

برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی

علی شادرخ،^۱ شهرام یعقوب زاده شهرستانی^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۷/۱/۲۵

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۸/۶/۳۰

چکیده:

در این مقاله برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی تحت تابع زیان درجه دوم و بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم به دست آورده می‌شود و سپس با استفاده از روش شبیه‌سازی مونت کارلو، این برآوردها با هم و با برآوردهای بیزی مقایسه می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: توزیع رایلی، برآورد E-بیزی، برآورد بیزی سلسله مراتبی، سانسور فزاینده نوع دوم، شبیه‌سازی مونت کارلو.

۱ مقدمه

سانسور کردن یک امر متداول در آزمایش‌های مربوط به طول عمر و مطالعه‌های قابلیت اطمینان است. اگر آزمایشگر تصمیم بگیرد با مشاهده اولین شکست، R_1 واحد از واحدهای آزمایشی سالم و در زمان دومین شکست، R_2 واحد از واحدهای آزمایشی سالم را به تصادف از آزمایش خارج کند و این کار را در زمان m -امین شکست ادامه دهد، همه واحدهای باقی‌مانده یعنی $R_m = n - R_1 - R_2 - \dots - R_{m-1} - m$ واحد از آزمایش خارج می‌شوند، در این صورت طرح سانسور فزاینده نوع دوم^۴ رخ می‌دهد. در این حالت زمان‌های شکست واحدها، متغیرهای تصادفی R_i ها ثابت‌های از قبل تعیین شده‌اند. در نتیجه این طرح سانسور، m مقدار مرتب‌شده به دست می‌آید که آماره‌های ترتیبی سانسور فزاینده نوع دوم نامیده می‌شود [۱۱]. برای مطالعه بیشتر در این زمینه به [۱۳] مراجعه کنید. در سال‌های اخیر مطالعه‌های زیادی روی روش‌های استنباطی با داده‌های سانسور فزاینده نوع دوم انجام شده که می‌توان به [۱۴، ۱۵، ۱۶] اشاره کرد. توزیع پیشین بیزی سلسله مراتبی ابتدا توسط لیندلی و اسمیت [۲۶] معرفی شد و سپس توسط هان [۲۲] مورد

توزیع رایلی که در [۲۷] معرفی شد، به دلیل آن که در حوزه‌های مختلف علم و تکنولوژی مانند مدل‌بندی ارتفاع امواج دریا در اقیانوس شناسی، مهندسی ارتباطات، توزیع طول عمر قطعات صنعتی، مطالعه‌های بالینی در باره بیماران سرطانی، نظریه قابلیت اطمینان و تحلیل بقا کاربرد دارد، برآورد پارامتر آن به روش‌های مختلف توصیه می‌شود. نویسندگان مختلفی در باره توزیع رایلی مطالعه‌هایی انجام دادند. [۱۹]، نقش مهم این توزیع را در مهندسی ارتباطات نشان دادند. [۱۲]، کاربرد توزیع رایلی را در مطالعه‌های بالینی مربوط به بیماران سرطانی نشان دادند. [۱۸]، برآورد بیزی و بهترین برآورد ناوردای^۳ پارامتر توزیع رایلی را تحت تابع زیان آنتروپی به دست آورد. [۲۱]، بر اساس نمونه‌های چندکی، برآورد پارامتر، تابع خطر و تابع قابلیت اعتماد توزیع رایلی را به دست آورد. [۲۰]، برآورد بیزی پارامتر توزیع رایلی بر اساس توزیع پیشین تعمیم یافته جفریز به دست آوردند.

^۱ هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

^۲ هیأت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور تهران، تهران، ایران

^۳ The best invariant estimator

^۴ Progressive type-II censored

^۵ Experimental bayesian estimator

حوزه مقادیر a و b به صورت $b > 0$ و $0 < a \leq 1$ است. [۱۷]، نشان داد، که با بزرگ شدن b کارایی برآوردگر بیزی λ کاهش می‌یابد. بنا بر این ابر پارامتر b از بالا کراندار و به صورت $0 < b < c$ است. [۲۴]، نشان داد که مناسب‌ترین توزیع برای b ، توزیع یکنواخت است. بنا بر این در این مقاله توزیع b ، یعنی $\pi_1(b)$ توزیع یکنواخت پیوسته در بازه $(0, c)$ و $a = 1$ در نظر گرفته می‌شوند، که در این صورت رابطه (۳) برابر با عبارت $\pi(\lambda|b) = be^{-\lambda b}$ می‌شود.

