

مقایسه نوارهای اطمینان همزمان هذلولوی و پهنای ثابت در رگرسیون خطی چندگانه تحت معیار MVCS

جواد احمدی،^۱ فربرز حیدری^۲

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۱۲/۸

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۷/۱۱/۷

چکیده:

یک نوار اطمینان، همزمان اطلاعات مفیدی در محدوده قابل قبولی از مدل رگرسیونی مجهول ارائه می‌دهد و نوارهای اطمینان متفاوت اغلب می‌توانند برای مدل رگرسیونی یکسان ساخته شوند. برای یک خط رگرسیون ساده، لیووهایتز (۲۰۰۷) کاربرد سطح مجموعه اطمینان متناظر با یک نوار اطمینان را به عنوان یک معیار بهینگی در مقایسه نوارهای اطمینان پیشنهاد کردند؛ هرچه سطح مجموعه اطمینان کوچک‌تر باشد، نوار اطمینان متناظر بهتر است. در مطالعه نوارهای اطمینان برای یک مدل رگرسیونی خطی چندگانه، این معیار مجموعه اطمینان با سطح مینیمم را می‌توان به یک معیار مجموعه اطمینان با حجم مینیمم تعمیم داد. در این مقاله نوارهای اطمینان هذلولوی و نوارهای اطمینان با پهنای ثابت برای یک مدل رگرسیونی خطی چندگانه روی یک ناحیه بیضیواری خاصی از متغیرهای پیشگوی تحت معیار مقایسه می‌شوند. مشاهده می‌شود که بهتر بودن یک نوار نسبت به نوار دیگر به مقدار یک زاویه خاص بستگی دارد که اندازه ناحیه متغیر پیشگو را تعیین می‌کند. زمانی که این زاویه و در نتیجه اندازه ناحیه متغیر پیشگو کوچک باشد، نوار اطمینان با پهنای ثابت بهتر از نوار اطمینان هذلولوی است اما فقط به طور حاشیه‌ای. وقتی که این زاویه و در نتیجه اندازه ناحیه متغیر پیشگو بزرگ است، نوار اطمینان هذلولوی می‌تواند به طور کلی بهتر از نوار اطمینان با پهنای ثابت باشد.

واژه‌های کلیدی: نوارهای اطمینان، هذلولوی، پهنای ثابت، مدل رگرسیونی خطی چندگانه

۱ مقدمه

بر این برآوردگر کمترین توان دوم b عبارت است از

$$\hat{b} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

مدل رگرسیونی خطی چندگانه زیر را در نظر بگیرید:

فرض کنید $\hat{\sigma}^2$ نشان‌دهنده میانگین توان دوم خطاها با $v = n - p$ درجه آزادی باشد، آن‌گاه

$$Y = Xb + e$$

$$\hat{\sigma}^2 \sim \sigma^2 \chi_v^2 / v,$$

و مستقل از $\hat{b}$ است. فرض کنید $x = (1, x_1, \dots, x_p)^T$ و $x_1 = (x_2, \dots, x_p)^T$

یک نمودار اطمینان همزمان برای تابع رگرسیون

$$x^T b = b_1 + b_2 x_2 + \dots + b_p x_p$$

که در آن $Y_{n \times 1}$ برداری است از پاسخ‌های مشاهده شده، $X_{n \times p}$ ماتریس طرح است که ستون اول آن با $(1, \dots, 1)^T$ و j -امین ستون آن با $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})^T$ نشان داده می‌شود، $(2 \leq j \leq p)$ بردار ضرایب رگرسیونی است، و $b = (b_1, \dots, b_p)^T$ بردار خطای جمعی با توزیع $N(0, \sigma^2 I)$ است که σ^2 نامعلوم است. فرض کنید $X^T X$ ماتریس ناتکین (وارون پذیر) است، بنا

^۱ دانشجوی دکتری آمار، دانشگاه آزاد واحد علوم و تحقیقات تهران، ایران

^۲ هیأت علمی بخش آمار، دانشگاه شیراز، ایران

شبه‌سازی برای ساختن یک نوار اطمینان هذلولوی دوطرفه روی χ_r برای حالت کلی $p \geq 2$ ، اخیراً در [۱۹] ارائه شده است، که در آن ثابت بحرانی را می‌توان به‌طور دقیق به هر میزان مورد نیاز محاسبه کرد. اگر تعداد تکرارها در شبه‌سازی به اندازه کافی بزرگ در نظر گرفته شود، ساختن یک نوار اطمینان با پهنای ثابت روی χ_r برای حالت کلی $p \geq 2$ با استفاده از ترکیبی از انتگرال‌گیری عددی و شبه‌سازی در [۲۰] مورد بررسی قرار گرفته است. برای $p > 2$ ، یک ناحیه مفید دیگر χ توسط ناحیه بیضیواری χ_e در رابطه (۱) زیر ارائه شده است. فرض کنید $X_{(1)}$ یک ماتریس $(p-1) \times n$ باشد که با حذف کردن اولین ستون ۱ها از ماتریس طرح X به دست می‌آید. فرض کنید $x_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_{ij}$ برابر با میانگین مقادیر مشاهده‌شده از j -امین متغیر پیشگو ($2 \leq j \leq p$) باشد و $x_1 = (x_2, \dots, x_p)^T$ ماتریس $(p-1) \times (p-1)$ زیر را تعریف کنید:

$$S = \frac{1}{n} (X_{(1)} - \mathbf{1}x_{(1)}^T)^T (X_{(1)} - \mathbf{1}x_{(1)}^T) \\ = \frac{1}{n} (X_{(1)}^T X_{(1)} - nx_{(1)}x_{(1)}^T)$$

که در آن $\mathbf{1}$ یک بردار n تایی از ۱ها است. توجه کنید که ماتریس S دقیقاً همان ماتریس واریانس کواریانس نمونه متشکل از $p-1$ متغیر پیشگو است و ناکین زمانی که X یک ماتریس پر رتبه ستونی فرض شود. با این فرض، ناحیه بیضیواری به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\chi_e = \left\{ x_{(1)} : (x_{(1)} - \mathbf{1}x_{(1)}^T)^T S^{-1} (x_{(1)} - \mathbf{1}x_{(1)}^T) \leq a^2 \right\} \quad (1)$$

