توزیع حدی زمان انتظار در صف دوم صفهای سری

محمّدحسین علامت‌ساز[۱]

چکیده

گوسال[۲] (۱۹۶۲) و (۱۹۷۰) یک سیستم صف‌بندی سری دومرحله‌ای با سرویس‌دهنده‌ای برای هرکدام را در نظر می‌گیرد که در آن فاصله زمانی بین ورودیها دارای توزیع نمایی و توزیعهای طول زمانهای سرویس در صف اول گاما و در صف دوم نمایی است و توزیهای حدی طول زمان انتظار را در هر دو صف محاسبه می‌کند. هدف اصلی این مقاله اثبات نادرستی نتیجه گوسال در مورد صف دوم است. همچنین ثابت می‌کنیم که برخلاف صف اول، در صف دوم لازم نیست این توزیع بینهایت تقسیم‌پذیر باشد. بعلاوه، نشان می‌دهیم که نتیجهٔ مکینو[۳](۱۹۷۷) در مورد یک سیستم صف زیان معین نیز نادرست است.

۱ مقدمه

همه ما تا اندازه‌ای با نظامهای صف و صف‌بندی و کاربرد آنها در امور روزمره آشنایی داریم. یک صف وقتی تشکیل می‌شود که مشتریها برای دریافت نوعی سرویس به باجهٔ خدماتی مراجعه می‌کنند و در صورتی که سرویس‌دهنده، مشغول باشد برای دریافت سرویس، یک صف را در مقابل آن باجه تشکیل می‌دهند. معمولاً مشتریها به طور تصادفی، به صورتی که فواصل زمانی بین مراجعات متوالی، متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع، با توزیع مشترک مثلاً F، هستند مراجعه می‌کنند و در صورتی‌که گنجایش صف، مثلاً N، کامل نشده باشد به صف موجود می‌پیوندند یا خود آغازگر صف می‌شوند. سپس به نوبت به یکی از S_1 سرویس‌دهنده، برای دریافت سرویس مراجعه می‌کنند. مدت زمان سرویس مشتریها نیز متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع، با توزیع مشترک مثلاً H_1، است. چنین سیستمی را با نماد استاندارد $F/H_1/S_1/N$ نشان می‌دهیم. در حالت خاصی که گنجایش صف محدودیتی نداشته باشد، یعنی $N = \infty$، سیستم را به اختصار با $F/H_1/S_1$ نشان می‌دهیم.

---

[۱] محمدحسین علامت‌ساز، گروه آمار دانشگاه اصفهان

[۲] Ghosal

[۳] Makino

بعضاً خروجی‌های یک سیستم صف‌بندی خود ورودیهای صف دیگری هستند. یعنی پس از اتمام سرویس در صف اول به یک صف دوم وارد می‌شوند. در این صورت دو صف به صورت سری داریم. اگر تعداد سرویس‌دهندگان در صف دوم S_2 و توزیع زمان سرویس مشتریها H_2 باشد، این سیستم سری صف دومرحله‌ای را با نماد $F/H_1/S_1 \to H_2/S_2$ نشان می‌دهیم. در نظریه صف مرسوم است که توزیع نمایی را با M، توزیع تباهیده یا قطعی را با D، توزیع گاما (یا ارلانگ) با پارامتر r را با E_r و هر توزیع دلخواه کلی را با G نشان می‌دهند. لذا، برای مثال، سیستم $M/E_2/1$ نمایشگر صفی است با یک سرویس‌دهنده که در آن فاصله زمانی بین ورودیهای متوالی، از توزیع نمایی و طول زمان سرویس، از توزیع ارلانگ با پارامتر ۲ پیروی می‌کنند. اگر مشتریان این سیستم پس از اتمام سرویس به صف دیگری بپیوندند که آن نیز دارای یک سرویس‌دهنده با توزیع طول زمان سرویس نمایی باشد آنگاه دارای سیستم سری صف دو مرحله‌ای $M/E_2/1 \to M/1$ هستیم. عموماً رفتار حدّی، در درازمدت، در سیستم‌های صف کاربرد بیشتری داشته و مورد توجه هستند. در این حالت فرض می‌شود که رفتار صف با انتقال زمان تغییر نمی‌کند و اینگونه صفها را « مانا » می‌گویند. برای جزئیات بیشتر و فرمول‌بندی توزیعهای مختلف سیستم‌های صف، خوانندگان گرامی می‌توانند به کتابهای متعدد مرجع یا درسی در این زمینه، مثلاً گراس و هاریس (۱۹۸۴)، مراجعه کنند.

۲ توزیع حدی زمان انتظار صف دوم در سیستم $M/E_2/1 \to M/1$

صفهای سری $M/E_2/1 \to M/1$ را در نظر بگیرید و فرض کنید که μ، λ_1 و $(\mu >)\lambda_2$ به ترتیب پارامترهای مربوط به توزیعهای فاصلهٔ زمانی بین مراجعات و زمان سرویس در صف اول و دوم باشند. گوسال (۱۹٦۱) ثابت می‌کند که تابع مشخصه زمان انتظار تا دریافت سرویس در صف دوم در درازمدت عبارت است از

$$\phi(t) = \frac{\lambda_2 - \mu}{\lambda_2(\mu + it)}\left\{\frac{1 - \psi(t)}{it}\right\}^{-1} \quad , \quad t \in \mathcal{R} \qquad (1)$$

که در آن

$$\begin{aligned}\psi(t) = {} & \frac{\mu\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 - 2\mu)}{(\lambda_1 - \mu)^2(\lambda_2 + \mu)(\mu + it)} \\ & + \frac{\mu\lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \mu)(\lambda_1 + it)} \\ & \times\left[\frac{\lambda_1\mu + 2\mu\lambda_2 - \lambda_1\lambda_2}{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 - \mu)} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + it}\right] \\ & + \frac{\mu\lambda_1\lambda_2(\lambda_1 + 2\lambda_2)}{(\lambda_1 - \lambda_2)^2(\lambda_2 + \mu)(\lambda_2 - it)} \quad , t \in \mathcal{R} \qquad (2)\end{aligned}$$

سپس در سال ۱۹٦۵، لوینز[۴] نتیجه‌ای در این زمینه در ارتباط با توابع مشخصه برخه‌ریخت[۵] به دست آورد که با نتیجه (۱) گوسال سازگاری نداشت. لیکن، شاید به دلیل پیچیدگی کار لوینز، گوسال متقاعد نشد که نتیجه او اشتباه است و آن را مجدداً و به همین صورت در کتاب ۱۹۷۰ خود ارایه داد. به هر حال، در این قسمت با اثباتی روشن، نشان می‌دهیم تابع مشخصه (۱) گوسال واقعاً نادرست است.

فرض کنید $\phi(t)$ در (۱) تابع مشخصه طول زمان انتظار حدی در صف دوم، فرضاً X، در سیستم مورد نظر باشد. ابتدا عبارت (۲) را به صورت زیر خلاصه می‌کنیم.

$$\psi(t) = \frac{a_0 + a_1(it) + a_2(it)^2}{(\mu + it)(\lambda_1 + it)^2(\lambda_2 - it)} \quad , \quad t \in \mathcal{R} \qquad (3)$$

که با جایگذاری در (۱) خواهیم داشت

$$\phi(t) = (1 - \frac{\mu}{\lambda_2})\left[1 + \frac{b_0 + b_1(it) + b_2(it)}{c_0 + c_1(it) + c_2(it)^2 + c_3(it)^3}\right] \qquad (4)$$

و یا به عبارتی دقیقتر، با استفاده از (۲)

$$\phi(t) = (1 - \frac{\mu}{\lambda_2})\frac{(\lambda_1 + it)^2(\lambda_2 - it)}{c_0 + c_1(it) + c_2(it)^2 - (it)^3} \qquad (5)$$

که در آن a_i ها، b_i ها و c_i ها توابعی معین از پارامترهای μ، λ_1 و λ_2 هستند و $c_0 > 0$. بدیهی است از (۵) می‌توان نتیجه گرفت که تابع لاپلاس– استیلت‌یس زمان انتظار حدی در صف دوم باید به صورت زیر باشد.

$$L(t) = (1 - \frac{\mu}{\lambda_2})\frac{(\lambda_1 - t)^2(\lambda_2 + t)}{c_0 - c_1 t + c_2 t^2 + t^3} \ , t \geq 0 \qquad (6)$$