۱.۲ برآورد E-بیزی λ

در این بخش تحت تابع زیان $L(\hat{\theta}, \theta) = (\hat{\theta} - \theta)^2$ که برآورد θ است، ابتدا برآورد بیزی و سپس برآورد E-بیزی λ به دست می‌آید. اگر توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال رابطه (۱)، توزیع زمان شکست و $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$ یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دوم از آن و y_i یافته $Y_{i:m:n}$ باشد، آنگاه با توجه به بالا کریشان و اگر والا [۱۵]، تابع درست‌نمایی به صورت زیر است:

$$L(\lambda|\mathbf{Y}) = C \left(\prod_{i=1}^m y_i \right) \lambda^m e^{-\lambda \sum_{i=1}^m (1+R_i)y_i} \quad (۴)$$

که در آن $\mathbf{Y} = (Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n})$ و

$$C = n(n - R_1 - 1) \cdots (n - R_1 - \dots - R_{m-1} - m + 1)$$

هستند. با توجه به رابطه (۴) توزیع پسین λ به صورت زیر است:

$$\pi^*(\lambda|\mathbf{Y}) = \frac{(b + \sum_{i=1}^m (1 + R_i)y_i)^{m+1}}{m!} \times \lambda^m e^{-\lambda(b + \sum_{i=1}^m (1 + R_i)y_i)}. \quad (۵)$$

بنا بر این برآورد بیزی پارامتر λ تحت تابع زیان درجه دوم که با نماد $\hat{\lambda}_{Bay}(b)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر است:

$$\hat{\lambda}_{Bay}(b) = E(\lambda|\mathbf{Y}) = \frac{m+1}{b + \sum_{i=1}^m (1 + R_i)y_i}. \quad (۶)$$

اگر برآورد بیزی پارامتر λ ، $\hat{\lambda}_{Bay}(b)$ و توزیع پیشین b ، $\pi_1(b)$ باشد، آنگاه برآورد E-بیزی پارامتر λ که با نماد $\hat{\lambda}_{EBay}$ نیز

بررسی بیشتری قرار گرفت و روش‌های E-بیزه و بیزی سلسله مراتبی^۶ معرفی شد. اخیراً روش‌های E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی برای برآورد پارامتر توزیع نمایی و برای برآورد پارامتر نسبت توزیع دوجمله‌ای در [۱۳، ۱۴]، برآورد پارامتر و تابع قابلیت اعتماد توزیع بور نوع ۱۲ بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم [۲۵]، برآورد پارامتر توزیع پاسکال در [۱۸] مورد استفاده قرار گرفته شد. در این مقاله توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی به ترتیب برابر با رابطه‌های زیر است:

$$f(x; \lambda) = \lambda x e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0. \quad (۱)$$

$$F(x; \lambda) = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x > 0, \lambda > 0. \quad (۲)$$

در این مقاله در بخش دوم برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی تحت تابع زیان درجه دوم و بر اساس طرح سانسور فزاینده نوع دوم به دست آورده می‌شود. در بخش سوم با استفاده از شبیه‌سازی مونته‌کارلو برآوردهای بیزی، E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی با هم مقایسه می‌شوند. بخش چهارم هم به نتایج مقاله اختصاص داده شده است.

۲ برآورد پارامتر λ

در این بخش برآوردهای E-بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر λ تحت تابع زیان درجه دوم و بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم به دست می‌آید. بنا بر این توزیع پیشین λ ، توزیع گاما با ابر پارامترهای a و b فرض می‌شود که به صورت زیر است:

$$\pi(\lambda|a, b) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \lambda^{a-1} e^{-\lambda b}, \quad \lambda > 0, a, b > 0. \quad (۳)$$

[۲۲]، ابر پارامترهای a و b طوری در نظر گرفته می‌شود که $\pi(\lambda|a, b)$ نسبت به λ کاهشی باشد، بنا بر این با توجه به عبارت زیر:

$$\frac{d\pi(\lambda|a, b)}{d\lambda} = \frac{b^a \lambda^{a-2} e^{-\lambda b}}{\Gamma(a)} ((a-1) - \lambda b),$$

^۶ Hierarchical bayesian estimator

۳ شبیه سازی

در این بخش با استفاده از شبیه سازی مونت کارلو، برآوردهای بیزی، E -بیزی و بیزی سلسله مراتبی λ با هم مقایسه می شوند، که برای این منظور به کمک الگوریتم بالا کریشان و سندهو [۱۴]، از توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال در رابطه (۱) و با پارامتر $\lambda = 2$ ، نمونه های سانسور فزاینده نوع دوم به صورت زیر تولید می شوند:

گام اول: ابتدا m عدد تصادفی مستقل از توزیع یکنواخت استاندارد تولید کنید و آنها را $W_1, W_2, \dots, W_m$ بنامید.