که در آن $a > 0$ یک مقدار ثابت داده شده‌ای است. واضح است که این ناحیه در $x_{(1)}$ متمرکز بوده و یک شکل بیضیواری در χ_e آن است که واریانس مدل رگرسیونی برازش‌شده در χ_e برای همه $x_{(1)}$ روی سطح بیضیوار χ_e یک مقدار ثابت است. ساختن یک نوار اطمینان هذلولوی دوطرفه تقریبی روی χ_e اولین بار توسط هاپرین و گورین [۲۱] مورد بررسی قرار گرفته است. ساختن یک نوار اطمینان هذلولوی دقیق روی χ_e از آن زمان به بعد توسط باهر [۲۲]، کسلا و استرودرمن [۲۳]، سپن و آسپیکا [۲۴] و لئو و لین [۲۵] مورد بررسی قرار گرفت. هدف این مقاله مقایسه دو مورد از رایج‌ترین فرم

روی یک ناحیه داده شده‌ای مانند χ متشکل از $p-1$ متغیر پیشگوی $x_1 = (x_2, \dots, x_p)^T$ اطلاعات مفیدی در مورد مدل رگرسیونی واقعی اما نامعلوم ارائه می‌دهد، یک تابع رگرسیون خطی یک نامزد پذیرفتنی برای مدل رگرسیونی ناشناخته است اگر و تنها اگر به‌طور کامل درون نوار اطمینان قرار گرفته باشد. مقالات متعددی وجود دارند که کاربردهای گوناگونی از نوارهای اطمینان را مورد بررسی قرار می‌دهند، برای مثال [۱] تا [۵] را ملاحظه کنید.

ساختن نوارهای اطمینان همزمان از یک تاریخی بر خوردار است که به ورکینگ و هاتیلینگ [۶] برمی‌گردد. ابتدا اسچف [۷] نوار اطمینان همزمان هذلولوی دوطرفه شناخته‌شده را روی فضای کلی $\chi = R^{p-1}$ متشکل از $p-1$ متغیر پیشگو ارائه داد. با وجود این، مفیدتر بودن در عمل عبارت است از ساختن نوارهای اطمینان روی زیرمجموعه‌ای به‌طور متناهی کراندار از R^{p-1} که با مقادیر واضح و معینی از متغیرهای پیشگو متناظر است. برای $p=2$ ، یعنی زمانی که فقط یک متغیر پیشگو وجود دارد، ساختن نوارهای اطمینان همزمان دقیق گوناگون شامل محدودیت‌های فاصله‌ای روی x_2 در [۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۳] بررسی شده است. در حالت خاص، [۱۳] اولین شخصی بود که استفاده از نوارهای اطمینان با پهنای ثابت زمانی که x_2 به یک فاصله متناهی محدود می‌شود را پیشنهاد کرد. در این خصوص [۱۴] را ملاحظه کنید. برای $p > 2$ ، ساختن نوارهای اطمینان واقعی روی یک ناحیه متناهی χ از متغیرهای پیشگو مشکل‌تر است. زمانی که $p > 2$ حد اقل دو متغیر پیشگو وجود دارند و ناحیه χ ممکن است صورت‌های متعددی داشته باشد. χ یک ناحیه مفید عبارت است از مجموعه مستطیلی

$$\chi_r = \left\{ x_{(1)}^T : a_i \leq x_i \leq b_i, i = 2, \dots, p \right\}$$

که در آن $-\infty \leq a_i \leq b_i \leq \infty$ ، $i = 2, \dots, p$ ، مقادیر ثابت داده شده‌ای هستند. فرض کنید که برای حد اقل یک مقدار از $a_i < b_i < \infty$ ، $i = 2, \dots, p$. ساختن نوارهای اطمینان هذلولوی دوطرفه روی χ_r توسط ناف و دیگران [۱۵]، نیمن [۱۶، ۱۷] و سان ولودر [۱۸] مورد بررسی قرار گرفته است. با وجود این، تمام این نوارهای اطمینان یا تقریبی هستند و یا پایستار. یک روش

تصادفی t استاندارد، p بعدی با ν درجه آزادی است؛ به عنوان مثال، برای یک تشریح کامل از توزیع‌های چندمتغیره dt [۳۰] را ملاحظه کنید. شایان ذکر است که

$$1 - \alpha = P \left\{ \sup_{\mathbf{x}_{(1)} \in \chi_e} \frac{|\mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})|}{\hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}}} \leq c_{h, \nu} \right\}$$

$$P \left\{ \sup_{\mathbf{x}_{(1)} \in \chi_e} \frac{\left| \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \right\}^T \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) / \hat{\sigma} \right\} \right|}{\sqrt{\left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \right\}^T \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \right\}}} \leq c_{h, \nu} \right\}$$

فرض کنید عبارت زیر برقرار باشد:

$$V_h = \left\{ \mathbf{t} : \sup_{\mathbf{x}_{(1)} \in \chi_e} \frac{\left| \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \right\}^T \mathbf{t} \right|}{\|(\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}\|} \leq c_{h, \nu} \right\} \subset R^p \quad (۳)$$

آن‌گاه مجموعه اطمینان برای ضریب رگرسیون $\mathbf{b}$ مرتبط با نوار هذلولوی موجود در رابطه (۲)، به روش زیر به دست می‌آید:

$$C_{h, \nu}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma}) = \left\{ \mathbf{b} : (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) / \hat{\sigma} \in V_h \right\} \quad (۴)$$

فرض کنید $\mathbf{w} = (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} = (w_1, \mathbf{w}_{(1)}^T)^T$ که در آن $\mathbf{w}_1 = (w_2, \dots, w_p)^T = \mathbf{Z}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{1} / \sqrt{n}$ و $w_1 = \mathbf{z}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} = \mathbf{1} / \sqrt{n}$ آن‌گاه طبق [۲۵]، رابطه‌های (۶)، (۷)، (۸) و (۱۰)، نتیجه می‌شود. V_h را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$V_h = \left\{ \mathbf{t} : \sup_{\mathbf{w} \in W_e} \frac{|\mathbf{W}^T \mathbf{t}|}{\|\mathbf{W}\|} \leq c_{h, \nu} \right\} \quad (۵)$$

که در آن

$$W_e = \{ \mathbf{W} : w_1 = \mathbf{1} / \sqrt{n}, \|\mathbf{W}\|^2 \leq (1 + a^2) / n \} \subset R^p \quad (۶)$$

است. از رابطه (۴) و تعریف T ، ثابت بحرانی $c_{h, \nu}$ می‌توان با حل $1 - \alpha = P \{ T \in V_h \}$ تعیین کرد که با استفاده از [۲۵] معادل است با

$$1 - \alpha = F_{p, \nu} \left(\frac{c_{h, \nu}^2}{p} \right) \cdot \int_0^{\theta^*} k \sin^{p-2} \theta d\theta$$

$$+ \int_{\theta^*}^{\frac{\pi}{2} - \theta^*} \nu k \sin^{p-2} (\theta + \theta^*) \cdot F_{p, \nu} \left\{ \frac{c_{h, \nu}^2}{p \cos^2 \theta} \right\} d\theta,$$

