

## توزیع بتا گومپرتز هندسی: ویژگی‌های ریاضی و کاربردهای آن

علی شادرخ،<sup>۱</sup> شهرام یعقوبزاده شهرستانی<sup>۲</sup>

تاریخ دریافت: ۱۳۹۶/۲/۹

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۶/۲۲

چکیده:

در این مقاله، توزیع پنج پارامتری به نام توزیع بتا گومپرتز هندسی، که دارای تابع خطر افزایشی، کاهشی-افزایشی-کاهشی، تک مدی و گودالی شکل است، معرفی و تابع چگالی احتمال، تابع توزیع تجمعی و تابع خطر آن ارائه می‌شود. همچنین به کمک چندجمله‌ای‌های استرلینگ، گشتاورها، گشتاورهای آماره‌های مرتب و منحنی‌های بن فرنی و لورنتس این توزیع جدید به دست می‌آید. پارامترهای آن به روش ماکسیمم درست‌نمایی برآورد شده و در نهایت نیز با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی، کاربردی از آن نشان داده می‌شود.

**واژه‌های کلیدی:** توزیع گومپرتز، چندجمله‌ای‌های استرلینگ، توزیع بتا، تابع خطر، برآورد ماکسیمم درست‌نمایی.

### ۱ مقدمه

(بیدرام و دیگران [۱])، کردیرو و دیگران [۲])، یعقوبزاده و دیگران [۳]) و بتا پارتو (آکینست و دیگران [۴]) اشاره نمود.

توزیع گومپرتز نقش بسیار مهمی در مدل‌سازی داده‌های مرگ و میر و در علوم مختلفی مانند زیست‌شناسی (اکونوموس [۵])، تحلیل بقا (جانسون و دیگران [۶]) و بازاریابی (بماتور و گلادی [۷]) دارد. از طرفی چون تابع خطر این توزیع ثابت و افزایشی است، نمی‌تواند برای توصیف حالاتی که داده‌ها از توزیع‌های با تابع خطر غیر از حالت‌های ثابت و افزایشی تبعیت می‌کنند، استفاده شود. به این دلیل توزیع جدیدی بر پایه توزیع گومپرتز برای طول عمر معرفی می‌شود که تابع خطر آن علاوه بر ثابت و افزایشی، دارای حالت‌های تک مدی، گودالی شکل و کاهشی-افزایشی-کاهشی نیز است. در بخش دوم این مقاله، توزیع بتا گومپرتز هندسی معرفی شده و چند ویژگی آن به دست آمده است. در بخش سوم به روش ماکسیمم درست‌نمایی، پارامترهای این توزیع جدید برآورد شده و به کمک یک مجموعه داده‌های واقعی، کاربردی از آن

ایوگن و دیگران [۸])، یک خانواده توزیع به ترتیب با تابع توزیع و تابع چگالی احتمال

$$W(x, \Theta_1) = \frac{1}{B(a, b)} \int_0^{G(x, \xi)} u^{a-1} (1-u)^{b-1} du \quad (1)$$

$$w(x, \Theta_1) = \frac{g(x, \xi) [G(x, \xi)]^{a-1} [1 - G(x, \xi)]^{b-1}}{B(a, b)} \quad (2)$$

معرفی کردند. که در آن  $\Theta_1 = (a, b, \xi)$ ،  $B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du$  و  $g(x, \xi)$  تابع چگالی احتمال متناظر با تابع توزیع پیوسته  $G(x, \xi)$  هستند. اخیراً، مقالاتی به کمک خانواده توزیع‌هایی با تابع چگالی داده شده به معرفی تعمیم‌هایی از توزیع‌ها در رابطه (۲؟) توزیع‌های جدیدی ارائه شده‌اند که می‌توان به توزیع‌های بتا گامبل (نداراجا و کوتز [۹])، بتا نمایی (نداراجا و کوتز [۱۰])، بتا وایبول (لی و دیگران [۱۱])، بتا وایبول تعدیل یافته (سیلوا و دیگران [۱۲])، بتا نمایی تعمیم یافته (بارتو-سوزا و دیگران [۱۳])، بتا وایبول هندسی

<sup>۱</sup> عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه پیام نور، تهران، ایران

بیان می‌شود.

با تابع چگالی احتمال

$$w(x, \alpha, \beta, \theta, a, b) = \frac{\alpha(1-\theta)^b e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{\left[1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}\right]^{a+b}} \times \frac{\left[1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}\right]^{a-1}}{B(a, b)}, \quad (V)$$

به دست می‌آید که در این مقاله با نماد  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  نشان داده می‌شود. تابع خطر متناظر با این توزیع عبارت است از

$$h(x, \alpha, \beta, \theta, a, b) = \frac{\alpha(1-\theta)^b e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{B(a, b) \left[1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}\right]^{a+b}} \times \frac{(1 - e^{\beta x})^{a-1}}{I\left(\frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}\right)(a, b)}.$$

نمودارهای تابع چگالی احتمال و تابع خطر توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  به ترتیب در شکل‌های ۱ و ۲ نشان داده شده است. شکل ۱، بیان‌کننده تک‌مدی و افزایشی-کاهشی بودن توزیع است. همچنین با توجه به شکل ۲، واضح است که تابع خطر این توزیع می‌تواند شکل‌های مختلف افزایشی، کاهشی-افزایشی-کاهشی، تک‌مدی و وان‌حمای شکل باشد. در ادامه به بعضی از زیر مدل‌های توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  اشاره می‌شود.

۱) اگر در رابطه (۴)،  $a = b = 1$  باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال توزیع گومپرتز هندسی تولید شده و علاوه بر آن در صورت  $\theta = 0$ ، تابع چگالی توزیع گومپرتز (گومپرتز، [۴]) به دست می‌آید.

