

برآورد تعداد تانکهای دشمن

غلامحسین شاهکار*

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^N (1+x)^k &= (1+x)^n \sum_{k=0}^{N-n} (1+x)^k \\ &= (1+x)^n \frac{(1+x)^{N-n+1} - 1}{(1+x) - 1} \\ &= \frac{1}{x} [(1+x)^{N+1} - (1+x)^n]\end{aligned}$$

و ضرب x^n در بسط چندجمله‌ای بالا $\binom{N+1}{n+1}$ است لذا داریم:

$$\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

با قرار دادن این عبارت در (۱) به دست می‌آوریم:

$$E(Y) = \frac{n \binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n \frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n(N+1)}{n+1}$$

برای برآورد N یعنی تعداد کل تانکهای نیروی متخاصم، معادله $E(Y) = \frac{n(N+1)}{n+1}$ را نسبت به N حل کرده و به جای $E(Y)$ برآورد آن یعنی $(\max_{1 \leq i \leq n} X_i)$ را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\hat{N} = \left[\frac{n+1}{n} (\max_{1 \leq i \leq n} X_i) \right]$$

در جریان جنگی، n تانک از کل N تانک دشمن به وسیله نیروهای خودی به غنیمت گرفته شده‌اند. تانکهای دشمن با اعداد ۱ تا N شماره‌گذاری شده و شماره تانکهای به غنیمت گرفته شده را شناسایی کرده‌ایم. می‌خواهیم N یعنی تعداد تانکهای دشمن را برآورد کنیم. فرض کنید $X_1, X_2, \dots, X_n$ شماره تانکهای به غنیمت گرفته شده باشد. $E[Y = \max_{1 \leq i \leq n} X_i]$ را محاسبه کرده و با استفاده از آن N را برآورد می‌کنیم. داریم:

$$P(Y = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, \quad k = n, n+1, \dots, N$$

زیرا اگر ماکسیم شماره تانکهای به غنیمت گرفته شده یعنی Y ، k باشد در این صورت $n-1$ شماره دیگر همه زیر $k-1$ قرار دارند. پس

$$\begin{aligned}E(Y) &= \sum_{k=n}^N k P(Y = k) = \sum_{k=n}^N k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \frac{k(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} \quad (۱)\end{aligned}$$

برای محاسبه عبارت $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n}$ توجه کنید که $\binom{k}{n}$ ضرب x^n در بسط چندجمله‌ای $(1+x)^k$ است و در نتیجه $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n}$ ضرب x^n در بسط چندجمله‌ای $(1+x)^k$ است. چون

* دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد