موارد زیر:

در اکثر روشها و محاسبات آماری معمولاً آمارشناسان به بررسی مشاهداتی می‌پردازند که فرض می‌شود این مشاهدات از هم مستقل هستند. در بسیاری از تکنیکها و روش‌های آماری وابستگی بین مشاهدات به عنوان یک عامل مزاحم در نظر گرفته می‌شود. از این رو سعی می‌شود که با استفاده از روش‌هایی از جمله استفاده از اصل تصادفی کردن نمونه‌گیری، از این وابستگی احتراز شود. این در حالی است که بسیاری از داده‌ها و مشاهداتی که در طبیعت و اجتماع با آن روبرو هستیم طبیعتی وابسته دارند و به طور کاملاً مشخصی به هم مربوط هستند و نمی‌توان ارتباط این مشاهدات را نادیده گرفت. برای مثال مقدار زیادی از داده‌های مربوط به علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و تجارت به صورت سریهای زمانی رخ می‌دهند که در آنها مشاهدات به هم وابسته‌اند و نه تنها نمی‌توان در محاسبات آماری از این وابستگی صرف نظر کرد، بلکه این وابستگی

۲) مدل‌های اتورگرسیو ایستای مرتبه p با علامت اختصاری

$$AR(p)$$

۳) مدل‌های ایستای مرکب اتورگرسیو - میانگین متحرک با

$$ARMA(p, q)$$

۴) مدل‌های ناایستای مرکب اتورگرسیو - میانگین متحرک با

$$ARIMA(p, d, q)$$

مدلهای یک تا سه را می‌توان حالت‌های خاصی از مدل چهار در نظر گرفت. در ادامه در بخش اول این مقاله به معرفی مدل‌های دسته اول یعنی $MA(q)$ خواهیم پرداخت، در بخش دوم شرط عکس پذیری مدل‌های میانگین متحرک را مورد بررسی قرار خواهیم داد و بخش سوم را به معرفی ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل مدل $MA(q)$ اختصاص می‌دهیم و در بخش چهارم حالت خاصی از این دسته از مدلها یعنی $MA(1)$ را از نظر خواهیم گذراند.

۱ معرفی مدل

در مدل‌های تصادفی که در این بخش بررسی می‌شوند، یک فرآیند چند متغیری را که در آن مقادیر متوالی فرآیند به هم وابسته‌اند، می‌توان به صورت یک فرآیند ناشی از a_t ضربه تصادفی مستقل، از بردار a_t در نظر گرفت. این ضربات تصادفی نمونه‌هایی از یک توزیع معین هستند که معمولاً نرمال چندمتغیری فرض می‌شود. همچنین فرض می‌شود که توزیع ضربات تصادفی دارای بردار میانگین μ و ماتریس کوواریانس Σ است. به چنین دنباله‌ای از بردارهای تصادفی a_t و a_{t-1} و ...، فرآیند نویه سفید می‌گویند.

در مدل‌های میانگین متحرک می‌توان بردار Z_t را به صورت یکتابع خطی از $+a_t$ و بردار a_t و به شکل زیر در نظر گرفت:

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad (1)$$

۱) سریهای متوسط درجه حرارت ماهانه، متوسط بارندگی

ماهانه، و متوسط رطوبت نسبی ماهانه

۲) سریهای میزان مرگ و میر سالانه، و جمعیت سالانه

۳) سریهای بیکاران فصلی و مختلفین از قانون فصلی

۴) سریهای سرعت باد و درجه حرارت روزانه

که در آنها علاوه بر پیدا کردن ارتباط بین مشاهدات متوالی هر یک از سریها، باید ارتباط متقابل سریها نیز در نظر گرفته شوند. اصطلاحاً به این روش، تحلیل سریهای زمانی چند متغیری می‌گویند.

فرم کلی مدل یک سری زمانی چند متغیره به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi(B)Z_t = \theta(B)a_t + \mu.$$

که در آن Z_t بردار مشاهدات و a_t بردار باقیمانده است؛ به طوری که a_t ها به طور مستقل و به صورت نرمال با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس Σ توزیع شده‌اند و $\Phi(B)$ و $\theta(B)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \dots - \Phi_p B^p$$

$$\theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

Φ_i ها به ازای $i = 1, 2, \dots, p$ و θ_j ها به ازای $j = 1, 2, \dots, q$ ماتریسهای $k \times k$ هستند که به همراه Σ باید از روی مشاهدات برآورد شوند و p و q نیز به ترتیب، مرتبه‌های قسمت اتورگرسیو و قسمت میانگین متحرک مدل هستند که در عمل باید تعیین شوند.