۲) اگر در رابطه (۴)،  $\theta = 0$  باشد، تابع چگالی توزیع بتا گومپرتز (جعفری و دیگران [۴]) تولید می‌شود. علاوه بر آن در صورت  $b = 1$ ، رابطه (۴) به توزیع گومپرتز تعمیم یافته (ال-گوهری و دیگران [۴]) تبدیل می‌شود.

۳) اگر در رابطه (۴)،  $\theta = 0$ ،  $b = 1$  و  $\beta \rightarrow +\infty$  باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال توزیع نمایی تعمیم یافته (گوپتا و کوندا [۴]) تولید می‌شود.

۴) اگر در رابطه (۴)،  $\theta = 0$  و  $\beta \rightarrow +\infty$  باشد، آنگاه تابع چگالی احتمال توزیع بتا نمایی (نداراجا و کوتز [۴]) حاصل می‌شود.

## ۲ توزیع بتا گومپرتز هندسی

فرض کنید  $X$  یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع توزیع پیوسته  $F(x, \Theta_2)$  و تابع چگالی احتمال  $f(x, \Theta_2)$  برداری از پارامترها است) و  $Z$  یک متغیر تصادفی گسسته با مقادیر  $\{1, 2, 3, \dots\}$  و با تابع جرم احتمال  $p(z, \theta)$  باشند. اگر متغیر تصادفی  $Y$  به صورت

$$Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_Z)$$

تعریف شود، آنگاه تابع توزیع  $Y$  یعنی  $H(y, \Theta_3)$  و تابع چگالی احتمال آن یعنی  $h(y, \Theta_3)$  به ترتیب به صورت

$$H(y, \Theta_3) = 1 - \sum_{z=1}^{\infty} (1 - F(x, \Theta_2))^z p(z, \theta), \quad (3)$$

$$h(y, \Theta_3) = \sum_{z=1}^{\infty} z f(x, \Theta_2) (1 - F(x, \Theta_2))^{z-1} p(z, \theta). \quad (4)$$

به دست می‌آیند ( $\Theta_3 = (\Theta_2, \theta)$ ). توزیع با تابع توزیع (۴) و با تابع چگالی احتمال (۴) را یک توزیع سری توانی می‌نامند. اکنون توزیع گومپرتز به ترتیب با تابع توزیع و تابع چگالی احتمال به ترتیب با

$$F(x, \Theta_2) = 1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}, x > 0, \Theta_2 = (\alpha, \beta) > 0, \\ f(x, \Theta_2) = \alpha e^{\beta x} e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}, x > 0, \Theta_2 = (\alpha, \beta) > 0.$$

و توزیع هندسی با تابع جرم احتمال

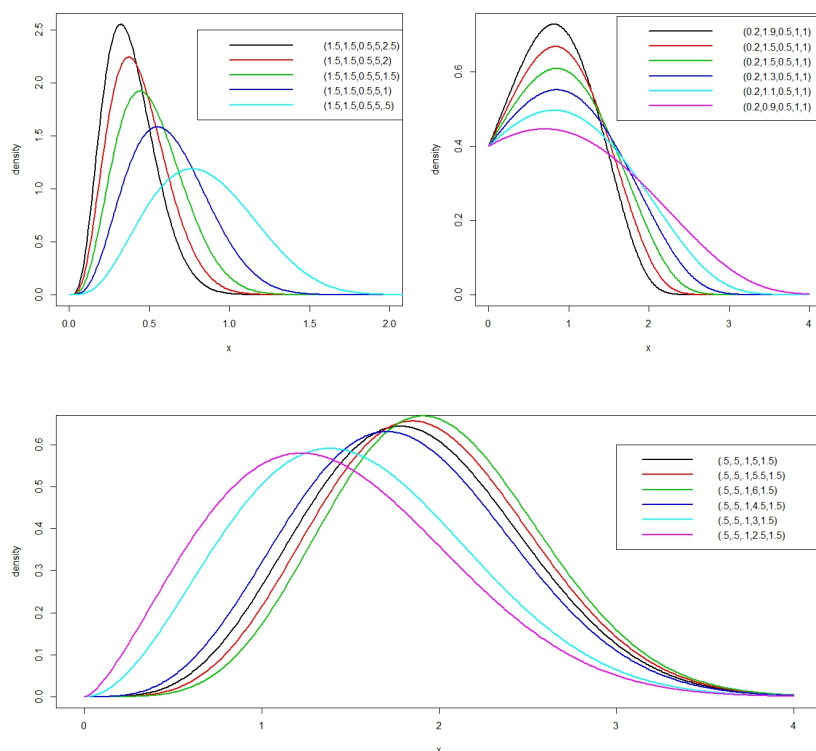
$$p(z, \theta) = (1 - \theta)\theta^{z-1}, \quad z = 1, 2, 3, \dots, 0 < \theta < 1.$$

در نظر بگیرید. با جایگذاری آنها در روابط (۴) و (۴)، تابع توزیع و تابع چگالی احتمال توزیعی به نام گومپرتز هندسی به صورت‌های