نوارهای اطمینان است: نوارهای اطمینان هذلولوی از نوع شفه و نمودارهای اطمینان با پهنای ثابت از نوع گافریان روی χ_e تحت معیار بهینگی مجموعه اطمینان با سطح (حجم) مینیم که در [۲۶] پیشنهاد شده است. با توجه به این نکته، هر نوار با سطح اطمینان $1 - \alpha$ برای مدل رگرسیونی $\mathbf{x}^T \mathbf{b}$ با یک مجموعه اطمینان با سطح $1 - \alpha$ در R^p برای ضرایب رگرسیون $\mathbf{b}$ متناظر است. معیار بهینگی مجموعه اطمینان با سطح (حجم) مینیم یک نوار اطمینانی را ترجیح می‌دهد که مجموعه اطمینان آن دارای یک سطح (حجم) مینیم است. برای $p = 2$ ، نوارهای اطمینان متعددی برای یک خط رگرسیون تحت معیار مجموعه اطمینان با سطح مینیم در [۲۶] مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته‌اند. در واقع، قبل از معرفی معیار مجموعه اطمینان با سطح (حجم) مینیم، میانگین (وزنی) پهنای یک نوار اطمینان معیار بهینگی اولیه برای انتخاب نوارهای اطمینان بود، برای مثال، مراجع [۲۷]، [۲۸]، [۲۹] را مشاهده کنید. در حالت خاص، نوارهای اطمینان هذلولوی و پهنای ثابت روی χ_e در [۲۷] تحت معیار میانگین پهنای مقایسه شدند.

۲ نوارهای اطمینان و مجموعه‌های اطمینان

در این بخش نوارهای اطمینان هذلولوی و نوارهای اطمینان پهنای ثابت روی χ_e تشریح می‌شوند و مجموعه‌های اطمینان متناظر با آنها تعیین می‌گردند. نوار اطمینان هذلولوی دوطرفه به روش زیر به‌ازای هر $\mathbf{x}_{(1)} = (x_2, \dots, x_p)^T \in \chi_e$ معین می‌گردد:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} \in \left(\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{b}} \pm c_{h, \nu} \hat{\sigma} \sqrt{\mathbf{x}^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x}} \right) \quad (۲)$$

که در آن χ_e در رابطه (۱) تعریف شده است و $c_{h, \nu}$ به عنوان ثابت بحرانی انتخاب‌شده مناسبی است، به طوری که سطح اطمینان همزمان نوار مساوی با $1 - \alpha$ است. مشابه [۲۵]، بردار p بعدی $\mathbf{z} = \sqrt{n}(\mathbf{1}, \bar{\mathbf{x}}_{(1)}^T)^T$ تعریف کنید و فرض کنید ماتریس $\mathbf{Z}$ با ابعاد $p \times (p - 1)$ در رابطه $(\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{z}, \mathbf{Z}) = \mathbf{I}_p$ صدق کند. بنا بر این نتیجه می‌شود که $\mathbf{T} = (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) / \hat{\sigma}$ یک بردار

که در آن

و کران بالای عبارت اخیر در $\mathbf{W} \in \mathcal{W}_e$ با

$$\mathbf{W}_{(1)} = \text{sign}(t_1) \sqrt{a^2/n} \mathbf{t}_{(1)} / \|\mathbf{t}_{(1)}\|$$

به دست می‌آید. بنا بر این V_c در رابطه (۱۰) به صورت زیر بیان می‌شود

$$V_c = \left\{ \mathbf{t} : |\mathbf{t}_1| / \sqrt{n} + \sqrt{a^2/n} \|\mathbf{t}_{(1)}\| \leq c_{h,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \right\}$$

اکنون، با استفاده از مختصات قطبی $(R_v, \theta_{v1}, \dots, \theta_{v,p-1})^T$ برای بردار p -بعدی $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_p)^T$ داریم

$$\begin{cases} \nu_1 = R_v \cos \theta_{v1} \\ \nu_2 = R_v \sin \theta_{v1} \cos \theta_{v2} \\ \nu_3 = R_v \sin \theta_{v1} \sin \theta_{v2} \cos \theta_{v3} \\ \vdots \\ \nu_{p-1} = R_v \sin \theta_{v1} \sin \theta_{v2} \dots \sin \theta_{v,p-2} \cos \theta_{v,p-1} \\ \nu_p = R_v \sin \theta_{v1} \sin \theta_{v2} \dots \sin \theta_{v,p-2} \sin \theta_{v,p-1} \end{cases}$$

که در آن

$$\begin{cases} 0 \leq \theta_{v1} \leq \pi \\ 0 \leq \theta_{v2} \leq \pi \\ 0 \leq \theta_{v3} \leq \pi \\ \vdots \\ 0 \leq \theta_{v,p-2} \leq \pi \\ 0 \leq \theta_{v,p-1} \leq \pi \\ R_v \geq 0 \end{cases}$$

مجموعه V_c به صورت زیر بیان می‌شود:

$$V_c = \left\{ \mathbf{t} : |R_t \cos \theta_{t1}| / \sqrt{n} + \sqrt{a^2/n} |R_t \sin \theta_{t1}| \leq c_{h,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \right\} \\ = V_{c,1} + V_{c,2} \quad (11)$$

که در آن

$$V_{c,1} = \{ \mathbf{t} : 0 \leq \theta_{t1} \leq \pi/2, R_t \cos(\theta_{t1} - \theta^*) \leq c_{h,2} \} \quad (12)$$

$$V_{c,2} = \{ \mathbf{t} : \pi/2 \leq \theta_{t1} \leq \pi, R_t \cos(\pi - \theta_{t1} - \theta^*) \leq c_{h,2} \} \quad (13)$$

که θ^* در رابطه (۷) به دست می‌آید.

$$\theta^* = \arccos \left(1 / \sqrt{1+a^2} \right) \in (0, \pi/2)$$

$$k = 1 / \left(\int_0^\pi \sin^{p-2} \theta \, d\theta \right), \quad (7)$$

$F_{p,v}(\cdot)$ تابع توزیع تجمعی از توزیع F با p و ν درجه‌های آزادی است. حال توجه خود را به بررسی نوار با پهنای ثابت دوطرفه از نوع گافین دوطرفه می‌سازیم، که به‌ازای هر $\mathbf{x}_{(1)} = (x_2, \dots, x_p)^T \in \chi_e$ رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} \in \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{b}} \pm c_{c,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \hat{\sigma} \quad (8)$$