عموماً مدل‌های سریهای زمانی چندمتغیری را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱) مدل‌های میانگین متحرک مرتبه q با علامت اختصاری

$$MA(q)$$

که μ بردار میانگین Z_t و θ_j ها به ازای $(j = 1, 2, \dots, q)$ است و $\det \theta(B)$ یک چندجمله‌ای بر حسب B و از درجه kq است که آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\det \theta(B) = 1 - \eta_1 B - \dots - \eta_{kq} B^{kq} \quad (5)$$

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

ضرایب η_i را به ازای $(i = 1, \dots, kq)$ با استفاده از ماتریس‌های θ_j به ازای $(j = 1, 2, \dots, q)$ می‌توان به دست آورد.

می‌توانیم انحراف \tilde{Z}_t را به صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

اگر از اپراتور پرسرو B که به صورت $Ba_t = a_{t-1}$ تعریف می‌شود استفاده کنیم داریم:

$$\tilde{Z}_t = \theta(B)a_t \quad (2)$$

در این صورت مدل را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\tilde{Z}_t = \theta(B)a_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \theta_{11} & \theta_{12} \\ 0 & 1 \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} B$$

در نتیجه داریم:

$$\theta(B) = \begin{bmatrix} 1 - \theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1 - \theta_{22}B \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان $\det \theta(B)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned} \det \theta(B) &= (1 - \theta_{11}B)(1 - \theta_{22}B) - \theta_{12}\theta_{21}B^2 \\ &= 1 - (\theta_{11} + \theta_{22})B - (\theta_{12}\theta_{21} - \theta_{11}\theta_{22})B^2 \end{aligned}$$

در مدل فوق $\theta(B)$ ماتریس $k \times k$ است و عناصر آن به صورت چندجمله‌ای‌هایی بر حسب B و از درجه q هستند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

در عبارت فوق I ماتریس $k \times k$ است. حال برای آنکه بتوان یک مدل میانگین متحرک از مرتبه q را به مشاهدات برازand ابتدا لازم است که مرتبه مدل یعنی q را برآورد کرد. بعد از برآورد q باید پارامترهای مدل یعنی μ و $\theta_1, \dots, \theta_q$ و $\sum \theta_i$ را با استفاده از مشاهدات برآورد نمود.

پس در مقایسه با رابطه (5) داریم:

$$\eta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} \quad \eta_2 = \theta_{12}\theta_{21} - \theta_{11}\theta_{22} \quad \square$$

حال برای آنکه $(B)^{-1}\theta$ -بسطی همگرا داشته باشد باید $(\det \theta(B))^{-1}$ همگرا باشد، اما می‌توان با توجه به (5) نوشت:

$$\begin{aligned} [\det \theta(B)]^{-1} &= (1 - \eta_1 B - \dots - \eta_{kq} B^{kq})^{-1} \\ &= [(1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_{kq} B)]^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{kq} \frac{M_i}{(1 - G_i B)} \end{aligned} \quad (6)$$

۱.۱ شرط عکس‌پذیری مدل‌های میانگین متحرک

اگر بخواهیم از روی مدل (2) بردار تصادفی a_t را بر حسب انحراف \tilde{Z}_t بیان کنیم می‌توانیم بنویسیم:

$$a_t = \theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t \quad (3)$$

بنابراین برای آنکه بتوان این عمل را انجام داد باید ماتریس $(B)^{-1}\theta$ وجود داشته باشد و همانطور که می‌دانیم ماتریس $(B)^{-1}\theta$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta^{-1}(B) = (\det \theta(B))^{-1} \theta^*(B) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &= E(Z_{jt} - \mu_j)(Z_{it} - \mu_i) \\ &= \gamma_{ji}(-s) \end{aligned}$$

در نتیجه برای آنکه ماتریس $(B)^{-\theta}$ وجود داشته باشد باید رابطه (۶) همگرا باشد و برای این منظور باید $1 > |G_i|$ باشد. اما با توجه به آنکه داریم:

$$\det \theta(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B) \dots (1 - G_{k_0} B)$$