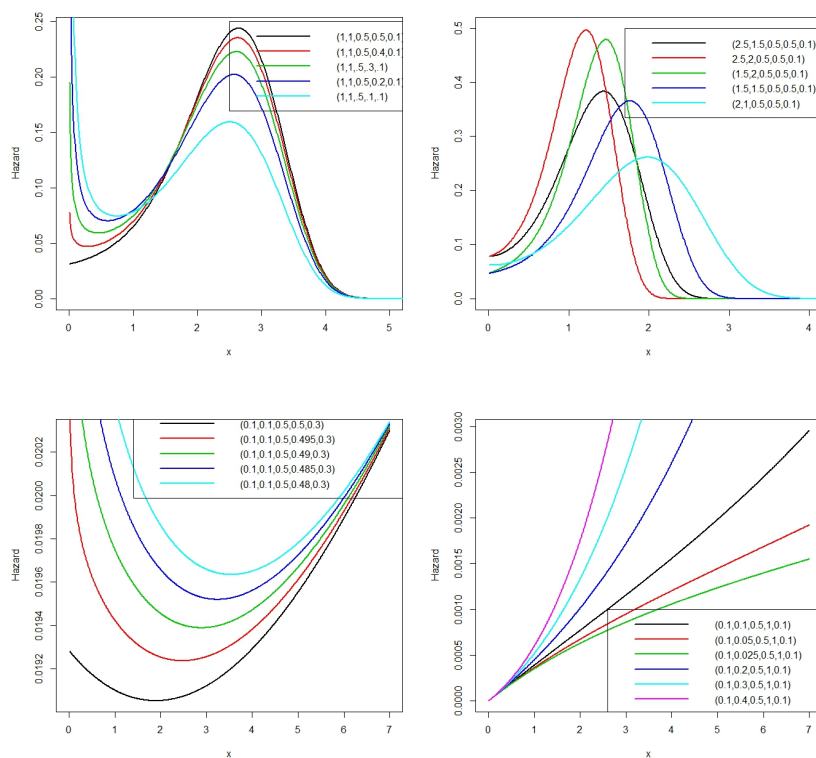
$$H(x, \Theta_3) = \frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}, x > 0, \quad (5)$$

$$h(x, \Theta_3) = \frac{\alpha(1-\theta)e^{\beta x}e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}}{\left(1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x}-1)}\right)^2} \quad (6)$$

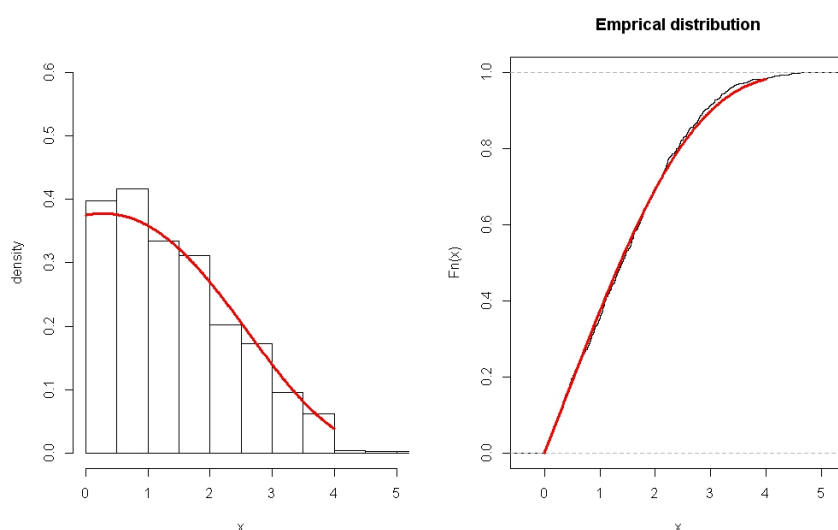
به دست می‌آیند. که در آن  $\Theta_3 = (\alpha, \beta, \theta)$  با جایگذاری روابط (۴) و (۴) در رابطه (۴)، توزیع بتا گومپرتز هندسی



شکل ۱. نمودار تابع چگالی احتمال توزیع بتا گومپرتز-هندسی



شکل ۲. نمودار تابع خطر توزیع بتا گومپرتز هندسی



شکل ۳. نمودار تابع چگالی احتمال (سمت چپ) و نمودار تابع توزیع تجربی (سمت راست) توزیع بتا گومپرتز هندسی بر اساس نمونه تصادفی ۱۰۰۰ تایی شبیه‌سازی شده از آن

## ۱.۲ شبیه‌سازی و چندک‌ها

قضیه ۱.۲. برای هر  $\delta \in R$  و  $|z| < 1$  داریم

$$[-\log(1-z)]^\delta = \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(\delta) z^{\delta+m}$$

که در آن

$$\rho_0(\delta) = 1, \quad \rho_m(\delta) = \delta \psi_{m-1}(m+\delta-1), m \geq 1$$

و  $\psi_n(\cdot)$  ها نیز چندجمله‌ای‌های استرلینگ هستند که در رابطه

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}(w) = & \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!} \left[ H_n^{n-1} - \frac{w+2}{n+2} H_n^{n-2} \right. \\ & + \frac{(w+2)(w+3)}{(n+2)(n+3)} H_n^{n-3} - \dots \\ & \left. + (-1)^{n-1} \frac{(w+2)(w+3)\dots(w+n)}{(n+2)(n+3)\dots(2n)} H_n \right], \end{aligned}$$

صدق می‌کنند. به‌طوری که  $H_n^m$  ها اعداد صحیح مثبت هستند و در رابطه

$$H_{n+1}^m = (2n+m-1)H_n^m + (n-m+1)H_n^{m-1}$$

صدق کرده و  $H_n^0 = H_{n+1}^0 = 1$

$$H_{n+1}^1 = 1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1).$$

□

اثبات. به وارد [۹] رجوع شود.

اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  باشد، آنگاه

(۱) متغیر تصادفی  $Y = \frac{1-e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta X}-1)}}{1-\theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta X}-1)}}$  توزیع بتا با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  و  $T = \frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta X}-1)$  توزیع بتا وایبول هندسی با پارامترهای  $a, b, \alpha = \beta = 1, p = \theta$  دارند.