---
[۴] Loynes
[۵] meromorphic

چون برای هر $t \geq 0$ داریم $L(t) \neq 0$ و صورت عبارت (٦) دارای ریشه مضاعف $t = \lambda_1$ است، لزوماً مخرج نیز باید دارای همین ریشه مضاعف باشد. به علاوه داریم

$$\lim_{t\to\infty} L(t) = (1 - \frac{\mu}{\lambda_2})$$

بنابراین، (٦) الزاماً به صورت زیر ساده می‌شود

$$L(t) = (1 - \frac{\mu}{\lambda_2})[\frac{\lambda_2 + t}{(1 - \frac{\mu}{\lambda_2})\lambda_2 + t}]$$
$$= (1 - \frac{\mu}{\lambda_2}) + (\frac{\mu}{\lambda_2})\frac{(\lambda_2 - \mu)}{(\lambda_2 - \mu) + t} \quad , t \geq 0 \qquad (7)$$

واضح است که (٧) تابع لاپلاس آمیزه‌ای از یک توزیع تباهیده در ٠ و یک توزیع نمایی با پارامتر $(\lambda_2 - \mu)$ است. به عبارت دیگر، توزیع زمان انتظار X عبارت است از

$$F_X(x)) = (1 - \frac{\mu}{\lambda_2}) + (\frac{\mu}{\lambda_2})[1 - e^{-(\lambda_2-\mu)x}]$$
$$= 1 - \frac{\mu}{\lambda_2}e^{-(\lambda_2-\mu)x} \quad , x \geq 0 \qquad (8)$$

اما توزیع حاصل، مستقل از مقدار پارامتر λ_1 است و این با خصوصیات این سیستم متناقض است. در واقع گوسال (١٩٦٢) خود در مثال (ii) وابستگی این توزیع به λ_1 را تأیید می‌کند. بنابراین $\phi(t)$ نمی‌تواند درست باشد. توزیع (٨) در واقع منطبق بر توزیع حدی زمان انتظار در صف دوم در سیستم $M/M/1 \to M/1$ است (مثلاً، پرابو[6] ١٩٦٥، صفحه ١٨ ملاحظه شود) که به پارامتر توزیع سرویس در صف اول وابسته نیست. در بخش بعد می‌بینیم که این توزیع، در واقع، الزاماً بینهایت بار تقسیم‌پذیر نیست.

۳ بینهایت بار تقسیم‌ناپذیری توزیع حدی زمان انتظار در صف دوم

متغیر تصادفی X با تابع مشخصه $\phi(t)$ را بینهایت با تقسیم‌پذیر گوییم هرگاه برای هر عدد صحیح و مثبت n تابع مشخصه‌ای

چون $\psi(t)$ وجود داشته باشد به طوری که

$$\phi(t) = [\psi(t)]^n \quad , t \in \mathcal{R}$$

توزیعهای معروف نرمال، پوآسون، گاما و کشی بینهایت بار تقسیم‌پذیرند. اما هیچ توزیع دوجمله‌ای دارای این خاصیت نیست. در واقع، هیچ توزیع ناتباهیده که دارای تکیه‌گاه کراندار باشد بینهایت بار تقسیم‌پذیر نیست. با استفاده از نتیجه‌ای قدیمی از اسپیتزر[7] (کینگمن[8] ١٩٦٦، صفحه ٢٩٦، را ملاحظه کنید) ثابت می‌شود که توزیع حدی زمان انتظار در هر سیستم صف با توزیعهای دلخواه برای زمان بین ورودیها و طول زمان سرویس، بینهایت بار تقسیم‌پذیر است. در مثال نقض زیر نشان می‌دهیم که این موضوع برای صف دوم در صفهای کلی صحت ندارد. به عبارت دیگر، صفهای سری $GI/G/1 \to G/1$ وجود دارند که در آنها توزیع حدی زمان انتظار در صف دوم بینهایت بار تقسیم‌پذیر نیست.