شرط معادل آن است که ریشه‌های معادله $\det \theta(B) = 0$ خارج دایره واحد قرار گیرند یعنی به ازای $1 > |B|$ داشته باشیم:

$$\det \theta(B) = 0 \quad (7)$$

در نتیجه شرط فوق را به عنوان شرط عکس‌پذیری مدل‌های میانگین متحرک می‌توان در نظر گرفت.

$$\hat{\Gamma}(S) = (\hat{\gamma}_{it}(s)) \quad (12)$$

$$\hat{\gamma}_{it}(s) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n-s} (z_{it} - \bar{z}_i)(z_{j,t+s} - \bar{z}_j) \quad (13)$$

$$\hat{P}(s) = (\hat{p}_{ij}(s)) \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \hat{P}_{ij}(s) &= \\ &\frac{\sum_{t=1}^{n-s} (z_{it} - \bar{z}_i)(z_{j,t+s} - \bar{z}_j)}{(\sum_{t=1}^n (z_{it} - \bar{z}_i)^2 \sum_{t=1}^n (z_{j,t+s} - \bar{z}_j)^2)^{1/2}} \quad (15) \end{aligned}$$

حال با استفاده از رابطه (۸) ماتریس کوواریانس متقابل برای یک مدل میانگین متحرک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \\ \tilde{Z}_{t-s} &= a_{t-s} - \theta_1 a_{t-s-1} - \dots - \theta_q a_{t-s-q} \quad (16) \end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{t-s} \tilde{Z}_t' &= \tilde{Z}_{t-s} (a'_t - a'_{t-1} \theta'_1 - \dots - a'_{t-q} \theta'_q) \quad (17) \\ &= \tilde{Z}_{t-s} a'_t - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-1} \theta'_1 - \dots - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-q} \theta'_q \end{aligned}$$

حال اگر $s < q$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{t-s} \tilde{Z}_t' &= \tilde{Z}_{t-s} a'_t - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-1} \theta'_1 - \dots - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-s} \theta'_s \\ &\quad - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-(s+1)} \theta'_{s+1} - \dots - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-q} \theta'_q \end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= E(Z_{t-s} - \mu)(Z_t - \mu)' = E(\tilde{Z}_{t-s} \tilde{Z}_t') \\ &= E(\tilde{Z}_{t-s} a'_t - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-1} \theta'_1 - \dots \\ &\quad - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-s} \theta'_s - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-(s+1)} \theta'_{s+1}) \end{aligned}$$

۲ ماتریس‌های کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل

اگر سری زمانی Z_t ، برداری شامل k سری زمانی یک متغیره به شکل $Z_t = (Z_{1t}, \dots, Z_{kt})'$ باشد، تحت فرض نرمال بودن و شرط ایستایی ضعیف مرتبه دو، توزیع احتمالی $Pr(Z_{t1}, Z_{t2}, \dots, Z_{tk})$ برای تمام زمانهای t_1 و t_2 یکسان است. می‌توانیم ماتریس کوواریانس متقابل به فاصله S را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned} \Gamma(S) &= E(Z_{t-s} - \mu)(Z_t - \mu)', (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \\ &= (\gamma_{ij}(s)), (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (8) \end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توانیم ماتریس همبستگی متقابل به فاصله S را هم به شکل زیر تعریف کنیم:

$$P(S) = (P_{ij}(s)), (s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (9)$$

$$P_{ij}(s) = \frac{\gamma_{ij}(s)}{(Var(Z_i).Var(Z_j))^{1/2}}, (i, j = 1, 2, \dots, k) \quad (10)$$

با توجه به (۸) می‌توان نوشت:

$$\gamma_{ij}(S) = E(Z_{it-s} - \mu_i)(Z_{jt} - \mu_j) \quad (11)$$

مدل صفر است.

اگر $(\Gamma(1), \Gamma(2), \dots, \Gamma(q))$ و $\sum \Gamma(q)$ معلوم باشند، q معادله‌ی حاصل از رابطه (۱۸) به ازای $s = 1, 2, \dots, q$ را برای پارامترهای $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$ می‌توان حل کرد. بنابراین اگر به جای $(\Gamma(s))$ از برآورد آن یعنی $(\hat{\Gamma})$ استفاده کنیم و به ازای $s = 1, 2, \dots, q$ ماتریسهای $(\hat{\Gamma})$ در رابطه (۱۸) قرار دهیم می‌توانیم برآوردهایی برای پارامترهای میانگین متحرک به دست بیاوریم.