(۲) اگر  $V$  دارای توزیع بتا با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  باشد، آنگاه

$$X = \frac{1}{\beta} \log \left[ 1 - \frac{\beta}{\alpha} \log \left( \frac{1-V}{1-\theta V} \right) \right],$$

توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  دارد که از آن می‌توان در شبیه‌سازی توزیع بتا گومپرتز هندسی استفاده کرد. به‌این صورت که از توزیع بتا گومپرتز هندسی با پارامترهای  $\alpha = 0.3, \beta = 0.5, \theta = 0.2, a = 1$  و  $b = 1$  یک نمونه تصادفی ۱۰۰۰ تایی تولید می‌شود. نمودار تابع چگالی احتمال آن که در سمت چپ و تابع توزیع تجربی آن در سمت راست شکل ۳ نشان داده شده است، بیان‌کننده سازگار بودن داده‌های شبیه‌سازی شده با توزیع بتا گومپرتز هندسی است.

اکنون به قضیه‌ای اشاره می‌شود که در این مقاله از آن استفاده شده است.

### ۳.۲ گشتاورهای آماره‌های مرتب

به‌خاطر پیش‌بینی زمان شکست آینده بر اساس زمان‌های شکست اولیه، گشتاورهای آماره‌های مرتب نقش مهمی در آزمون‌های کنترل کیفیت و قابلیت اعتماد دارند. در این بخش، فرمولی کلی برای تابع چگالی احتمال گشتاور مرتبه  $r$ -ام  $(X_{r:n})$  توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  ارائه می‌شود. اگر تابع چگالی احتمال آماره ترتیبی  $X_{r:n}$  باشد، آنگاه داریم

$$f_{r:n}(x, \Theta_r) = \frac{w(x, \Theta_r)(W(x, \Theta_r)^{r-1}(1 - W(x, \Theta_r))^{n-r})}{B(a, b)B(r, n - r + 1)} \\ = \sum_{j=0}^{n-r} \sum_{m=0}^{\infty} \left[ (-1)^j \binom{n-r}{j} \right. \\ \left. c_{r+j-1, m}(W(x, \Theta_r))^m, \right. \quad (11)$$

که در آن  $\Theta_r = (\alpha, \beta, \theta, a, b)$  است و  $c_{r+j-1, m}$  و همچنین برای  $(j = 1, 2, \dots)$  در رابطه (۹) صدق می‌کنند. همچنین  $w(x, \Theta_r)$  و  $W(x, \Theta_r)$  به ترتیب تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  هستند. بنا بر این داریم

$$f_{r:n}(x, \alpha, \beta, \theta, a, b) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{r,n,m} f_{BGG}(x, \alpha, \beta, \theta, a + m, b), \quad (12)$$

که در آن  $k_{r,n,m} = \sum_{j=0}^{n-r} \frac{(-1)^j n! (a)_{m+j-1} c_{r+j-1, m}}{j! (a+b)_m (n-r-j)!}$ . رابطه (۹) نشان می‌دهد که تابع چگالی آماره ترتیبی  $r$ -ام توزیع بتا گومپرتر هندسی، یک ترکیب خطی از تابع چگالی احتمال آن است. بنا بر این به کمک این رابطه، می‌توان گشتاور مرتبه  $r$ -ام توزیع  $BGG$  را به دست آورد که به صورت

$$E(X_{r:n}^r) = \frac{(-1)^k}{\beta^k B(a, b)} \sum_{m, s, n, i=0}^{\infty} \left[ k_{r,n,m} \binom{-(k+s+n)}{i} \right. \\ \times \rho_s(k) \rho_n(k+s) (1-\theta)^{k+s+n} (-\theta)^i \\ \times B(k+s+n+i+a+m, b) \left. \right]. \quad (13)$$

است.

### ۴.۲ میانگین انحرافات

اگر  $X$  یک متغیر تصادفی با توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  و با امید ریاضی  $\mu$  و با میانه  $M$  باشد، آنگاه میانگین انحراف از

همچنین در این مقاله از رابطه

$$\left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \right)^n = \sum_{i=0}^{\infty} c_{n,i} x^i, \quad (8)$$

استفاده می‌شود. که در آن ضرایب  $c_{j,i}$  ها در روابط

$$c_{j,0} = a_j, \\ c_{j,i} = (ia)^{-1} \sum_{m=1}^i (jm - i + 1) a_m c_{j,i-m}, \quad i \geq 1. \quad (9)$$

صدق می‌کنند. برای مشاهده اطلاعات بیشتر در باره رابطه (۹) به (گرادشتین و ریزهیک [۹]) مراجعه شود.

### ۲.۲ گشتاورها

بسیاری از ویژگی‌های یک توزیع مانند پراکندگی، چولگی و کشیدگی را می‌توان به کمک گشتاورها به دست آورد. لذا در این جا گشتاور مرکزی مرتبه  $k$ -ام توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  به دست می‌آید. با استفاده از تغییر متغیر  $u = \frac{1 - \exp[\frac{\alpha}{\beta}(\exp(\beta x) - 1)]}{1 - \theta \exp[\frac{\alpha}{\beta}(\exp(\beta x) - 1)]}$  و قضیه ۱.۲ و تحت شرط  $u < \frac{1-e}{1-\theta e}$  داریم