گام دوم: برای $i = 1, 2, \dots, m$ ، V_i ها به صورت $V_i = W_i^{\{1/(i + \sum_{j=m+1-i}^m R_j)\}}$ تعریف کنید.

گام سوم: برای $i = 1, 2, \dots, m$ ، $U_{i:m:n}$ ها را به صورت $U_{i:m:n} = 1 - \prod_{j=1}^i V_{m+1-j}$ تعریف کنید، که در این حالت $U_{1:m:n}, U_{2:m:n}, \dots, U_{m:m:n}$ ، یک نمونه سانسور شده فزاینده نوع دوم از توزیع یکنواخت استاندارد است.

گام چهارم: برای $i = 1, 2, \dots, m$ ، $Y_{i:m:n}$ ها را از رابطه $Y_{i:m:n} = F^{-1}(U_{i:m:n})$ به دست آورید، که $F^{-1}(\cdot)$ وارون تابع توزیع متناظر با تابع چگالی احتمال در رابطه (۱) است. در این حالت $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$ آماره های ترتیبی سانسور شده فزاینده نوع دوم از توزیع رایلی با تابع چگالی احتمال در رابطه (۱۰) هستند. اکنون با استفاده از نمونه تولید شده $Y_{1:m:n}, Y_{2:m:n}, \dots, Y_{m:m:n}$ و به کمک رابطه های (۶)، (۷) و (۱۰) برآوردهای بیزی، E -بیزی و بیزی سلسله مراتبی به دست می آیند.

گام های اول تا چهارم ۱۰۰۰ بار تکرار می شوند و سپس میانگین مقادیر برآوردها و جذر خطای میانگین توان دوم برآوردها ($\sqrt{MSE}$) محاسبه می شود، که نتایج در جدول های ۱ و ۲ آمده اند و بیان کننده آن است که برآورد بیزی پارامتر توزیع رایلی از برآوردهای E -بیزی و بیزی سلسله مراتبی و برآورد E -بیزی تجربی نیز از برآورد بیزی سلسله مراتبی بهتر است.

نشان داده می شود، به صورت زیر تعریف می شود:

$$\hat{\lambda}_{EBay} = \int_{\Lambda} \hat{\lambda}_{Bay}(b) \pi_1(b) db, \quad b \in \Lambda.$$

بنا بر این با توجه به رابطه (۶) و توزیع b ، برآورد E -بیزی λ به صورت زیر به دست می آید:

$$\hat{\lambda}_{EBay} = \frac{1}{c} \int_0^c \hat{\lambda}_{Bay}(b) \pi_1(b) db \quad (۷)$$

$$= \frac{m+1}{c} \left[\log \left(c + \sum_{i=1}^m (1+R_i) y_i^* \right) - \log \left(\sum_{i=1}^m (1+R_i) y_i^* \right) \right]. \quad (۸)$$

۲.۲ برآورد بیزی سلسله مراتبی پارامتر λ

فرض کنید b یک ابر پارامتر در پارامتر θ ، $\pi(\theta|b)$ تابع چگالی پیشین θ و $\pi_1(b)$ تابع چگالی پیشین ابر پارامتر b هستند، آنگاه تابع چگالی پیشین سلسله مراتبی θ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\pi_T(\theta) = \int_{\Lambda} \pi(\theta|b) \pi_1(b) db, \quad b \in \Lambda.$$

بنا بر این تابع چگالی پیشین سلسله مراتبی λ به صورت زیر به دست می آید:

$$\pi_T(\lambda) = \int_0^c \pi(\lambda|b) \pi_1(b) db = \frac{1}{c} \int_0^c b e^{-b\lambda} db = \frac{1 - (1 + \lambda c) e^{-c\lambda}}{c\lambda^2}, \quad (۹)$$

در نتیجه تابع چگالی پسین بیزی λ به صورت زیر محاسبه می شود:

$$\pi^{**}(\lambda|Y) = \frac{\lambda^{m-2} [1 - (1 + \lambda c) e^{-c\lambda}] e^{-\lambda \sum_{i=1}^m (1+R_i) y_i^*}}{\int_0^\infty \lambda^{m-2} [1 - (1 + \lambda c) e^{-c\lambda}] e^{-\lambda \sum_{i=1}^m (1+R_i) y_i^*} d\lambda}. \quad (۱۰)$$

اکنون با استفاده از رابطه (۹) برآورد بیزی سلسله مراتبی پارامتر λ به صورت زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}_{HBay} &= E_{\pi^{**}}(\lambda|Y) \\ &= \frac{m-1}{T(c+T)} \\ &\quad \times \frac{(c+T)^{m+1} - T^{m+1} - (m+1)cT^m}{(c+T)^m - T^m - mcT^{m-1}}, \end{aligned} \quad (۱۱)$$

که در آن $T = \sum_{i=1}^m (1+R_i) y_i^*$ است.