اینک برای توضیح بیشتر حالت خاصی را در نظر می‌گیریم.

$$\begin{aligned} & - \dots - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-q} \theta'_q \\ &= E(\tilde{Z}_{t-s} a'_t) - E(\tilde{Z}_{t-s} a'_{t-1}) \theta'_1 - \dots \\ &\quad - E(\tilde{Z}_{t-s} a'_{t-s}) \theta'_s - E(\tilde{Z}_{t-s} a'_{t-(s+1)}) \theta'_{s+1} \\ &\quad - \dots - E(\tilde{Z}_{t-s} a'_{t-q}) \theta'_q \end{aligned}$$

با توجه به این نکته که بردارهای تصادفی a_t از هم مستقل و دارای بردار میانگین صفر هستند و همچنین با توجه به رابطه (۱۶) داریم:

$$\begin{aligned} \Gamma(s) &= \dots - E(a_{t-s} a'_{t-s}) \theta'_s \\ &\quad + \theta_1 E(a_{t-(s+1)} a'_{t-(s+1)}) \theta'_{s+1} \\ &\quad + \dots + \theta_{q-s} E(a_{t-q} a'_{t-q}) \theta'_q \end{aligned}$$

یعنی:

$$\Gamma(s) = - \sum \theta'_s + \theta_1 \sum \theta'_{s+1} + \dots + \theta_{q-s} \sum \theta'_q$$

اما اگر $q > s$ باشد مثلًا اگر $1 + q = s$ باشد، در این صورت با توجه به (۱۷) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{t-s} \tilde{Z}_t' &= \tilde{Z}_{t-s} a'_t - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-1} \theta'_1 - \dots \\ &\quad - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-(s+1)} \theta'_{s+1} - \tilde{Z}_{t-s} a'_{t-s} \theta'_s \end{aligned}$$

که در رابطه فوق $\theta'_{s+1} = \theta'_s$ و برابر خواهد بود، بنابراین با توجه به (۱۶) داریم:

$$E(\tilde{Z}_{t-s} \tilde{Z}_t') = \dots - E(a_{t-s} a'_{t-s}) \theta'_s$$

چون $\theta'_s = \theta'_0$ داریم $E(\tilde{Z}_{t-s} \tilde{Z}_t') = \dots$

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $(\Gamma(s))$ برای $s = q+2$ و $s = q+3$ و ... نیز صفر است. بنابراین می‌توان فرم کلی $\Gamma(s)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-s} \theta_j \sum \theta'_j + s & s = 0, 1, \dots, q \\ 0 & s > q \end{cases} \quad (18)$$

که در رابطه فوق $-I = \theta_0$. با توجه به رابطه (۱۸) ملاحظه می‌کنیم که ماتریس کوواریانس متناظر، یک مدل $MA(q)$ به ازای مقادیر $s > q$ ، یعنی به ازای شناسه‌های بزرگتر از مرتبه

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} = (I - \theta_1 B) a_t$$

با به طور گسترده:

$$\begin{aligned} (\tilde{Z}_{1t}, \tilde{Z}_{2t})' &= \\ & \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right] - \left[\begin{array}{cc} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{array} \right] B \left(\begin{array}{cc} a_{1t} & a_{2t} \end{array} \right)' \end{aligned}$$

از بسط رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{1t} &= (1 - \theta_{11} B) a_{1t} - \theta_{12} B a_{2t} \\ &= a_{1t} - \theta_{11} a_{1t-1} - \theta_{12} a_{2t-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{Z}_{2t} &= -\theta_{21} B a_{1t} + (1 - \theta_{22} B) a_{2t} \\ &= -\theta_{21} a_{1t-1} + a_{2t} - \theta_{22} a_{2t-1} \end{aligned}$$

بنابراین می‌توان دید که دو شرط الف و ب در مورد مدل مزبور صدق می‌کنند.

$$\left| \frac{-\theta_{11} + \sqrt{\theta_{11}^2 + 4 \times \theta_{12} \theta_{21}}}{-2 \times \theta_{12} \theta_{21}} \right| = | -1/16 | = 1/16 \quad \text{الف:}$$

$$\left| \frac{-\theta_{11} - \sqrt{\theta_{11}^2 + 4 \times \theta_{12} \theta_{21}}}{-2 \times \theta_{12} \theta_{21}} \right| = | -1/52 | = 1/52 \quad \text{ب:}$$

يعني مدل عکس‌پذیر است.
اما اگر داشته باشیم:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0/6 & 0/7 \\ 0/6 & -0/8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\det \theta_1 = -0/9 \quad \text{و} \quad \text{tr} \theta_1 = -0/2$$

و ملاحظه می‌کنیم که شرط الف در این مورد برقرار نیست.

$$\left| \frac{-\theta_{11} + \sqrt{\theta_{11}^2 + 4 \times \theta_{12} \theta_{21}}}{-1/8} \right| = | -0/9 | = 0/9$$

يعني مدل عکس‌پذیر نیست.