$$E(X^k) = \frac{1}{\beta^k B(a, b)} \int_0^1 \left\{ \log \left( 1 - \frac{\beta}{\alpha} \log \frac{1-u}{1-\theta u} \right) \right\}^k \\ \times u^{a-1} (1-u)^{b-1} du = \frac{(-1)^k}{\beta^k B(a, b)} \\ \times \sum_{m=0}^{\infty} \rho_m(k) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{m+k} \int_0^1 \left\{ \log \left( \frac{1-u}{1-\theta u} \right) \right\}^{m+k} \\ \times u^{a-1} (1-u)^{b-1} du \\ = \frac{1}{\beta^k B(a, b)} \sum_{m, n=0}^{\infty} \left[ (-1)^m \rho_m(k) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{m+k} \rho_n(k+m) \right. \\ \times (1-\theta)^{k+m+n} \int_0^1 (1-\theta u)^{-(m+n+k)} \\ \times u^{m+k+n+a-1} (1-u)^{b-1} du \left. \right] \\ = \frac{1}{\beta^k B(a, b)} \sum_{m, n, i=0}^{\infty} \left[ (-1)^m \rho_m(k) \left( \frac{\beta}{\alpha} \right)^{m+k} \rho_n(k+m) \right. \\ \times (1-\theta)^{k+m+n} (-\theta)^i B(m+n+k+a+i, b) \left. \right]. \quad (10)$$

## ۵.۲ منحنی‌های بن فرنی و لورنتس

برای یک متغیر تصادفی مانند  $X$  با تابع توزیع تجمعی  $F(\cdot)$  و تابع چگالی  $f(\cdot)$ ، منحنی بن فرونی به صورت

$$B_F(x) = \frac{1}{\mu F(x)} \int_{\cdot}^x u f(u) du$$

تعریف می‌شود. بنا بر این برای توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  داریم

$$\begin{aligned} B_F[F(x)] &= \frac{1}{\mu F(x) \beta B(a, b)} \\ &\times \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\cdot}^{G(x; \alpha, \beta, \theta)} \frac{\beta^i}{i \alpha^i} \left( \log \left( \frac{1-w}{1-\theta w} \right) \right)^i \\ &\times w^{a-1} (1-w)^{b-1} dw \\ &= \frac{1}{\mu F(x) \beta B(a, b)} \\ &\times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{(-1)^{i+1} \beta^i (1-\theta)^i}{i \alpha^i} \rho_m(i) \right. \\ &\times \int_{\cdot}^{G(x; \alpha, \beta, \theta)} (1-\theta w)^{-(m+i)} \\ &\times w^{a+i-1} (1-w)^{b-1} dw \left. \right] \\ &= \frac{1}{\mu F(x) \beta B(a, b)} \\ &\times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m+i}{j} \right) \frac{(-1)^{i+j+1} \beta^i (1-\theta)^i}{i \alpha^i} \right. \\ &\times \theta^j \rho_m(i) B_{G(x; \alpha, \beta, \theta)}(a+i+j, b) \left. \right]. \end{aligned}$$

و منحنی لورنتس آن به صورت

$$\begin{aligned} L_F[F(x)] &= (B_F[F(x)])F(x) = \frac{1}{\mu \beta B(a, b)} \\ &\times \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \left( \frac{m+i}{j} \right) \frac{(-1)^{i+j+1} \beta^i (1-\theta)^i}{i \alpha^i} \right. \\ &\times \theta^j \rho_m(i) \times B_{G(x)}(a+i+j, b) \left. \right]. \end{aligned}$$

است.

## ۶.۲ برآورد

اگر  $X_1, X_2, \dots, X_n$  نمونه‌ای تصادفی از توزیع  $BGG(\alpha, \beta, \theta, a, b)$  باشد، با فرض

$$\Theta = (\alpha, \beta, \theta, a, b)^T$$

میانگین و میانگین انحراف از میانه به ترتیب به صورت

$$\delta_1 = E|X - \mu| = 2 \int_{\cdot}^{\mu} F(x) dx$$

$$\delta_2 = E|X - M| = \mu - M + 2 \int_{\cdot}^M F(x) dx$$

تعریف می‌شوند. به کمک سری توانی

$$(1-z)^{\alpha} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} (-z)^j,$$

داریم

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^a F(x) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \binom{b-1}{k} (-1)^k \frac{1}{a+k} \right. \\ &\times \int_{\cdot}^a \left( \frac{1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)}}{1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x} - 1)}} \right)^{a+k} dx \left. \right\} \\ &= \sum_{k, i, j=0}^{\infty} \left[ \binom{b-1}{k} \binom{a+k}{i} \binom{-(a+k)}{j} \right. \\ &\times \frac{(-1)^k (-\theta)^j}{a+k} e^{-(i+j) \frac{\alpha}{\beta}} \int_{\cdot}^a e^{-(i+j) \frac{\alpha}{\beta}} e^{\beta x} dx \left. \right]. \end{aligned}$$

با استفاده از بسط مک لورن

$$e^{-(i+j) \frac{\alpha}{\beta}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (i+j)^n}{n!} \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\beta^m}{m!} x^m \right)^n$$

داریم

$$\begin{aligned} \int_{\cdot}^a F(x) dx &= \sum_{k, i, j=0}^{\infty} \sum_{n, m=0}^{\infty} \left[ \binom{b-1}{k} \binom{a+k}{i} \binom{-(a+k)}{j} \right. \\ &\times \frac{(-1)^{k+n} (-\theta)^j}{n! (m+1)} (i+j)^n c_{n, m} a^{m+1} \left. \right], \end{aligned}$$

که به‌ازای  $m = 1, 2, \dots$   $c_{n, m}$  ها در رابطه (؟؟) صدق می‌کنند. بنا بر این داریم

$$\begin{aligned} \delta_1 &= 2 \sum_{k, i, j=0}^{\infty} \sum_{n, m=0}^{\infty} \left[ \binom{b-1}{k} \binom{a+k}{i} \binom{-(a+k)}{j} \right. \\ &\times \frac{(-1)^{k+n} (-\theta)^j}{n! (m+1) m!} (i+j)^n (n\beta)^m \mu^{m+1} \left. \right], \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \mu - M + 2 \sum_{k, i, j=0}^{\infty} \sum_{n, m=0}^{\infty} \left[ \binom{b-1}{k} \binom{a+k}{i} \right. \\ &\times \binom{-(a+k)}{j} \frac{(-1)^{k+n} (-\theta)^j (i+j)^n n (n\beta)^m M^{m+1}}{n! (m+1) m!} \left. \right]. \end{aligned}$$

دستگاه معادلات غیر خطی  $U_n(\Theta) = 0$  به دست می آید. البته برآوردها دارای جواب بسته نیستند و باید به روش عددی به دست آید.