$\forall$

که در آن $c_{c,2}$ طوری انتخاب می‌شود که سطح اطمینان همزمان از نوار برابر با $1 - \alpha$ باشد. از این رو

$$1 - \alpha = P \left\{ \sup_{\mathbf{x}_{(1)} \in \chi_e} |\mathbf{x}^T (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b})| / \hat{\sigma} \leq c_{c,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \right\} \\ P \left\{ \sup_{\mathbf{x}_{(1)} \in \chi_e} \left| \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \right\}^T \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) / \hat{\sigma} \right\} \right| \leq c_{c,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \right\}$$

فرض کنید

$$V_c = \left\{ \mathbf{t} : \sup_{\mathbf{x}_{(1)} \in \chi_e} \left| \left\{ (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^T (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{x} \right\}^T \mathbf{t} \right| \leq c_{h,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \right\} \subset R^p$$

آن‌گاه مجموعه اطمینان برای ضریب رگرسیون $\mathbf{b}$ که با نوار پهنای ثابت در رابطه (۸) مرتبط است به روش زیر به دست می‌آید

$$C_{C,2}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma}) = \left\{ \mathbf{b} : (\mathbf{z}, \mathbf{Z})^{-1} (\mathbf{X}^T \mathbf{X}) (\hat{\mathbf{b}} - \mathbf{b}) / \hat{\sigma} \in V_c \right\} \quad (9)$$

مشابه عبارتی که در رابطه (۵) به دست آمد، می‌توان V_c را به صورت زیر نوشت:

$$V_c = \left\{ \mathbf{t} : \sup_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}_e} |\mathbf{W}^T \mathbf{t}| \leq c_{c,2} \sqrt{(1+a^2)/n} \right\} \quad (10)$$

که در آن $\mathcal{W}_e$ با استفاده از رابطه (۶) تعیین می‌شود، که $\mathbf{t}_{(1)} = (t_2, \dots, t_p)^T$ شایان ذکر است که

$$\sup_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}_e} |\mathbf{W}^T \mathbf{t}| = \sup_{\mathbf{W} \in \mathcal{W}_e} \left| t_1 / \sqrt{n} + \mathbf{W}_{(1)}^T \mathbf{t}_{(1)} \right| \leq |t_1| / \sqrt{n} + \sqrt{a^2/n} \|\mathbf{t}_{(1)}\|$$

از تعریف $\mathbf{T}$ و رابطه‌های (۹)، (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) ثابت

بحرانی $c_{c,2}$ از طریق زیر به دست می‌آید:

$$P\left\{T_1/\sqrt{n} + \sqrt{a^2/n} \|\mathbf{T}_{(1)}\| \leq c_{c,1} \sqrt{(1+a^2)/n}\right\}$$

$$= P\left\{R_T \cos \theta_{T_1}/\sqrt{n} + \sqrt{a^2/n} R_T \sin \theta_{T_1} \leq c_{c,1} \sqrt{(1+a^2)/n}\right\}$$

$$= P\{R_T \cos(\theta_{T_1} - \theta^*) \leq c_{c,1}\}$$

$$= P\left\{\frac{\pi}{2} \leq \theta_{T_1} < \frac{\pi}{2} + \theta^*, R_T \cos(\theta_{T_1} - \theta^*) \leq c_{c,1}\right\}$$

$$+ P\left\{\frac{\pi}{2} + \theta^* \leq \theta_{T_1} \leq \pi\right\}$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2} + \theta^*}^{\pi} k \sin^{p-2} \theta \cdot F_{p,v} \left(\frac{c_{c,1}^2}{p \cos^2(\theta - \theta^*)} \right) d\theta$$

$$+ \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2} + \theta^*} k \sin^{p-2} \theta d\theta$$

با جایگزینی این عبارت در رابطه (۱۴)، مقدار عددی ثابت

بحرانی $c_{h,1}$ را با استفاده از روش‌های عددی حساب کرد. همه

ثابت‌های بحرانی $c_{c,1}$ ، $c_{c,2}$ ، $c_{h,1}$ ، $c_{h,2}$ فقط وابسته به ν و α هستند.

۳ مقایسه تحت معیار MVCS

در این بخش ابتدا حجم‌های مجموعه‌های اطمینان دوطرفه $c_{c,2}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma})$ و $c_{h,2}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma})$ محاسبه می‌شوند. سپس حجم‌های این دو مجموعه اطمینان با هم مقایسه می‌شوند و در نتیجه نوار اطمینان متناظر با حجم کوچک‌تر تحت معیار MVCS مطلوب‌تر است. در آخر، نوارهای هذلولوی و پهنای ثابت یک‌طرفه به روش مشابه مقایسه می‌شوند. فرض کنید $\nu(R)$ نشان‌دهنده حجم یک مجموعه $R \subset R^p$ باشد، فرض کنید $B_p(r)$ نشان‌دهنده گوی با شعاع r درون R^p باشد. توجه کنید ژاکوبی تبدیل از مختصات دکارتی به مختصات قطبی در بخش قبلی برابر است با:

$$|J| = R^{p-1} \sin^{p-2} \theta_1 \sin^{p-3} \theta_2 \dots \sin \theta_{p-2}$$

از این رو واضح است که

$$\begin{aligned} \nu(B_p(r)) &= \int_{R=0}^r \int_{\theta_1=0}^{\pi} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \dots \\ &\int_{\theta_{p-2}=0}^{\pi} \int_{\theta_{p-1}=0}^{2\pi} |J| dR d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_{p-1} = c_p r^p \end{aligned}$$

که در آن تساوی آخر از توزیع‌های R_T و θ_{T_1} استقلال R_T و θ_{T_1} نتیجه می‌شود. برای جزئیات بیشتر به [۲۵]، عبارت‌های (۱۱) و (۱۲) مراجعه کنید.