۲.۳ برآوردهای اولیه پارامتر

با استفاده از رابطه (۱۸) داریم:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{1-s} \theta_j \sum \theta'_j + s & s = 0, 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases}$$

و به ازای $s = 0$ و با استفاده از برآوردهای (۰) و (۱) داریم:

$$\hat{\Gamma}(0) = \sum + \hat{\theta}_1 \sum \hat{\theta}'_1$$

$$\hat{\Gamma}(1) = \sum + \hat{\theta}'_1$$

که می‌توان با حل دو معادله فوق، $\hat{\theta}_1$ و \sum را به دست آورد.

۱.۳ عکس‌پذیری

برای اینکه مدل عکس‌پذیر باشد طبق رابطه (۷) باید برای $1 > |B|$ داشته باشیم:

$$\det \theta(B) = \begin{vmatrix} 1 - \theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1 - \theta_{22}B \end{vmatrix} = 0$$

در نتیجه با توجه به بسط دترمینان فوق داریم:

$$(1 - \theta_{11}B)(1 - \theta_{22}B) - \theta_{12}\theta_{21}B^2 = 0$$

که اگر معادله فوق را بر حسب توان B مرتب کنیم، داریم:

$$1 - (\theta_{11} + \theta_{22})B + (\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})B^2 = 0$$

حال با اعمال شرط عکس‌پذیری، $1 > |B|$ ، داریم:

$$|B| =$$

$$\left| \frac{\theta_{11} + \theta_{22} \pm \sqrt{(\theta_{11} + \theta_{22})^2 - 4(\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})}}{2(\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})} \right| > 1$$

اما با توجه به:

$$\text{tr} \theta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} \quad \text{و} \quad \det \theta_1 = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21}$$

می‌توان نوشت:

$$\left| \frac{\text{tr} \theta_1 \pm \sqrt{(\text{tr} \theta_1)^2 - 4 \det \theta_1}}{2 \det \theta_1} \right| > 1$$

در نتیجه داریم:

$$\text{الف:} \quad \left| \frac{\text{tr} \theta_1 + \sqrt{(\text{tr} \theta_1)^2 - 4 \det \theta_1}}{2 \det \theta_1} \right| > 1$$

$$\text{ب:} \quad \left| \frac{\text{tr} \theta_1 - \sqrt{(\text{tr} \theta_1)^2 - 4 \det \theta_1}}{2 \det \theta_1} \right| > 1$$

يعني برای آنکه مدل دو متغیری (۱) $MA(1)$ عکس‌پذیر باشد باید دو شرط الف و ب به طور همزمان برقرار باشد.

مثال ۲. اگر در مدل دو متغیری (۱) $MA(1)$ داشته باشیم:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0/6 & 0/4 \\ 0/2 & -0/8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

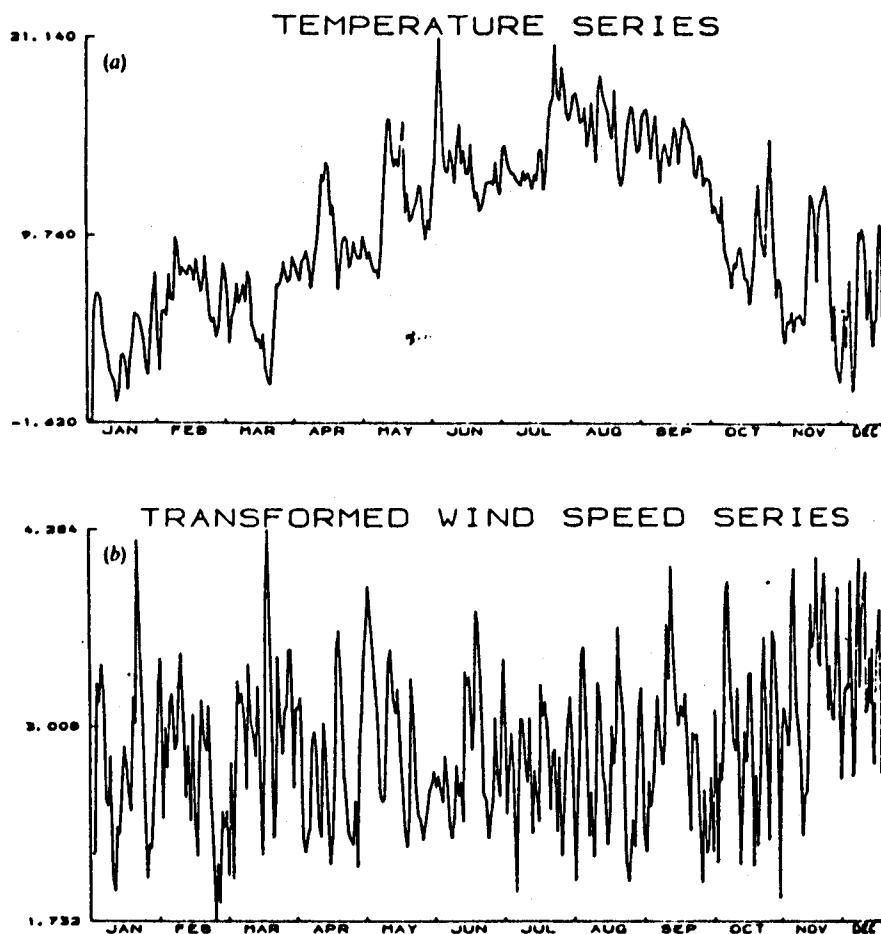
$$\det \theta_1 = -0/56 \quad \text{و} \quad \text{tr} \theta_1 = -0/2$$

۴ یک مثال عملی [۳]

(۱) درجه حرارت : $MA(4)$

بعد از تفاضل‌گیری از سری درجه حرارت (∇T_t) برای ایجاد سکون، مدل میانگین متحرک مرتبه چهارم با واریانس باقیمانده‌ی $2/475$ به صورت زیر برآورد شده است.

نمودار دو سری درجه حرارت روزانه (T_t) و ریشه‌ی دوم سرعت باد (W_t) در یک دوره‌ی یک ساله در شکل زیر نشان داده شده است.



$$\nabla T_t = a_{1t} + 0.07a_{1t-1} - 0.20a_{1t-2} - 0.15a_{1t-3} - 0.20a_{1t-4}$$

در این بخش ابتدا به کمک داده‌های مربوط، مدل‌های یک متغیری این دو سری را به دست آورده، سپس با توجه به همبستگی معنی‌داری که بین باقیمانده‌های دو مدل مشاهده می‌شود، یک مدل دومتغیری پیشنهاد خواهد شد.

(۲) ریشه دوم سرعت باد : $AR(2)$

برای سری W_t مدل پیشنهادی، اتورگرسیو مرتبه دو با واریانس باقیمانده‌ی $166/0$ به صورت زیر

الف: مدل‌های یک متغیری

با استفاده از تکنیک سریهای زمانی یک متغیری [۴] مدل‌های زیر برای دو سری مورد بحث، حاصل شده است.

در این جدول علامت منفی نشان دهنده وجود همبستگی منفی معنی دار و علامت مثبت نشان دهنده وجود همبستگی مثبت معنی دار است.

با توجه به این جدول و با توجه به رابطه (۱۸) و (۹) و (۱۰) یک مدل دو متغیری میانگین متحرک مرتبه ۵ یعنی $MA(5)$ به صورت زیر پیشنهاد می شود.

$$Z_t = \hat{\mu}_0 + \hat{\theta}(B)a_t^*$$

که در آن،

$$Z_t = \begin{bmatrix} \nabla T_t \\ W_t \end{bmatrix} \quad \hat{\mu}_0 = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_1 \\ \hat{\mu}_2 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(B) &= I - \hat{\theta}_1 B - \hat{\theta}_2 B^2 - \hat{\theta}_3 B^3 - \hat{\theta}_4 B^4 - \hat{\theta}_5 B^5 \\ a_t^* &= \begin{bmatrix} a_{1t}^* \\ a_{2t}^* \end{bmatrix} \end{aligned}$$