### ۳ تحلیل داده‌های واقعی

در این بخش با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی، توزیع بتا گومپرتز هندسی با توزیع‌های بتا گومپرتز (BG)، گومپرتز تعمیم یافته (GG)، نمایی تعمیم یافته (GE)، بتا نمایی (BE) و توزیع وایبول-لگ-لوژستیک تعمیم یافته (GWLL) (کردیرو و دیگران، [۹]) با تابع چگالی احتمال

$$f(x; \alpha, \beta, a, b) = \frac{a\alpha\beta bx^{b-1}}{a^b} \left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^b\right)^{-1} \left[\log\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^b\right)\right]^{\beta-1} \times \exp\left\{-\alpha \left[\log\left(1 + \left(\frac{x}{a}\right)^b\right)\right]^\beta\right\}.$$

مقایسه می‌شود. این مجموعه داده‌ها شامل ۶۳ مقدار اندازه‌گیری شده از مقاومت الیاف شیشه‌های ۱/۵ سانتی‌متری، توسط یک موسسه فیزیک در شهر لندن است. بارتو-سوزا و دیگران [۹] از این داده‌ها برای برازش توزیع بتا نمایی تعمیم یافته (BGE) استفاده کردند. جدول ۱، شامل برآورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌های مورد مقایسه و مقادیر معیار اطلاع آکائیکه (AIC)، معیار اطلاع آکائیکه سازگار (CAIC) و معیار اطلاع بیزی (BIC) و آماره آزمون نسبت درست‌نمایی تعمیم یافته است. کوچک‌تر بودن این مقادیر برای توزیع به معنی برازش بهتر آن به داده‌ها است. بنا بر این با توجه به جدول ۱، نتیجه می‌گیریم، توزیع بتا گومپرتز هندسی، برازش بهتری به داده‌ها دارد. همچنین نمودار برآورد تابع چگالی احتمال توزیع‌های مورد مقایسه در شکل ۴ نشان می‌دهد که توزیع بتا گومپرتز هندسی نسبت به سایر توزیع‌ها برازش بهتری به داده‌ها انتخابی دارد.

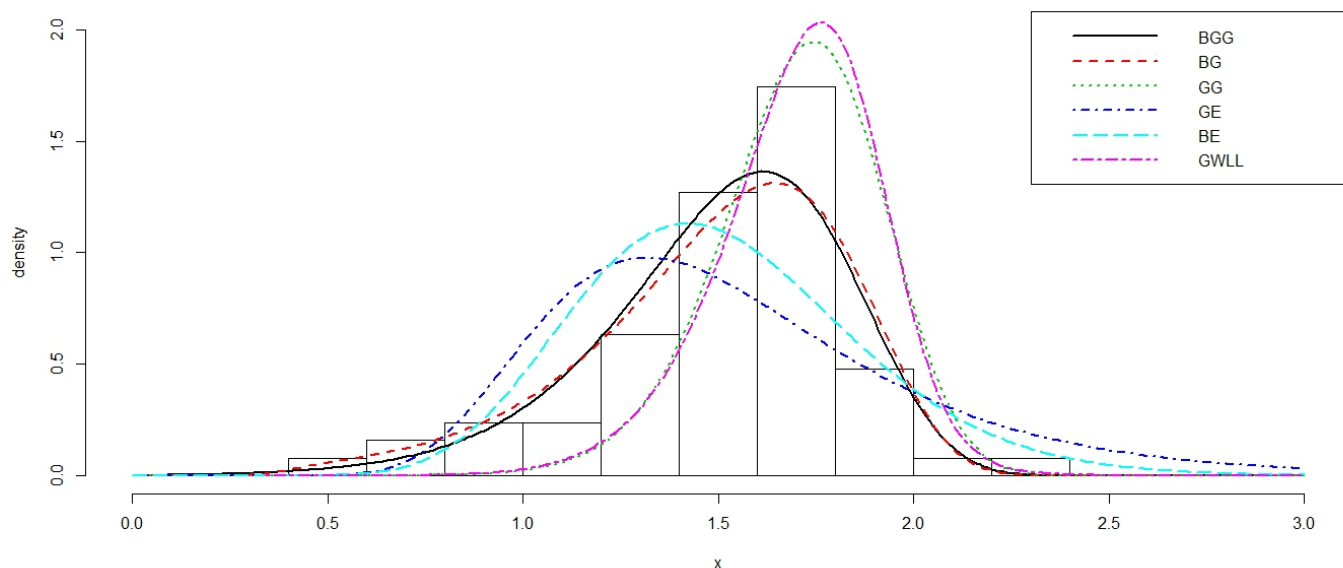
لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با

$$l_n = n \ln \alpha + nb \ln(1 - \theta) + \beta \sum_{i=1}^n x_i - \frac{b\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) + (a - 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}) + n \ln \Gamma(a + b) - n \Gamma(a) - n \ln \Gamma(b) - (a + b) \sum_{i=1}^n \ln(1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}).$$