اکنون نوارهای هذلولوی و پهنای ثابت یک‌طرفه را در نظر بگیرید و بدون این که از کلیت آن کاسته شود، روی نوارهای اطمینان پائینی تمرکز می‌کنیم. نوار هذلولوی پائینی با استفاده از رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= \int_0^{\theta^*} k \sin^{p-2} \theta d\theta \cdot F_{p,v} \left(\frac{c_{h,1}^2}{p} \right) \\ &+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} k \sin^{p-2} (\theta + \theta^*) \cdot F_{p,v} \left(\frac{c_{h,1}^2}{p \cos^2 \theta} \right) d\theta \\ &+ \int_{\frac{\pi}{2} - \theta^*}^{\pi} k \sin^{p-2} \theta d\theta, \end{aligned}$$

نوار پهنای ثابت پائین به‌ازای هر $\mathbf{x}_{(1)} = (x_2, \dots, x_p)^T \in \chi_e$ به روش زیر تعریف می‌شود:

$$\mathbf{x}^T \mathbf{b} > \mathbf{x}^T \hat{\mathbf{b}} - c_{c,1} \sqrt{(1+a^2)/n} \hat{\sigma}$$

که در آن $c_{h,1}$ طوری انتخاب شده است که سطح اطمینان همزمان از نوار برابر $1 - \alpha$ است. مشابه با مورد دوطرفه، داریم:

$$1 - \alpha = P\left\{\mathbf{t} : \sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}_e} \mathbf{w}^T \mathbf{T} \leq c_{c,1} \sqrt{(1+a^2)/n}\right\} \quad (14)$$

که در آن $T = (T_1, T_{(1)})^T$ مشابه مبحث قبلی است. توجه کنید که

$$\sup_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}_e} \mathbf{w}^T \mathbf{T} = T_1/\sqrt{n} + \sqrt{a^2/n} \|\mathbf{T}_{(1)}\|$$

بنا بر این احتمال در رابطه (۱۴) برابر است با

که در آن c_p فقط وابسته به p است. با استفاده از [۲۵]، لم ۴)، رابطه (۵) را می‌توان به چهار بخش تقسیم نمود:

$$V_h = V_{h,1} + V_{h,2} + V_{h,3} + V_{h,4}$$

که در آن

$$V_{h,1} = \{t : 0 \leq \theta_{t1} \leq \theta^*, R_t \leq c_{h,2}\}$$

$$V_{h,2} = \left\{t : \theta^* < \theta_{t1} \leq \frac{\pi}{\gamma}, R_t \cos(\theta_{t1} - \theta^*) \leq c_{h,2}\right\}$$

$$V_{h,3} = \left\{t : \frac{\pi}{\gamma} < \theta_{t1} \leq \pi - \theta^*, R_t \cos(\pi - \theta^* - \theta_{t1}) \leq c_{h,2}\right\}$$

$$V_{h,4} = \{t : \pi - \theta^* < \theta_{t1} \leq \pi, R_t \leq c_{h,2}\}$$

حال $\nu(V_{h,1})$ برابر است با:

$$\begin{aligned} & \int_{R=0}^{c_{h,2}} \int_{\theta_1=0}^{\theta^*} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \cdots \int_{\theta_{p-2}=0}^{\pi} \int_{\theta_{p-1}=0}^{2\pi} |J| dR d\theta_1 \theta_{p-1} \\ &= \left(\frac{\int_{\theta_1=0}^{\theta^*} \sin^{p-\gamma} \theta_1 d\theta_1}{\int_{\theta_1=0}^{\pi} \sin^{p-\gamma} \theta_1 d\theta_1} \right) v(B_p(c_{h,2})) \end{aligned}$$

$$= k \int_{\theta_1=0}^{\theta^*} \sin^{p-\gamma} \theta_1 d\theta_1 v(B_p(c_{h,2}))$$

و $\nu(V_{h,2})$ برابر است با

$$\begin{aligned} & \int \int_{\substack{R \cos(\theta_1 - \theta^*) \leq c_{h,2} \\ \theta^* \leq \theta_1 \leq \pi/\gamma}} \int_{\theta_2=0}^{\pi} \cdots \int_{\theta_{p-2}=0}^{\pi} \int_{\theta_{p-1}=0}^{2\pi} |J| dR d\theta_1 \theta_{p-1} \\ &= \left(\frac{\int_{\substack{R \cos(\theta_1 - \theta^*) \leq c_{h,2} \\ \theta^* \leq \theta_1 \leq \pi/\gamma}} R^{p-1} \sin^{p-\gamma} \theta_1 dR d\theta_1}{\int_{R=0}^{c_{h,2}} \int_{\theta_1=0}^{\pi} R^{p-1} \sin^{p-\gamma} \theta_1 dR d\theta_1} \right) v(B_p(c_{h,2})) \\ &= k \int_{\theta^*}^{\pi/\gamma} \sin^{p-\gamma} \theta_1 / \cos^p(\theta_1 - \theta^*) d\theta_1 v(B_p(c_{h,2})) \end{aligned}$$

به علاوه، داریم $\nu(V_{h,4}) = \nu(V_{h,1})$ و $\nu(V_{h,3}) = \nu(V_{h,2})$ از این رو داریم

$$\begin{aligned} \nu(V_h) = & 2k \left(\int_{\theta_1=0}^{\theta^*} \sin^{p-\gamma} \theta_1 d\theta_1 \right. \\ & \left. + \int_{\theta^*}^{\pi/\gamma} \sin^{p-\gamma} \theta_1 / \cos^p(\theta_1 - \theta^*) d\theta_1 \right) v(B_p(c_{h,2})) \end{aligned} \quad (15)$$

برای نوار پهنای ثابت دوطرفه در رابطه (۸)، محاسبات مشابه رابطه‌های (۱۱) تا (۱۳) نشان می‌دهد که

$$\nu(V_{c,1}) = (V_{c,2}) = k \int_{\theta_1=0}^{\pi/\gamma} \sin^{p-\gamma} \theta_1 / \cos^p(\theta_1 - \theta^*) d\theta_1 v(B_p(c_{c,2}))$$

و بنا بر این

$$v(V_c) = 2k \int_{\theta_1=0}^{\pi/\gamma} \sin^{p-\gamma} \theta_1 / \cos^p(\theta_1 - \theta^*) d\theta_1 v(B_p(c_{c,2})) \quad (16)$$

است. اکنون توجه کنید مجموعه‌های اطمینان $c_{h,2}$ در رابطه (۴) و $c_{c,2}$ در رابطه (۹) به صورت زیر هستند:

$$\begin{aligned} C(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma}) &= \{b : (z, Z)^{-1}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})(b - \hat{\mathbf{b}}) / \hat{\sigma} \in V\} \\ &= \hat{\sigma}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}(z, Z)V + \hat{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

و بنا بر این

$$(C(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma})) = \left| \hat{\sigma}(\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1}(z, Z) \right| v(V) = \left| \hat{\sigma}(X^T X)^{-1/\gamma} \right| v(V)$$

از این رو از رابطه‌های (۱۵) و (۱۶) داریم

$$\begin{aligned} eff &= \frac{v(C_{c,2}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma}))}{v(C_{h,2}(\hat{\mathbf{b}}, \hat{\sigma}))} = \frac{v(V_c)}{v(V_h)} \\ &= \frac{\int_{\theta_1=0}^{\pi/\gamma} \sin^{p-\gamma} \theta_1 / \cos^p(\theta_1 - \theta^*) d\theta_1}{\int_{\theta_1=0}^{\theta^*} \sin^{p-\gamma} \theta_1 d\theta_1 + \int_{\theta^*}^{\pi/\gamma} \sin^{p-\gamma} \theta_1 / \cos^p(\theta_1 - \theta^*) d\theta_1} \left(\frac{c_{c,2}^p}{c_{h,2}^p} \right) \end{aligned} \quad (17)$$

تحت معیار MVCS نوار هذلولوی دوطرفه نسبت به نوار با پهنای ثابت دوطرفه بهتر است اگر و تنها اگر $eff > 1$.