۴ نتایج

و برآورد E -بیزی نیز از برآورد بیزی سلسله مراتبی بهتر است.

سپاس‌گزاری

در این مقاله برآوردهای E -بیزی و بیزی سلسله مراتبی پارامتر توزیع رایلی بر اساس نمونه‌های سانسور فزاینده نوع دوم به دست آمد. سپس با استفاده از شبیه‌سازی مونت کارلو نشان داده شد، که برآورد بیزی از برآوردهای E -بیزی و بیزی سلسله مراتبی بهتر نویسندگان از سردبیر و داوران محترم به‌خاطر ارزیابی این مقاله و پیشنهادهای ارزنده‌شان نهایت تشکر و قدردانی را دارند.

جدول ۱. میانگین برآوردها با مقدار $\sqrt{MSE}$ آنها تحت تابع زیان درجه دوم برای $b = 1/5$ و $c = 2$

$\hat{\lambda}_{HBay}$	$\hat{\lambda}_{EBay}$	$\hat{\lambda}_{Bay}$	طرح	m	n
(۲/۵۷۰)۴/۵۵۱	(۱/۰۰۵)۳/۲۸۰	(۰/۸۸۷۴)۰/۹۷۵۴	(۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۵	۱۰
(۲/۳۷۱)۴/۱۵۷	(۰/۹۴۴۲)۳/۱۲۴	(۰/۳۱۳۶)۱/۸۸۶	(۲, ۳, ۰, ۰, ۰)	۵	۱۰
(۲/۹۵۲)۷/۱۱۹	(۱/۳۰۲)۵/۰۴۲	(۰/۰۴۷۸)۰/۹۵۹۶	(۱۰, ۰, ۰, ۰, ۰)	۱۰	۲۰
(۲/۳۷۴)۶/۱۵۳	(۱/۱۴۳)۴/۶۰۱	(۰/۲۹۷۵)۲/۳۸۶	(۳, ۴, ۳, ۰, ۰)	۱۰	۲۰
(۴/۶۳۴)۱۵/۷۷	(۲/۳۱۹)۱۱/۲۳	(۰/۰۳۸۸)۱/۴۰۹	(۲۰, ۰, ۰, ۰, ۰)	۳۰	۵۰
(۲/۴۷۴)۶/۲۷۵	(۱/۱۶۷)۴/۶۶۲	(۰/۹۵۰۱)۴/۳۵۹	(۱, ۴, ۵, ۰, ۰)	۴۰	۵۰
(۲/۳۷۴)۹/۰۳۷	(۱/۴۲۹)۷/۲۱۶	(۱/۳۱۴)۷/۰۱۶	(۱, ۰, ۰, ۰, ۱)	۲۵	۵۰
(۴/۸۵۰)۱۵/۲۲	(۲/۴۳۸)۱۰/۹۲	(۰/۰۷۱۳)۱/۸۱۴	(۱۵, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۵۰	۸۰

جدول ۲. میانگین برآوردها با مقدار $\sqrt{MSE}$ آنها تحت تابع زیان درجه دوم برای $b = 0/5$ و $c = 1/5$