اکنون فرض می‌کنیم  $U_n(\Theta) = (\frac{\partial l_n}{\partial \alpha}, \frac{\partial l_n}{\partial \beta}, \frac{\partial l_n}{\partial \theta}, \frac{\partial l_n}{\partial a}, \frac{\partial l_n}{\partial b})^T$  که در آن

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_n}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \frac{(a-1)}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(e^{\beta x_i} - 1)e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}}{1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}} - \frac{\theta(a+b)}{\beta} \sum_{i=1}^n \frac{(e^{\beta x_i} - 1)e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}}{1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}} - \frac{b}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1), \\ \frac{\partial l_n}{\partial \beta} &= \sum_{i=1}^n x_i + \frac{b\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) - \frac{b\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n x_i e^{\beta x_i} - \frac{\alpha(a-1)}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{(\beta(e^{\beta x_i} - 1) - \alpha x_i e^{\beta x_i})}{[1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}] e^{\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}} + \frac{\alpha\theta(a+b)}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \frac{(\beta(e^{\beta x_i} - 1) - \alpha x_i e^{\beta x_i}) e^{\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}}{[1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}] e^{\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}}, \\ \frac{\partial l_n}{\partial \theta} &= -\frac{nb}{1-\theta} + (a+b) \sum_{i=1}^n \frac{e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}}{1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}}, \\ \frac{\partial l_n}{\partial a} &= \sum_{i=1}^n \ln(1 - e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}) + n\Psi(a+b) - n\Psi(a) - \sum_{i=1}^n \ln(1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}), \\ \frac{\partial l_n}{\partial b} &= n \ln(1 - \theta) - \frac{\alpha}{\beta} \sum_{i=1}^n (e^{\beta x_i} - 1) + n\Psi(a+b) - \sum_{i=1}^n \ln(1 - \theta e^{-\frac{\alpha}{\beta}(e^{\beta x_i} - 1)}) - n\Psi(b), \end{aligned}$$

هستند. به طوری که  $\frac{\partial \log \Gamma(x)}{\partial x} = \Psi(x)$  و تابع دی گاما است. برآورد ماکسیمم درست‌نمایی  $\Theta$  یعنی  $\hat{\Theta}$  به کمک



شکل ۴. نمودار براورد تابع چگالی توزیع‌های مورد مقایسه

از این مقادیر نتیجه می‌شود که فرض‌های صفر  $GG$ ،  $GE$ ،  $BG$  در مقابل مدل  $BGG$  رد می‌شوند ولی فرض  $BE$  و  $GWLL$  در مقابل مدل  $BGG$  رد می‌شوند ولی فرض صفر  $BG$  در هر سطح بزرگ‌تر از  $0.0062$  رد و در هر سطح کوچک‌تر از  $0.0062$  پذیرفته می‌شود. اما کوچک‌تر بودن

مقادیر  $AIC$ ،  $BIC$  و  $CAIC$  توزیع  $BGG$  نشان دهنده بهتر بودن این توزیع نسبت به سایر توزیع‌های انتخابی برای برازش به داده‌ها است.

جدول ۱. براورد ماکسیمم درست‌نمایی پارامترهای توزیع‌های مورد مقایسه به همراه مقادیر  $AIC$ ،  $BIC$ ،  $CAIC$  و آماره

آزمون نسبت درست‌نمایی با  $p$ -مقدار مربوط

| توزیع            | BGG     | BG      | GG      | GE                  | BE                  | GWLL   |
|------------------|---------|---------|---------|---------------------|---------------------|--------|
| $\hat{\alpha}$   | ۴/۶۷۷۳  | ۰/۰۳۳۷۱ | ۰/۰۳۶۰۱ | ۲/۶۱۳۳              | ۰/۱۷۹۱۹             | ۴/۳۹۳  |
| $\hat{\beta}$    | ۳/۵۱۹۸  | ۲/۸۴۹۲  | ۲/۸۷۷۱  | —                   | —                   | ۰/۳۰۲  |
| $\hat{\theta}$   | ۰/۵۳۳۴۰ | —       | —       | —                   | —                   | —      |
| $\hat{a}$        | ۶۴/۶۵۲  | ۱/۶۲۵۵  | ۱/۶۰۸۵۸ | ۳۱/۳۶۱              | ۱۷/۴۹۰              | ۲/۰۷۲  |
| $\hat{b}$        | ۰/۰۰۲۳۱ | ۱/۱۳۴۰  | —       | —                   | ۵۶/۸۴۹              | ۱۹/۹۹۹ |
| AIC              | ۳۲/۲۸۶  | ۳۶/۴۱۸  | ۳۸/۴۲۲  | ۶۶/۷۱۶              | ۵۳/۹۸۴              | ۳۷/۹۸۳ |
| BIC              | ۴۳/۰۰۱  | ۴۴/۹۹۰  | ۴۴/۸۵۱  | ۷۱/۰۰۲              | ۶۰/۴۱۳              | ۴۶/۵۵۵ |
| CAIC             | ۳۳/۳۳۸  | ۴۵/۶۵۷  | ۴۵/۲۴۴  | ۶۶/۹۱۰              | ۵۴/۳۷۷              | ۳۸/۶۷۲ |
| LRT              | —       | ۶/۱۳۲   | ۱۰/۱۳۶  | ۴۰/۴۳               | ۳۲/۰۹۱              | ۷/۶۷۹  |
| $p - value(LRT)$ | —       | ۰/۰۱۳۲  | ۰/۰۰۶۲  | کوچک‌تر از $0.0001$ | کوچک‌تر از $0.0001$ | ۰/۰۰۵۵ |

## ۴ نتایج

هندسی مدلی مناسب برای برازش به این داده‌ها نسبت به سایر توزیع‌های انتخابی است. به نظر می‌رسد این توزیع جدید می‌تواند مدل مناسبی به‌عنوان توزیع طول عمر، برای نظریه قابلیت اعتماد و حوزه‌های مربوط باشد.