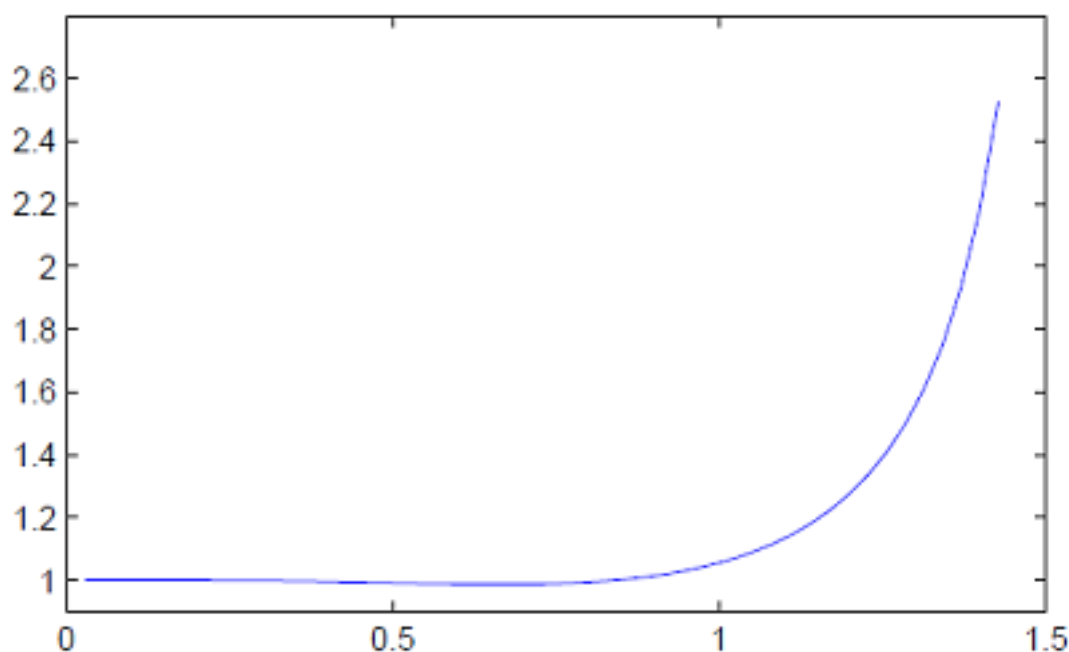
می‌توان نشان داد که اندازه eff تغییر نمی‌کند اگر یکی از متغیرهای پیشگو دارای یک تبدیل خطی باشد (یعنی، eff ناوردای مکان و مقیاس است). قابل توجه است که eff فقط وابستگی به θ^* ، p ، γ و α دارد. اندازه ناحیه χ_e در رابطه (۱) به وسیله α تعیین شده است، هرگاه α بیشتر باشد، χ_e نیز بزرگ‌تر است. از یک به یک بودن رابطه (۷) بین α و θ^* ، اندازه χ_e متناوباً به وسیله θ^* تعیین می‌شود، هر چه زاویه θ^* بیشتر باشد اندازه χ_e نیز بزرگ‌تر است. اگر $\theta^* \rightarrow 0^+$ ، آن‌گاه حد هر دوی نوارهای هذلولوی و پهنای ثابت به فاصله اطمینان t دوطرفه برای $x^T b$ در $x_{(1)} = \bar{x}_{(1)}$ میل می‌کند. اگر $\theta^* \rightarrow \pi/2$ ، آن‌گاه حد نوار هذلولوی روی کل فضای متغیرهای پیشگو به نوار شفه میل می‌کند. از طرف دیگر اگر $\theta^* \rightarrow \pi/2$ ، آن‌گاه حد ثابت بحرانی $c_{c,2}$ از نوار با پهنای ثابت یک مقدار ثابت است و بنا بر این حد پهنای نوار $2c_{c,2} \sqrt{(1 + a^2)/n} \hat{\sigma}$ و حجم $\nu(V_c)$ در رابطه (۱۶) نامتناهی اند.

با این وجود، برتری نوار با پهنای ثابت به نوار هذلولوی در این موقعیت خیلی محدود است چون $\min_{\theta^* \in (0, \pi/2)} eff(\theta^*)$ فقط به طور خیلی حاشیه‌ای کوچک‌تر از یک است. از طرف دیگر، اگر $\theta^* < \theta^* < \pi/2$ ، نوار هذلولوی بهتر از نوار با پهنای ثابت است. چون زمانی که θ^* به حد بالای $\pi/2$ نزدیک می‌شود $eff(\theta^*)$ خیلی بزرگ می‌شود.

این مشاهدات با مشاهدات برای یک مدل رگرسیونی خطی ساده در [۲۶] سازگار هستند، که در آن زاویه $\theta/2$ یک نقش مشابهی در آن‌جا ایفا می‌کند که زاویه θ^* در این‌جا ایفا می‌کند. در یک رگرسیون خطی ساده، هر چند، فاصله‌ای که نوارهای اطمینان روی آن ساخته می‌شوند، لازم نیست حول میانگین مقادیر مشاهده‌شده از متغیر پیشگو متقارن باشد. اکنون توجه خود را به بررسی مقایسه نوارهای هذلولوی و پهنای ثابت یک طرفه معطوف می‌سازیم. به خاطر داشته باشید که مجموعه‌های اطمینان برای b که مرتبط با نوارهای هذلولوی و پهنای ثابت یک طرفه هستند، کران دار نیستند و دارای حجم‌های نامتناهی هستند.

eff به عنوان یک تابع از $\theta^* \in (0, \pi/2)$ برای مقادیر معین از $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$ و $p = 3, (1), 8$ ، $\nu = 15, 40, \infty$ محاسبه شد. طرح زیر برای همه ترکیبات p و ν ظاهر می‌شود: تابع $eff(\theta^*)$ روی $\theta^* \in (0, \pi/2)$ ابتدا نزولی و سپس صعودی است. هرگاه θ^* از سمت بالا به صفر میل می‌کند، حد تابع $eff(\theta^*)$ یک می‌شود. مقدار آستانه (p, ν, α) برای مقادیر متفاوت ν و α نسبتاً پایدار است، اما برای مقدار p صعودی است. مقدار (p, ν, α) برای $\theta^* = 3$ تقریباً برابر است با 0.8 و برای $p = 8$ تقریباً 1.1 است. به علاوه $\min_{\theta^* \in (0, \pi/2)} eff(\theta^*)$ برای تمام ترکیبات کمتر از 0.98 نیست. شکل ۱ نمودار تابع $eff(\theta^*)$ را برای $\alpha = 0.05$ و $p = 3$ ، $\nu = 15$ نشان می‌دهد، که شکل این نمودار برای همه ترکیبات از ν ، p و α شاخص است.

از این مشاهدات می‌توان نتایج زیر را استخراج نمود. اگر $\theta^* < \theta^* < \pi/2$ (یعنی وقتی که مقدار در رابطه (۱) از یک مقدار آستانه معینی کوچک‌تر است)، نوار با پهنای ثابت دوطرفه بر حسب مقدار MVCS آن بهتر از نوار هذلولوی دوطرفه است.



شکل ۱. نمودار تابع $eff(\theta^*)$ برای $p = 3$ و $\nu = 15$ و $\alpha = 0.05$

متوسط مورد استفاده قرار می‌گیرد، برای مثال به [۲۷] مراجعه کنید. چون نوارهای اطمینان هذلولوی (پهنای ثابت) حول مدل

برای غلبه بر این مشکل، روش زیر به کار می‌رود که برای مقایسه نوارهای اطمینان با فاصله‌های یک طرفه تحت معیار پهنای

هذلولوی همیشه بزرگ‌تر از متوسط پهنای نوار با پهنای ثابت نیست. ثانیاً، نسبت پهنای متوسط دو نوار همیشه متناهی است حتی اگر $\pi/2 \rightarrow \theta^*$. البته، بهیچگی از این دو روش به کار بردن نوارهای هذلولوی توصیه می‌شود، بنا بر این در آن مفهوم یک سازگاری سوئی (جهتی) در هر دو معیار وجود دارد. در پایان، یک بخش از داده‌های استیلنی در [۳۱] را به کار می‌بریم تا به‌طور مختصر محاسبات بحث شده در این مقاله را توضیح دهیم. همین مجموعه داده‌ها نیز برای توضیح و ارائه توسط کاسلا و استرادرن [۲۳]، نیمن [۱۶] و لیوولین و دیگران [۲۵] به کار برده شده است. دو متغیر پیشگو، عبارت‌اند از درجه حرارت راکتور (x_2) و مبین نسبت H_2 به $n - \text{Heptane}$ (x_3). متغیر پاسخ (y) واگردانی $n - \text{Heptane}$ به استیلن است. تعداد شانزده نقطه داده‌ای وجود دارند، لذا $n = 16$ ، $p = 3$ و $\nu = 13$. مدل رگرسیونی خطی چندگانه برازش شده توسط $y = -130.69 + 0.134x_2 + 0.351x_3$ ارائه می‌شود، با $R^2 = 0.92$ و $\hat{\sigma} = 3.624$ خواهد بود.

مقادیر مشاهده‌شده x_2 از ۱۰۰ تا ۱۳۰۰، تغییر می‌کند با میانگین $x_2 = 1,212.5$ و مقادیر مشاهده‌شده x_3 از ۵/۳ تا ۲۳ تغییر می‌کند با میانگین $x_3 = 12.4$. بنا بر این، ناحیه بیضیواری χ_e در $(x_2, x_3)^T = (1,212.5, 12.4)^T$ متمرکز می‌شود. و اندازه χ_e با مقدار a افزایش می‌یابد. برای $a = 1/9$ و $\alpha = 0.10$ همان‌گونه که در [۲۵] در نظر گرفته شد، ناحیه χ_e قابل مقایسه با دامنه تغییرات مشاهدات روی متغیرهای پیشگو است و برنامه نرم‌افزار MATLAB مقادیر $c_{h,1} = 2.370$ ، $c_{c,1} = 2.276$ ، $eff_1 = 1/119$ ، $\theta^* = 1/0.86$ ، $c_{h,2} = 2.723$ ، $c_{c,2} = 0.771$ و $eff_2 = 1/141$ را محاسبه می‌کند. بنا بر این در این مورد خاص نوار هذلولوی دوطرفه حدود ۱۲ درصد نسبت به نوار پهنای ثابت دوطرفه کاراتر است و نوار هذلولوی یک‌طرفه حدود ۱۴ درصد نسبت به نوار پهنای ثابت یک‌طرفه کاراتر است. کوچک‌ترین مقدار eff روی $(0, \infty)$ برابر با $a = 0.987$ است، که در $a = 0.771$ به دست می‌آید. کوچک‌ترین مقدار eff_1 روی $(0, \infty)$ برابر با a است 0.990 ، که در $a = 0.761$ با موفقیت به دست می‌آید.

رگرسیونی برازش شده $x^T \hat{b}$ متقارن هستند، نصف حجم مجموعه b که مرتبط با نوار

$$x^T b \in x^T \hat{b} \pm c_{h,1} \hat{\sigma} \sqrt{x^T (X^T X)^{-1} x} \quad \forall x_{(1)} = (x_2, \dots, x_p)^T \in \chi_e$$

است، به‌عنوان یک اندازه برای نوار هذلولوی یک‌طرفه به کار می‌رود و نصف دیگر حجم مجموعه b که مرتبط با نوار زیر است

$$x^T b \in x^T \hat{b} \pm c_{c,1} \sqrt{(1 + a^2)/n} \hat{\sigma} \quad \forall x_{(1)} = (x_2, \dots, x_p)^T \in \chi_e$$

به‌عنوان یک اندازه برای نوار پهنای ثابت یک‌طرفه به کار می‌رود. بنا بر این نسبت این دو اندازه، $eff_1(\theta^*)$ است با این تفاوت که $c_{c,2}$ و $c_{h,2}$ به ترتیب با $c_{c,1}$ و $c_{h,1}$ جایگزین می‌شوند. همچنین مقدار eff_1 را به‌صورت تابعی از $\theta^* \in (0, \pi/2)$ برای مقادیر معین $p = 3, 1, 8$ و $\nu = 15, 40, \infty$ محاسبه شد. نتیجه می‌شود که $eff_1(\theta^*)$ فرم و ویژگی‌های مشابه به $eff(\theta^*)$ دارد.