مثال ١ — یک سری صف دومرحله‌ای را درنظربگیرید که در آن توزیعهای زمان بین ورودیها، زمان سرویس در صف اول و زمان سرویس در صف دوم به ترتیب به صورتهای زیر باشند

$$A(t) = \begin{cases} 0 & , \quad t < c \\ 1 & , \quad t \geq c \end{cases}$$

$$B_1(t) = \begin{cases} F_1(t) & , \quad t \in [0, \frac{c}{2}] \\ 1 & , \quad t \geq \frac{c}{2} \end{cases}$$

$$B_2(t) = \begin{cases} F_2(t) & , \quad t \in [0, c] \\ 1 & , \quad t \geq c \end{cases}$$

که در آنها $c > 0$ عددی حقیقی است و F_1 و F_2 توابع توزیع به ترتیب با تکیه‌گاههای $[0, \frac{c}{2}]$ و $[0, c]$ هستند. واضح است که در صف دوم این سیستم، زمان انتظار در دراز مدت یک متغیر تصادفی غیر تباهیده‌ی کراندار است. در واقع، این متغیر، با احتمال ١، دارای کران $\frac{c}{2}$ است. بنابراین توزیع مانای زمان انتظار در صف دوم نمی‌تواند بینهایت بار تقسیم‌پذیر باشد.

---
[6] Prabhu
[7] Spitzer
[8] Kingman

۴ عدم استقلال فاصله بین زمانهای خروج در سیستم $GI/M/1/0$

فرض کنید D_n، $n = 1, 2, 3, \ldots$، فاصله زمانی بین عزیمت مشتریهای $(n - 1)$ ام و n ام باشد. بررسی دنباله متغیرهای تصادفی $\{D_n\}$ به ویژه از این جهت مهم است که خروجی یک صف ممکن است ورودی صف بعدی در یک سیستم صف‌بندی سری باشد. برای جزئیات بیشتر مثلاً گلین و وارد[۹] (۱۹۹۱) را ملاحظه کنید. به همین جهت مکینو (۱۹۷۷) استقلال و وابستگی D_n ها را در چند سیستم صف‌بندی مورد بررسی قرار می‌دهد. در این بخش می‌خواهیم نشان دهیم نتیجهٔ وی در مورد استقلال D_n ها در صف (زیان) $GI/M/1/0$ نادرست بوده، در واقع زمانهای بین خروجهای متوالی در این سیستم به هم وابسته‌اند. با مثال زیر این موضوع را روشن می‌کنیم.

مثال ۲ — سیستم $GI/M/1/0$ را که در حالت خاصی از سیستم $GI/M/1/0$ است در نظر بگیرید. در چنین سیستمی امکان دارد لحظه‌ای کوتاه پس از خروج مشتری $(n - 1)$ ام و آزاد شدن سرویس‌دهنده، مشتری n ام از راه برسد. به دلیل خصوصیت توزیع نمایی، طول زمان سرویس مشتری n ام می‌تواند بسیار کم و در نتیجه مقدار D_n کوچک باشد. لذا با توجه به ثابت بودن فاصله بین ورودیها، در این صورت مدت‌زمان نسبتاً زیادی طول خواهد کشید تا مشتری $(n + 1)$ ام وارد سیستم شده، سرویس بگیرد و خارج شود. به عبارت دیگر، در این حالت D_{n+1} الزاماً بزرگ خواهد بود. بنابراین کوچکی D_n، بزرگی D_{n+1} را سبب خواهد داشت. پس D_n و D_{n+1} متغیرهای مستقل نیستند.

مراجع

[1] Ghosal A. (1962), *Queues in series*, J. Roy. Statist. Soc. 8, 24, 359–363.

[2] Ghosal A. (1970), *Some aspects of queuing and storage systems*, Springer-Verlag,Berlin.

[3] Glynn D. and W. Ward (1919), *Departures from many queues in series*, Ann. Appl. Prob. 1, No. 4, pp. 546–577.

[4] Gross D. and C. M. Harris (1984), *Fundementals of Queuing Theory*, North-Holand, New York.
(ترجمه: غلامحسین شاهکار (۱۳۷۲)، مبانی نظریه صف، مرکز نشر دانشگاهی، تهران).

[5] Kingmann J. F. C. (1966), *On the algebra of queues*, J. Appl. Prob. 3, pp. 285–326.

[6] LoynesR. M. (1965), *On the waiting time distribution for queues in series*, J. Roy. Statist. Soc. 27, No. 3, pp. 491–496.

[7] Makino T. (1977), *On the independence of interdeparture intervals from single server queuing systems*, Ann. Inst. Sattist. Math. 29A, pp. 307–315.

[8] Prabhu N. V. (1965), *queues and inventories*, Wiley, New York.

[۹] Glynn and Ward