$\hat{\lambda}_{HBay}$	$\hat{\lambda}_{EBay}$	$\hat{\lambda}_{Bay}$	طرح	m	n
(۲/۳۶۷)۴/۶۰۸	(۱/۱۸۷۰)۳/۶۹۳	(۰/۰۸۵۸)۰/۹۷۸۴	(۵, ۰, ۰, ۰, ۰)	۵	۱۰
(۲/۱۹۲)۳/۱۳۶	(۱/۱۴۴)۳/۴۲۰	(۰/۳۲۵۴)۱/۸۶۶	(۲, ۳, ۰, ۰, ۰)	۵	۱۰
(۲/۹۴۰)۷/۱۳۸	(۱/۵۳۸۶)۵/۵۵۳	(۰/۴۸۷۲)۰/۹۵۹۵	(۱۰, ۰, ۰, ۰, ۰)	۱۰	۲۰
(۲/۳۴۱)۶/۱۶۶	(۱/۳۳۸)۵/۰۲۶	(۰/۲۹۷۵)۲/۳۸۴	(۳, ۴, ۳, ۰, ۰)	۱۰	۲۰
(۴/۰۰۹)۱۱/۷۶	(۲/۲۰۰)۹/۰۰۴	(۰/۰۲۶۸)۰/۹۶۳۵	(۲۰, ۰, ۰, ۰, ۰)	۳۰	۵۰
(۲/۴۶۹)۶/۲۸۷	(۱/۳۹۰)۵/۰۹۳	(۰/۹۷۲۱)۴/۳۵۰	(۱, ۴, ۵, ۰, ۰)	۴۰	۵۰
(۲/۴۹۷)۸/۹۴۸	(۱/۶۸۴)۷/۶۱۳	(۱/۳۷۸)۶/۹۵۴	(۱, ۰, ۰, ۰, ۱)	۲۵	۵۰
(۴/۶۲۹)۱۵/۴۸	(۲/۶۸۱)۱۱/۹۷	(۰/۰۶۶۵)۱/۸۲۰	(۱۵, ۱۵, ۰, ۰, ۰)	۵۰	۸۰

مراجع

- [1] Asgharzadeh, A., and Moradnejad, P. (2008). Inference for a Skew Normal Distribution Based on Progressively Type-II Censored Samples. *Journal of Statistical Research of Iran*, **5**(1), 33-56.
- [2] Bhattacharya, S. K., and Tyagi, R. K. (1990). Bayesian survival analysis based on the Rayleigh model. *Trabajos de Estadística*, **5**, 81-92.

- [3] Balakrishnan, N., and Kannan, N. (2000). Point and Interval Estimation for the Parameters of the Logistic Distribution Based on Progressively Type-II Censored Samples. *In Handbook of Statistics*, **20**, 431-456.
- [4] Balakrishnan, N., and Sandhu, R. A. A. (1995). Simple simulational algorithm for generating progressive Type-II censored samples. *Journal of the American Statistical Association*, **49**, 229-230.
- [5] Balakrishnan, N., and Aggarwala, R. (2000). *Progressive Censoring: Theory, Methods and Applications*. Birkhauser, Boston.
- [6] Balakrishnan, N., and Asgharzadeh, A. (2005). Inference for the scaled halflogistic distribution based on progressively Type II censored samples. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **34**, 73-87.
- [7] Berger, J. O. (1985). *Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis*, second ed., Springer-Verlag, New York.
- [8] Chung, Y. (1995). Estimation of scale parameter from Rayleigh distribution under entropy loss. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, **2(1)**, 33-40.
- [9] Dyer, D. D. and Whisenand, C. W. (1973). Best linear unbiased estimator of the parameter of the Rayleigh distribution. *IEEE Transactions on Reliability*, **22**, 27-34.
- [10] Dey, S., and Maiti, S. S. (2012). Bayesian estimation of the parameter of Rayleigh distribution under the extended Jeffrey's prior. *Electronic Journal of Applied Statistical Analysis*, **5(1)**, 44-59.
- [11] Fernandez, A. J. (2010). Bayesian estimation and prediction based on Rayleigh sample quantiles. *Quality and Quantity*, **44**, 1239-1248.
- [12] Han, M. (1997). The structure of hierarchical prior distribution and its applications. *Chinese Operations Research and Management Science*, **6(3)**, 31-40.
- [13] Han, M. (2009). E-Bayesian estimation and hierarchical Bayesian estimation of failure rate. *Applied Mathematical Modelling*, **33(4)**, 1915-1922.
- [14] Han, M. (2011). E-Bayesian estimation of the reliability derived from Binomial distribution. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 2419-2424.
- [15] Jaheen, Z. F., and Okasha, H. M. (2011). E-Bayesian estimation for the Burr type XII model based on type-2 censoring. *Applied Mathematical Modelling*, **35**, 4730-4737.
- [16] Lindley, D. V., and Smith, A. F. (1972). Bayes estimation for the linear model. *Journal of the Royal Statistical Society-Series B*, **34**, 1-41.

- [17] Rayleigh, J. W. S. (1880). On the resultant of a large number of vibration of the somepith and of arbitrary phase. *Philosophical Magazine, 5th series*, **10**, 73-78.
- [18] Wang, J., Li, D., and Chen, D. (2012). E-Bayesian estimation and hierarchical bayesian estimation of the system reliability parameter. *Systems Engineering Procedia*, **3**, 282-289.