بنا بر این توصیه می‌شود نوار هذلولوی روش قراردادی برای انتخاب باشد مگر این که ویژگی «پهنای ثابت» از نوار با پهنای ثابت به‌طور وسیعی برای مسئله کاربردی تحت مطالعه مورد علاقه باشد. برای مثال زمانی که پهنای ثابت بیشتر از شکل هذلولوی در [۲۳] نشان داده شده است.

توجه کنید که، روی مجموعه

$$\{x_1 : (x_{(1)} - x_1)^T S^{-1} (x_{(1)} - x_1) = b^2\}$$

برای یک b داده شده که در رابطه $0 \leq b \leq a$ صدق کند، پهنای نوار هذلولوی ثابت است. این پهنای ثابت با b افزایش پیدا می‌کند (صعود می‌کند) در یک مقدار ویژه از b بین ۰ و a برابر با پهنای نوار با پهنای ثابت است. چنانچه این چنین باشد، نوار هذلولوی باریکتر از نوار پهنای ثابت است هرگاه $x_{(1)}$ نزدیک به $\bar{x}_{(1)}$ است و بر عکس هرگاه $x_{(1)}$ نزدیک مرز χ_e است (پهنای نوار هذلولوی زیادتر می‌شود). مقایسه نوارهای هذلولوی و پهنای ثابت تحت معیار پهنای متوسط در [۲۷] به نتایج منجر می‌شود که به دو طریق اساسی از مشاهدات، تحت معیار $MVCS$ فوق‌الذکر متفاوت هستند. اولاً، متوسط پهنای نوار

مراجع

- [1] Sun, J., Raz, J. and Faraway, J. J. (1999). Simultaneous confidence bands for growth and response curves. *Statistica Sinica*, **9**(3), 679-698.
- [2] Spurrier, J.D. (1999). Exact confidence bounds for all contrasts of three or more regression lines. *Journal of the American Statistical Association*, **94**, 483-88.
- [3] Al-Saidy, O. M., Piegorsch, W. W., West, R. W. and Nitcheva, D. K. (2003). Confidence bands for low-dose risk estimation with quantal response data. *Biometrics*, **59**, 1056-1062.
- [4] Liu, W., Jamshidian, M., Zhang, Y. (2004). Multiple comparison of several regression models. *Journal of the American Statistical Association*, **99**, 395-403.
- [5] Piegorsch, W. W., West R.W., Pan, W. and Kodell, R. (2005). Low dose risk estimation via simultaneous statistical inferences. *Journal of Royal Statistical Society Publications*, 245-258.
- [6] Working, H. and Hotelling, H. (1929). Applications of the theory of error to the interpretation of trends. *Journal of the American Statistical Association*, **24**, 73-85.
- [7] Scheff e, H. (1953). A method for judging all contrasts in analysis of variance. *Biometrika*, **40**, 87-104
- [8] Bowden, D. C. and Graybill, F. A. (1966). Confidence bands of uniform and proportional width for linear models. *Journal of the American Statistical Association*, **61**, 182-198.
- [9] Graybill, F. A. and Bowden, D. C. (1967). Linear Segment Confidence Bands for Simple Linear Regression Models. *Journal of the American Statistical Association*, **62**, 403-408.
- [10] Wynn, H.P . and Bloomfield, P. (1971). Simultaneous confidence bands in regression analysis. *Journal of Royal Statistical Society Publications*, **33**, 202-217
- [11] Bohrer, R. and Francis, G. K. (1972). Sharp one-sided confidence bands for linear regression over intervals. *Biometrika*, **59**, 99-107.
- [12] Uusipaikka, E. (1983). Exact confidence bands for linear-regression over intervals. *Journal of the American Statistical Association*, **78**, 638-644.
- [13] Gafarian, A. V. (1964). Confidence bands in straight line regression. *Journal of the American Statistical Association*, **59**, 182-213.
- [14] Liu, W., Lin, S. and Piegorsch, W. W. (2008). Construction of exact simultaneous confidence bands for a simple linear regression model. *International Statistical Review*, **76**, 39-57.

- [15] Knafl, G., Sacks, J. and Ylvisaker, D. (1985). Confidence bands for regression-functions. *Journal of the American Statistical Association*, **80**, 683-691.
- [16] Naiman, D. Q. (1987). Simultaneous confidence-bounds in multiple-regression using predictor variable constraints. *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 214-219.
- [17] Naiman, D. Q. (1990). On volumes of tubular neighborhoods of spherical polyhedra and statistical inference. *Annals of Statistics*, **18**, 685-716.
- [18] Sun, J. and Loader, C. R. (1994). Simultaneous confidence bands for linear regression and smoothing. *Annals of Statistics*, **22**, 1328-1346.
- [19] Liu, W., Jamshidian, M., Zhang, Y. and Donnelly, J. (2005a). Simulation-based simultaneous confidence bands for a multiple linear regression model when the covariates are constrained. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, **14**(2), 459-484.
- [20] Liu, W., Jamshidian, M., Zhang, Y. and Bretz, F. (2005b). Constant width simultaneous confidence bands in multiple linear regression with predictor variables constrained in intervals. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **75**(6), 425-436.
- [21] Halperin, M. and Gurian, J. (1968). Confidence bands in linear regression with constraints on independent variables. *Journal of the American Statistical Association*, **63**, 1020-1027.
- [22] Bohrer, R. (1973). A multivariate t probability integral. *Biometrika*, **60**, 647-654.
- [23] Casella, G. and Strawderman, W. E. (1980). Confidence bands for linear-regression with restricted predictor variables. *Journal of the American Statistical Association*, **75**, 862-868.
- [24] Seppanen, E. and Uusipaikka, E. (1992). Confidence bands for linear-regression over restricted regions. *Scandinavian Journal of Statistics*, **19**, 73-81.
- [25] Liu, W. and Lin, S. (2007). *Construction of Exact Simultaneous Confidence Bands in Multiple Linear Regression with Predictor Variables Constrained in an Ellipsoidal Region*. *Statistica Sinica*, to appear.
- [26] Liu, W. and Hayter, A. J. (2007). Minimum area confidence set optimality for confidence bands in simple linear regression. *Journal of the American Statistical Association*, **102**(477), 181-190.
- [27] Naiman, D. Q. (1983). Comparing Scheffé-type to constant-width confidence bands in regression. *Journal of the American Statistical Association*, **78**, 906-912.
- [28] Naiman, D. Q. (1984). Average width optimality of simultaneous confidence bounds. *Annals of Statistics*, **12**, 1199-1214. [29] Piegorsch, W.W. (1985a), Average-width optimality for confidence bands in simple linear re