برآورد پارامترهای مدل به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_0 &= \begin{bmatrix} 2/90 \\ 0/28 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_1 = \begin{bmatrix} -0/07 & 0/84 \\ -0/02 & -0/58 \end{bmatrix} \\ \hat{\theta}_2 &= \begin{bmatrix} 0/04 \\ -0/04 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\theta}_4 &= \begin{bmatrix} 0/16 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \hat{\Sigma} &= \begin{bmatrix} 2/435 & 0 \\ 0/143 & 0/162 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

همانطور که مشخص است با توجه به صفر بودن ماتریس $\hat{\theta}_5$ می توان مدل آن را $MA(4)$ در نظر گرفت. برآورد ماتریس همبستگی متقابل باقیمانده مدل به ازای بیست مقدار از k به صورت شکل (۱) است.

صفر بودن ماتریسهای شکل (۱) نشان دهنده برتری دو متغیری نسبت به مدلها یک متغیری می باشد.

برآورده شده است.

$$W_t - 0/66W_{t-1} + 0/12W_{t-2} = 1/33 + a_{2t}$$

ب: آنالیز دو متغیری

با استفاده از مدلها یک متغیری قسمت الف، و محاسبه باقیماندهای این دو مدل، همبستگی نمونه ای بین باقیماندهای دو سری W_t و T_t محاسبه و در جدول (۱) نشان داده شده است.

در این جدول، x باقیمانده سری سرعت باد و y باقیمانده سری درجه حرارت و (k) همبستگی متقابل بین سریهای x_t و y_{t+k} می باشد. برآورد انحراف معیار (k) تقریباً برابر با $\frac{1}{\sqrt{n}}$ بوده، با توجه به $n = 365$ می توان برای $H_0: \rho_{xy}(k) = 0$ مقدار Z را با توجه به فرمول $Z = \frac{\hat{\rho}_{xy}(k)}{\sqrt{\frac{1}{n}}}$ به صورت جدول (۲) محاسبه نمود.

همان طور که ملاحظه می شود در سطح $\alpha = 0/05$ برای بعضی مقادیر k فرض صفر معنی دار است که نشان دهنده وجود رابطه معنی داری بین باقیماندهای دو سری T_t و W_t می باشد.

بنابراین با توجه به این همبستگی بایست یک مدل دو متغیری را مورد نظر قرار داد. به این منظور به محاسبه برآورد ماتریسها همبستگی متقابل $(\hat{\rho}(k))$ سری دومتغیری $[Z_t, W_t] = [\nabla T_t, W_t]$ ، با توجه به رابطه (۱۰) اقدام شده است. نتیجه به ازای $k = 0, 1, 2, \dots, 9$ به صورت زیر است.

	∇T_t	W_t
∇T_t	- - - +	+ +
W_t	- -	+ + + . + . . . + +

a_{1t}^*	a_{2t}^*
a_{1t}^*
a_{2t}^* + ..

شکل ۱:

k	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\hat{\rho}_{xy}(k)$	-۰/۰۱	-۰/۰۷	-۰/۰۸	۰/۱۲	۰/۰۸	۰/۲۱	-۰/۱۹	-۰/۰۴	۰/۰۰	۰/۰۱	-۰/۰۲

جدول ۱:

k	-۵	-۴	-۳	-۲	-۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
Z	-۰/۱۹	-۱/۲۴	-۱/۵۳	۲/۲۹	۱/۵۳	۴/۰۱	-۲/۶۲	-۰/۲۶	۰/۰۰	۰/۱۹	-۰/۳۸

جدول ۲:

مراجع

- [1] Tiao, G. C. , and Box, G. E. P. (1981), *Modeling Multiple Time Series with Applications*, JASA. 76, 802-816.
- [2] Wie, W. W. S. (1989), *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods*, Redwood City CA, Addison-Wesely.
- [3] Shea, B. L. (1987), *Estimation of Multivariate Time-Series*, Journal of Time Series Analysis Vol. 8, No. 1.

- [۴] مشکانی، محمد رضا (۱۳۵۲)، تجربه و تحلیل سریهای زمانی و پیش‌بینی، مؤسسه آموزش عالی آمار، تهران.
- [۵] مقصودی، عباس (۱۳۷۰)، بررسی سریهای زمانی چندمتغیری سمت و سرعت بادهای خلیج فارس، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی، تهران.