## قدر دانی و تشکر

نویسنده بر خود لازم می‌داند که از زحمات سردبیر و داوران مجله در ارزیابی این مقاله تشکر و قدردانی نماید.

در این مقاله، یک توزیع طول عمر به‌نام توزیع بتا گومپرتز هندسی معرفی و برخی از ویژگی‌های این توزیع به دست آورده شد. یکی از مشخصه‌های این توزیع آن است که تابع خطر آن می‌تواند افزایشی، کاهشی-افزایشی-کاهشی، وان حمامی شکل و تک‌مدی است. همچنین به‌روش ماکسیمم درست‌نمایی، پارامترهای آن برآورد و با استفاده از یک مجموعه داده‌های واقعی، این توزیع با چند توزیع طول عمر دیگر مقایسه شد و مشخص گردید که توزیع بتا گومپرتز

## مراجع

- [1] Akinsete, A., Famoye, F. and Lee, C. (2008), The Beta-Pareto distribution, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **42**, 574-563.
- [2] Barreto-Souza, W., Alessandro, H. S. S. and Cordeiro, G. M. M. (2010), The beta generalized exponential distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 159-172.
- [3] Bidram, H., Behboodian, J. and Towhidi, M. (2013), The beta Weibull-geometric distribution, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 52-67.
- [4] Bemmaor, A. C. and Glady, N. (2012), Modeling purchasing behavior with sudden death: A flexible customer lifetime model, *Management Science*, **58**(5), 1012-1021.
- [5] Cordeiro, G. M., Silva, G.O. and Ortega, E. M. M. (2011), The beta-Weibull geometric distribution, *Statistics*, **47**(4), 817-834.
- [6] Cordeiro, G. M., Ortega, E. M. M. and Ramires, T. G. (2013), A new generalized weibull family of distributions: mathematical properties and applications, *Journal of Statistical Distribution and Applications*, **2**, 1-25.
- [7] Eugene, N., Lee, C. and Famoye, F. (2002), Beta normal distribution and its applications, *Communications in Statistics – Theory Methods*, **31**, 497-512.
- [8] El-Gohary, A., Alshamrani, A. and Al-Otaibi, A. N. (2013), The generalized Gompertz distribution, *Applied Mathematical Modelling*, **37**, 13-24.
- [9] Economos, A. C. (1982), Rate of aging, rate of dying and the mechanism of mortality, *Archives of Gerontology and Geriatrics*, **1**, 46-51.

- [10] Gompertz, B. (1825), On the Nature of the Function Expressive of the Law of Human Mortality, and on a New Mode of Determining the Value of Life Contingencies, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, **115**, 513-583.
- [11] Gupta, R. D. and Kundu, D. (1999), Generalized exponential distributions, *Australian and New Zealand Journal of Statistics*, **41**, 173-188.
- [12] Gradshteyn I. S. and Ryzhik I. M. (2007), *Table of Integrals, Series, and Products*. 7 edn, Academic Press, New York.
- [13] Johnson, N. L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995), *Continuous Univariate Distributions*, Vol. 2, 2nd ed., John Wiley and Sons.
- [14] Jafari, A.A., Tahmasebi, S. and Alizadeh, M. (2014), The Beta-Gompertz Distribution, *Revista Colombiana de Estadística The Beta-Gompertz Distribution*, **37**, 130-156.
- [15] Kus, C. (2007), A new lifetime distribution, *Computational Statistics and Data Analysis*, **51**(9), 4497-4509.
- [16] Lee, C., Famoye, F. and Olumolade, O. (2007), The Beta-Weibull distribution: Some properties and applications to censored data, *Journal of Modern Applied Statistical Methods*, **6**, 173-186.
- [17] Mahmoudi, E. and Sepahdar, A. (2013), Exponentiated Weibull-Poisson distribution: Model properties and applications, *Mathematics and Computers in Simulation*, **92**, 76-97.
- [18] Mahmoudi, E. and Abolhosseini, S. (2016), Lindley-Logarithmic Distribution: Model and Properties, *Journal of Statistical Sciences*, **10**(1), 139-158.
- [19] Nassar, M. and Nada, N. (2013), A new generalization of the Pareto-geometric distribution, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **21**, 148-155.
- [20] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2004), The beta Gumbel distribution, *Mathematical Problems in Engineering*, **10**, 323-332.
- [21] Nadarajah, S. and Kotz, S. (2006b), The beta exponential distribution, *Reliability Engineering and System Safety*, **91**, 689-697.
- [22] Silva, G. O., Ortega, E. M. and Cordeiro, G. M. (2010), The beta modified Weibull distribution, *Lifetime Data Analysis*, **16**, 409-430.
- [23] Ward, M. (1934), The representation of Stirling's numbers and Stirling's polynomials as sums of factorial, *American Journal of Mathematics*, **56**, 87-95.

- [24] Yaghoobzadeh, S., Shadrokh, A. and Yarmohammadi, M. (2014), Introduced a new Lifetime distribution of Power Series distribution of the family Gompertz, *Mathematical Research Mosahab*, **1(2)**, 71-88.
- [25] Yaghoobzadeh, S., Shadrokh, A. and Yarmohammadi, M. (2015), Sterling Polynomials and a New Generalization of Weibull- Geometric Distribution, *Journal of Statistical Sciences*, **9(1)**, 119-141.