بحثی در اندازه اهمیت توأم اجزاء در سیستم‌های k از n

مرضیه باغبان سیچانی [۱]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۴/۱۹
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده:

این مقاله مطالعه‌ای در اندازهٔ اهمیت توأم، JRI، اجزای در سیستم‌های منسجم k از n با اجزای مستقل از هم است. JRI نرخ بهبود قابلیت اعتماد سیستم به‌سبب بهبود قابلیت اعتماد دو یا چند جزء است. علامت و مقدار JRI نشان‌دهندهٔ نوع و میزان تأثیر متقابل اجزای بر حسب قابلیت اعتماد سیستم است. البته در حالاتی خاص می‌توان علامت JRI را بدون محاسبه تعیین کرد. از این اندازه در تعیین اولویت اجزای برای تعمیر و نگهداری پیشگیرانهٔ سیستم‌ها و تعیین سطح افزونگی سیستم‌های k از n استفاده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: افزونگی، اندازهٔ اهمیت توأم، تعمیر، سیستم‌های k از n.

۱ مقدمه

هر سیستم، مجموعه‌ای از اجزای است که برای هدفی معین طراحی شده و لزوماً همهٔ اجزای سیستم، اهمیت یکسانی برای کارایی آن ندارند. لذا یکی از اهداف تحلیل قابلیت اعتماد شناسایی اجزایی است که بیشترین اهمیت را برای بهبود سیستم یا بیشترین بحران را برای شکست آن ایجاد می‌کنند.

بیرنبام [۳] بر مبنای ساختار و قابلیت اعتماد اجزای، اولین اندازهٔ اهمیت را بر حسب احتمال بحرانی بودن یک جزء در سیستم‌های منسجم تعریف کرد. این اندازه به اندازهٔ اهمیت بیرنبام، I_B، معروف است. هانگ و لی [۶] اندازهٔ I_B را توسعه داده، مفهوم اندازهٔ اهمیت توأم [۲] (JRI) را برای دو جزء در یک سیستم با اجزای مستقل تعریف کردند.

آرمسترانگ [۲] اندازهٔ JRI را در حالتی که بین اجزای وابستگی است، مورد مطالعه کرد. این اندازه برای سیستم‌های چندحالته توسط وو [۱۰] مورد بررسی قرار گرفت. هانگ و همکاران [۷]، اندازهٔ JRI اجزای را در سیستم‌هایی با ساختار k از n مطالعه کردند و به بررسی برخی از ویژگی‌های آن پرداختند. جان و چانگ [۸] مجدداً این ویژگی‌ها را مورد مطالعه قرار داده، به تصحیح و تکمیل برخی از این نتایج پرداختند. گائو و همکاران [۴] مفهوم JRI را برای گروهی از اجزای مستقل توسعه دادند. بر اساس JRI مرتبهٔ k، کو و ژو [۹] اندازهٔ اهمیت مرتبهٔ کلی، TOI، را تعریف کردند.

این مقاله مطالعه‌ای در زمینهٔ اندازهٔ اهمیت توأم اجزاء در سیستم‌های منسجم با اجزای مستقل از هم است. در بخش ۲ به تعاریف و مفاهیم مقدماتی می پردازیم. در بخش ۳ اندازهٔ اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء را مورد مطالعه قرار داده‌ایم که در آن علامت JRI دو جزء بر حسب نوع تأثیر متقابل اجزای بررسی‌شده است. در بخش ۴ مقدار این اندازه برای دو جزء در سیستم‌های k از n به‌طور جداگانه بررسی‌شده است. در بخش ۵ این اندازه را برای k جزء مورد مطالعه قرار داده ایم که در آن، علامت و مقدار JRI برای سه جزء در سیستم‌های k از n بررسی شده است.

۲ تعاریف و مفاهیم مقدماتی

۱.۲ سیستم و اجزای آن

فرض کنید سیستمی n جزء دارد و هر جزء در آن فعال یا غیرفعال است. برای توصیف این وضعیت، یک متغیر دومقداری X_i، $i=1,...,n$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{جزء } c_i \text{ فعال است} \\ 0, & \text{جزء } c_i \text{ غیرفعال است} \end{cases}$$

همچنین فرض می‌کنیم که سیستم نیز در یکی از دو وضعیت فعال یا غیرفعال است. برای تعیین وضعیت سیستم برحسب

[۱] دانش‌آموختهٔ کارشناس ارشد آمار دانشگاه اصفهان

[۲] Joint Reliability Importance

وضعیت اجزای، فرض می‌شود که پیوند سیستم با اجزای آن، با تابع دومقداری $\varphi(\mathbf{X})$، که به تابع ساختار سیستم معروف است، مشخص می‌شود که در آن $\mathbf{X} = (X_۱, ..., X_n)$.

بردار $\mathbf{X}$ را بردار وضعیت سیستم می‌گوییم. بنا براین، با در نظر گرفتن وضعیت بردار $\mathbf{X}$ داریم

$$\varphi(\mathbf{X}) = \begin{cases} ۱, & \text{سیستم فعال است} \\ ۰, & \text{سیستم غیرفعال است} \end{cases}$$

شکل تابعی $\varphi(\mathbf{X})$، پس از آن‌که نوع ارتباط بین اجزای در سیستم معلوم شود، قابل تعیین خواهد بود.

تعریف ۱.۲. یک سیستم را زمانی منسجم می‌نامند که تابع ساختار آن یکنوا بوده، جزء نامربوط در آن وجود نداشته باشد.

۲.۲ سیستم‌های k از n

یک سیستم شامل n جزء را k از n می‌نامند هرگاه فعال بودن آن، مستلزم فعال بودن حداقل k جزء از n جزء آن باشد. نمایش جبری تابع ساختار سیستم‌های k از n به‌صورت زیر است:

$$\varphi(\mathbf{x}) = \begin{cases} ۱ & \sum_{i=۱}^{n} x_i \geq k \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

ذکر این نکته ضروری است که سیستم متوالی، یک سیستم n از n، سیستم موازی، یک سیستم ۱ از n است.

۳.۲ بردارهای مسیر و بردارهای قطع‌کننده

تعریف ۲.۲. یک مسیر مینیمال، بردار وضعیتی است که به‌ازای آن سیستم فعال است و اگر حداقل یکی از اجزای فعال آن بردار، غیرفعال شود، سیستم نیز غیرفعال خواهد شد.

تعریف ۳.۲. بردار قطع‌کنندهٔ مینیمال، برداری است که به‌ازای آن سیستم از کار می‌افتد و چنانچه حداقل یکی از اجزای آن بردار فعال شود، سیستم ممکن است شروع به کار کند.

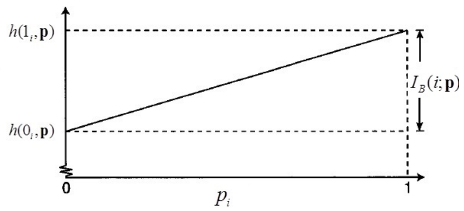
۴.۲ اندازهٔ اهمیت بیرنبام

یک سیستم منسجم با تابع ساختار φ با n جزء مستقل $c_۱$،...،c_n را در نظر بگیرید که قابلیت اعتماد جزء c_i، p_i است و $h(\mathbf{p})$ قابلیت اعتماد سیستم است. اندازهٔ اهمیت بیرنبام جزء c_i به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$I_B(i;\mathbf{p}) = \frac{\partial h(\mathbf{p})}{\partial p_i}. \qquad (۱)$$

بزرگ بودن I_B یعنی یک تغییر کوچک در قابلیت اعتماد جزء c_i می‌تواند باعث افزایش قابلیت اعتماد سیستم شود.

اندازهٔ اهمیت بیرنبام به‌صورت نموداری در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. نمودار اندازه اهمیت بیرنبام

بنا بر رابطهٔ

$$I_B(i;\mathbf{p}) = h(۱_i, \mathbf{p}^{(i)}) - h(۰_i, \mathbf{p}^{(i)}),$$

می‌توان گفت که اندازهٔ اهمیت بیرنبام، معادل است با میزان افزایش قابلیت اعتماد سیستم وقتی که
قابلیت اعتماد جزء c_i یک واحد افزایش می‌یابد. بنا بر رابطهٔ

$$I_B(i;\mathbf{p}) = P(\varphi(۱_i, \mathbf{x}^{(i)}) - \varphi(۰_i, \mathbf{x}^{(i)}) = ۱),$$

اندازهٔ $I_B(i;\mathbf{p})$، احتمال آن است که جزء c_i برای سیستم بحرانی باشد. به عبارتی احتمال آن است که کارکرد یا عدم کارکرد جزء c_i سبب کارکرد یا عدم کارکرد سیستم شود. با استفاده از این رابطه، حدود I_B در نتیجهٔ ذیل حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲. برای یک سیستم منسجم با $n \geq ۲$ و $i = ۱, ..., n$، $۰ \leq I_B(i;\mathbf{p}) \leq ۱$.

۳ اندازهٔ اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء

اگرچه I_B برای رتبه‌بندی اجزای بر حسب کاهش یا افزایش اندازهٔ اهمیتشان مورد استفاده قرار می‌گیرد و مهم‌ترین جزء را در افزایش قابلیت اعتماد سیستم تعیین می‌کند، I_B حاوی همهٔ اطلاعات مربوط به تأثیر متقابل بین اجزای در قابلیت اعتماد سیستم نیست؛ به عبارتی تعیین‌کنندهٔ میزان تغییر اهمیت یک جزء در صورت فعال یا غیرفعال بودن جزء دیگر نیست. به این

منظور هانگ و لی [۷] اندازه اهمیت قابلیت اعتماد توأم دو جزء c_i و c_j، $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p})$، را به‌صورت زیر تعریف کردند:

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}^{(ij)}) = \frac{\partial^۲ h(\mathbf{p})}{\partial p_i \partial p_j}. \qquad (۲)$$

برحسب اندازه فوق، از لحاظ تعمیر و نگهداری و یا حتی انتخاب اجزای با هزینه و کیفیت بیشتر، دو جزئی بیشتر مورد توجه قرار می‌گیرند که JRI بزرگ‌تری داشته باشند.

هانگ و لی [۷] در قضیهٔ ۱.۳ رابطهٔ بین $I_{JR^{\text{II}}}$ و I_B را در یک سیستم منسجم به دست آوردند.

فرض کنید نماد $I_B(j;۱_i,\mathbf{p}^{(i)})$ نشان‌دهندهٔ اندازهٔ اهمیت بیرنبام جزء c_j به‌شرط فعال بودن جزء c_i در سیستم و نماد $I_B(j;۰_i,\mathbf{p}^{(i)})$ نشان‌دهندهٔ اندازهٔ اهمیت بیرنبام جزء c_j به‌شرط غیرفعال بودن جزء c_i در سیستم باشد.

قضیهٔ ۱.۳. در سیستم منسجم (N,φ) با اجزای مستقل c_1،...،c_n، داریم

الف)

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = I_B(j;۱_i,\mathbf{p}^{(i)}) - I_B(j;۰_i,\mathbf{p}^{(i)}).$$

ب)

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = I_B(i;۱_j,\mathbf{p}^{(i)}) - I_B(i;۰_j,\mathbf{p}^{(i)}).$$

بر اساس این قضیه، JRI مقداری مثبت، منفی یا صفر است. در اصل JRI دو جزء نشان‌دهندهٔ میزان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد یک جزء در حضور یا عدم حضور جزء دیگر است که بر اساس آن، نتایج ذیل حاصل می‌شود.

نتیجه ۲.۳. برای هر دو جزء c_i و c_j،

$$-۱ \le I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) \le ۱.$$

نتیجه ۳.۳. الف) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) \ge ۰$ معادل است با $I_B(j;۱_i,\mathbf{p}^{(i)}) \ge I_B(j;۰_i,\mathbf{p}^{(i)})$. در این صورت، جزء c_j در حالتی که جزء c_i در سیستم فعال است، I_B بزرگ‌تری دارد نسبت به حالتی که جزء c_i در سیستم غیرفعال است.

ب) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) \le ۰$ معادل است با $I_B(j;۱_i,\mathbf{p}^{(i)}) \le I_B(j;۰_i,\mathbf{p}^{(i)})$. در این صورت، جزء c_j در حالتی که جزء c_i در سیستم غیرفعال است، I_B بزرگ‌تری دارد نسبت به حالتی که جزء c_i در سیستم فعال است.

ج) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = ۰$ معادل است با $I_B(j;۱_i,\mathbf{p}^{(i)}) = I_B(j;۰_i,\mathbf{p}^{(i)})$. در این صورت، I_B جزء c_j در حالتی که جزء c_i در سیستم غیرفعال، باشد برابر است با حالتی که جزء c_i در سیستم فعال است.

قضیه ۴.۳ در حالتی که متغیرها مستقل یا وابسته باشند، برقرار است.

قضیهٔ ۴.۳. الف) اگر هیچ مسیر مینیمالی شامل هر دو جزء c_i و c_j وجود نداشته باشد، آن‌گاه

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) \le ۰.$$

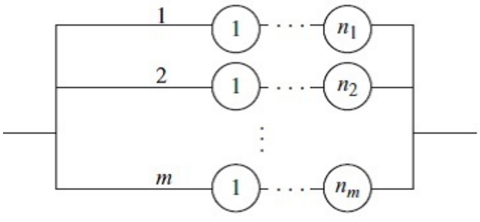
ب) اگر هیچ قطع‌کنندهٔ مینیمالی شامل هر دو جزء c_i و c_j وجود نداشته باشد، آن گاه

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) \ge ۰.$$

بنا بر قضیه فوق، در حالتی که دو جزء به‌صورت متوالی به هم متصل هستند علامت $I_{JR^{\text{II}}}$ مثبت است و در حالتی که دو جزء به‌صورت موازی به هم متصل هستند علامت $I_{JR^{\text{II}}}$ منفی است.

تذکر ۵.۳. دو جزء، مکمل (جانشین) قابلیت اعتماد یکدیگر هستند اگر با فعال بودن یکی از این دو جزء، اهمیت جزء دیگر افزایش (کاهش) یابد [۵]. بنا بر این، دو جزء، مکمل (جانشین) قابلیت اعتماد یکدیگر هستند اگر علامت JRI آن‌ها غیر منفی (غیر مثبت) باشد.

مثال ۶.۳. یک سیستم موازی-متوالی با اجزای $i.i.d.$ و قابلیت اعتماد یکسان p را مانند شکل ۲ در نظر بگیرید.



شکل ۲. سیستم با ساختار موازی-متوالی

فرض کنید سیستم دارای k زیر سیستم متوالی با n_k جزء در kامین زیرسیستم، $k = ۱,\ldots,m$، باشد. بنا بر این، قابلیت اعتماد سیستم برابر است با $h(\mathbf{p}) = ۱ - \prod_{k=۱}^{m}(۱-p^{n_k})$. $I_{JR^{\text{II}}}$ دو جزء c_i و c_j در زیرسیستم k، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;p) = p^{n_k-۲}\prod_{r\neq k}(۱-p^{n_r}) \ge ۰.$$

$I_{JR^{\text{II}}}$ جزء c_i در زیرسیستم k و جزء c_j در زیرسیستم k' به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;p) = -p^{n_k-n_{k'}-2}\prod_{r\neq k,k'}(1-p^{n_r}) \le 0.$$

با توجه به مثال فوق، JRI دو جزئی که در یک سیستم به‌صورت متوالی به یکدیگر متصل هستند، مثبت است و JRI دو جزئی که در یک سیستم به‌صورت موازی به یکدیگر متصل باشند، منفی است.

۴ JRI دو جزء در سیستم‌های k از n

قضیه زیر، شکل بسته‌ای برای JRI دو جزء در یک سیستم k از n با اجزای $i.i.d.$ است. بر مبنای این قضیه می‌توان تفاوت مقدار اندازه اهمیت JRI دو جزء را بر حسب قابلیت اعتماد اجزای و پارامترهای k و n بررسی کرد.

قضیهٔ ۱.۴. برای $n \ge 0$ و $2 \le k \le n$، $I_{JR^{\text{II}}}$ برای سیستم k از n با اجزای $i.i.d.$ برای دو جزء c_i و c_j به‌صورت زیر تعیین می‌شود

$$I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = p^{k-2}(1-p)^{n-k-1} \times\left[\binom{n-2}{k-2}-\binom{n-1}{k-1}p\right]. \quad (3)$$

نتیجه زیر از قضیه ۱.۴ حاصل می‌شود که بر اساس آن با آگاهی از مقدار p می‌توان علامت JRI را تعیین کرد.

نتیجه ۲.۴. برای $n \ge 0$ و $2 \le k \le n$، علامت $I_{JR^{\text{II}}}$ برای سیستم k از n با اجزای $i.i.d.$ برای دو جزء c_i و c_j به‌صورت زیر تعیین می‌شود.

الف) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) > 0$ اگر

$$0 < p < \frac{k-1}{n-1}.$$

ب) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = 0$ اگر $p = \frac{k-1}{n-1}$.

ج) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) < 0$ اگر

$$\frac{k-1}{n-1} < p < 1.$$

طبق نتیجه ۲.۴ به‌راحتی می‌توان تعیین کرد که در چه شرایطی اجزای جانشین قابلیت اعتماد یا مکمل قابلیت اعتماد یکدیگر هستند.

۱.۴ مقایسه JRI دو جزء در یک سیستم k از n

در این قسمت تغییر JRI اجزای را در سیستم‌های k از n از دو جهت مطالعه می‌کنیم. ابتدا تغییر JRI را بر حسب تغییر p و n در یک نقطهٔ ثابت k $(=2)$ و سپس تغییر آن را برحسب تغییر p و k در نقطهٔ ثابت n مورد بررسی قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۳.۴. برای سیستم‌های ۲ از n با اجزای $i.i.d.$

الف) $I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = (1-p)^{n-3}\left[1-(1-n)p\right]$.

ب) $\lim_{p\to 0} I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = 1$ و $\lim_{p\to 1} I_{JR^{\text{II}}}(i,j;\mathbf{p}) = 0$.

ج) کمترین مقدار $I_{JR^{\text{II}}}$ برابر است با $-\left(\frac{n-3}{n-1}\right)^{n-3}$ و این مقدار به‌ازای $p = \frac{2}{n-1}$ به دست می‌آید.

د) برای $n \ge 5$، نمودار $I_{JR^{\text{II}}}$ دارای نقطهٔ عطف $\left[\frac{3}{n-1}, -2\left(\frac{n-4}{n-1}\right)^{n-3}\right]$ است.

بر اساس قضیه ۳.۴، در یک سیستم ۲ از n با افزایش قابلیت اعتماد اجزای، اندازهٔ اهمیت توأم دو جزء کاهش می‌یابد و هنگامی که $p \to 1$، JRI دو جزء صفر می‌شود.

قضیهٔ ۴.۴. فرض کنید که $I_{JR^{\text{II}}_{2,n}}(i,j;\mathbf{p})$ اندازهٔ اهمیت توأم دو جزء c_i و c_j برای سیستم ۲ از n باشد. در این‌صورت رابطه بین JRI سیستم ۲ از n و سیستم ۲ از $n+1$ به‌صورت ذیل است.

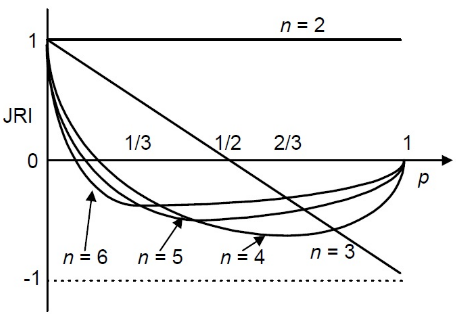
الف) $I_{JR^{\text{II}}_{2,n}}(i,j;\mathbf{p}) < I_{JR^{\text{II}}_{2,n+1}}(i,j;\mathbf{p})$ اگر $0 < p < \frac{2}{n}$

ب) $I_{JR^{\text{II}}_{2,n}}(i,j;\mathbf{p}) = I_{JR^{\text{II}}_{2,n+1}}(i,j;\mathbf{p})$ اگر $p = \frac{2}{n}$.

ج) $I_{JR^{\text{II}}_{2,n}}(i,j;\mathbf{p}) > I_{JR^{\text{II}}_{2,n+1}}(i,j;\mathbf{p})$ اگر $\frac{2}{n} < p < 1$.

برای تعیین سطح بهینه‌ای از افزونگی در ساختارهای k از n به تغییرات JRI در سیستم‌های ۲ از n به شکل ۳ توجه فرمایید. از شکل ۳ نتایج ذیل حاصل می‌شود.

- برای $n \ge 4$، با افزایش قابلیت اعتماد اجزای، p، اندازهٔ اهمیت توأم دو جزء c_i و c_j به صفر میل می‌کند.
- برای $n \ge 4$ و مقادیر بزرگ p، با افزایش n، مقدار قدر مطلق JRI دو جزء c_i و c_j کاهش می‌یابد.



شکل۳. تغیرات JRI برحسب سطح افزونگی در یک سیستم ۲ از n

این اطلاعات برای تعیین سطح افزونگی در یک سیستم k از n بر حسب مقدار p مفید است. به‌عنوان مثال، می‌توان مقدار n را طوری تعیین کرد که اجزای جانشین قابلیت اعتماد یکدیگر باشند. به این منظور، اگر $n < \frac{۱+p}{p}$، ترجیح داده می‌شود که سطح افزونگی افزایش یابد؛ زیرا در حالتی که $n < \frac{۱+p}{p}$، اجزاء مکمل قابلیت اعتماد یکدیگر هستند.

در سیستم‌های ۲ از n، اگر $p > \frac{۱}{۲}$ باشد، آن گاه $\left|I_{JR^{\mathrm{II}}_{۲,n}}(i,j;\mathbf{p})\right| > \left|I_{JR^{\mathrm{II}}_{۲,n+۱}}(i,j;\mathbf{p})\right|$. به عبارتی اگر قابلیت اعتماد اجزای بیش از $\frac{۱}{۲}$ باشد، افزایش سطح افزونگی سبب کاهش شدت اثر متقابل دو جزء c_i و c_j می‌شود. در قضیه زیر، تغییرات JRI را می‌توان با تغییر k و p بررسی کرد.

قضیهٔ ۵.۴. الف)

برای $۳ \le k \le n-۲$، در سیستم‌های k از n داریم

$$\lim_{p\to ۰} I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n}}(i,j;\mathbf{p}) = ۰,$$

$$\lim_{p\to ۱} I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n}}(i,j;\mathbf{p}) = ۰.$$

ب) برای $۳ \le k \le n-۲$، در سیستم‌های $n-۱$ از n داریم

$$\lim_{p\to ۰} I_{JR^{II}_{n-۱,n}}(i,j;\mathbf{p}) = ۰,$$

$$\lim_{p\to ۱} I_{JR^{II}_{n-۱,n}}(i,j;\mathbf{p}) = -۱.$$

طبق قضیه ذیل می‌توان JRI سیستم k از n را با سیستم k از $n+۱$ برمبنای مقدار p مقایسه نمود.

قضیهٔ ۶.۴. با فرض این‌که $a = \sqrt{\frac{(k-۱)(n-k+۱)}{n-۱}}$ باشد، رابطهٔ $I_{JR^{\mathrm{II}}}$ سیستم در k از n با سیستم k از $n+۱$ به‌صورت زیر است.

الف) برای $\frac{k-۱+a}{n} < p < ۱$ یا $۰ < p < \frac{k-۱-a}{n}$، خواهیم داشت

$$I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n}}(i,j;\mathbf{p}) < I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n+۱}}(i,j;\mathbf{p}).$$

ب) برای $p = \frac{k-۱\pm a}{n}$، خواهیم داشت

$$I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n}}(i,j;\mathbf{p}) = I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n+۱}}(i,j;\mathbf{p}).$$

ج) برای $\frac{k-۱-a}{n} < p < \frac{k-۱+a}{n}$، خواهیم داشت

$$I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n}}(i,j;\mathbf{p}) > I_{JR^{\mathrm{II}}_{k,n+۱}}(i,j;\mathbf{p}).$$

۵ اندازهٔ اهمیت قابلیت اعتماد توأم k جزء

گائو و همکاران [۴] مفهوم اندازهٔ اهمیت توأم JRI را برای k جزء در سیستم به‌صورت زیر توسعه دادند:

$$I_{JR^k}(c_۱, ..., c_k) = \frac{\partial^k h(\mathbf{p})}{\prod\limits_{i=۱}^{k} \partial p_i}.$$

قضیهٔ ۱.۵. در صورتی که اجزای از یکدیگر مستقل باشند، اهمیت قابلیت اعتماد نسبی توأم به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} I_{JR^k}(c_۱, ..., c_k) =& h(۱_۱, ..., ۱_k, \mathbf{p}) \\ & - h(۱_۱, ۱_۲, ..., ۰_k, \mathbf{p}) \pm ... \pm h(۰_۱, ۰_۲, ..., ۱_k, \mathbf{p}) \\ & \pm h(۰_۱, ۰_۲, ..., ۰_k, \mathbf{p}). \end{aligned} \tag{۴}$$

بررسی علامت مثبت و منفی قبل از تابع h در رابطهٔ ۴ برمبنای اصول زیر تعیین می‌شود.

الف) اگر عدد k فرد باشد، در صورتی که تعداد متناظر با ۱ها نیز فرد باشد، علامت قبل از تابع h مثبت و در غیر این صورت منفی است.

ب) اگر عدد k زوج باشد، در صورتی که تعداد متناظر با ۱ها نیز زوج باشد، علامت قبل از تابع h مثبت و در غیر این صورت منفی است.

ج) علامت قبل از تابع $h(۰_۱, ..., ۰_k, \mathbf{p})$ نیز به این صورت تعیین می‌شود که اگر k فرد باشد، منفی و در غیر این صورت مثبت است.

نتیجه ۲.۵. تساوی زیر میان JRI برای k جزء و JRI مراتب پایین‌تر برقرار است.

$$\begin{aligned} I_{JR^k}(c_۱, ..., c_k) =& I_{JR^{\mathrm{k-1}}}(c_۱, ..., c_{k-۱})_{s*c_k} \\ & I_{JR^{\mathrm{k-1}}}(c_۱, ..., c_{k-۱})_{s-c_k}. \end{aligned} \tag{۵}$$

که در آن $I_{JR^{\mathrm{k-1}}}(c_۱, ..., c_{k-۱})_{s*c_k}$ نشان‌دهندهٔ اثر توأم $k-۱$ جزء در سیستم است، در صورتی که جزء c_k آن فعال باشد و $I_{JR^{\mathrm{k-1}}}(c_۱, ..., c_{k-۱})_{s-c_k}$ به این معنا است که جزء c_k در سیستم غیرفعال است.

در حقیقت، JRI برای k جزء نشان‌دهندهٔ میزان تغییر اهمیت قابلیت اعتماد $k-۱$ جزء در حضور یا عدم حضور جزء دیگر است.

۱.۵ علامت JRI برای سه جزء

در نتیجه ذیل از قضیه ۲.۵، به بررسی حالات خاصی می‌پردازیم که بر اساس آن می‌توان علامت JRI سه جزء را بدون محاسبه تعیین کرد.

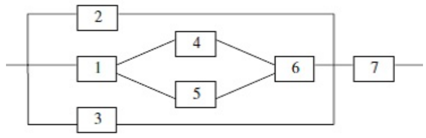
نتیجه ۳.۵. الف) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ موازی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت موازی باشند، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$.

ب) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ موازی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت متوالی باشند، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3) \leq 0$.

ج) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ متوالی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت موازی باشند، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3) \leq 0$.

د) اگر اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ متوالی باشند، در صورتی که c_1 و c_2 با یکدیگر در حالت متوالی باشند، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$.

مثال ۴.۵. یک سیستم متوالی-موازی شامل ۷ جزء $i.i.d.$ با قابلیت اعتماد یکسان p با ساختار شکل ۴ را در نظر بگیرید.



شکل ۴. سیستم مثال ۴.۵

اجزای c_2 و $\{c_1, c_6\}$ در حالت موازی و c_1 و c_6 با یکدیگر در حالت متوالی هستند. لذا، بر اساس قسمت (ب) از نتیجه ۳.۵ داریم $I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_6) \leq 0$. اجزای c_3 و $\{c_1, c_2\}$ در حالت موازی و c_1 و c_2 نیز با یکدیگر در حالت موازی هستند. بنا بر این، طبق قسمت (الف) از نتیجه ۳.۵ داریم $I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3) \geq 0$.

۲.۵ JRI سه جزء در سیستم‌های k از n

گائو و همکاران [۴]، اندازۀ اهمیت توأم سه جزء را در سیستم‌های k از n مطالعه کردند و برای حالتی که اجزای $i.i.d.$ هستند، صورت بسته‌ای برای JRI به دست آوردند.

مثال ۵.۵. یک سیستم ۳ از ۵ را در نظر بگیرید. با فرض آن که قابلیت اعتماد همۀ اجزای یکسان و برابر p باشد، روابط زیر برقرار است:

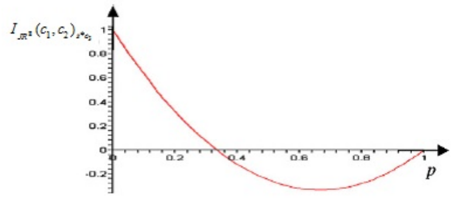
$$I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3) = 6p^2 - 6p + 1,$$

$$I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 2p - 3p^2,$$

$$I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s*c_3} = I_{JR^{\mathrm{III}}}(c_1, c_2, c_3)+$$

$$I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 1 - 4p + 3p^2.$$

شکل ۵، $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s*c_3}$ را برای مقادیر مختلف p نشان می‌دهد.



شکل ۵. $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s*c_3}$ برای سیستم ۳ از ۵

از شکل ۵ نتایج زیر حاصل می‌شود.

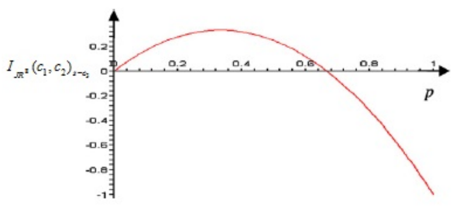
- اگر $p \in [0, \frac{1}{3})$، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s*c_3} > 0$. بنا بر این، $I_B(c_1)_{s*c_2*c_3} > I_B(c_1)_{s*c_2-c_3}$.

  یعنی، در یک سیستم ۳ از ۵ برای $p \in [0, \frac{1}{3})$، جزء c_1 در صورت فعال بودن c_2 و c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_3 فعال و c_2 غیرفعال باشد.

- اگر $p \in (\frac{1}{3}, 1)$، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s*c_3} < 0$. بنا بر این، $I_B(c_1)_{s*c_2*c_3} < I_B(c_1)_{s*c_2-c_3}$. یعنی به‌ازای $p \in (\frac{1}{3}, 1)$، جزء c_1 در صورت غیرفعال بودن c_2 و فعال بودن c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_2 و c_3 هر دو فعال باشند.

- اگر $p = \frac{1}{3}$، آن گاه $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s*c_3} = 0$. یعنی به‌ازای $p = \frac{1}{3}$، اهمیت جزء c_1 در دو حالتی که c_2 و c_3 هر دو فعال یا c_2 غیرفعال و c_3 فعال باشد، یکسان است.

شکل ۶، $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s-c_3}$ را برای مقادیر مختلف p نشان می‌دهد.



شکل ۶. $I_{JR^{\mathrm{II}}}(c_1, c_2)_{s-c_3}$ برای سیستم ۳ از ۵

از این شکل، نتایج ذیل حاصل می‌شود.

□ به‌ازای $p \in [0, \frac{2}{3})$،

$$I_{JR^{II}}(c_1, c_2)_{s-c_3} > 0$$

بنا بر این، $I_B(c_1)_{s-c_2*c_3} > I_B(c_1)_{s-c_2-c_3}$. یعنی به‌ازای $p \in [0, \frac{2}{3})$، جزء c_1 در صورت فعال بودن c_2 و غیرفعال بودن c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_2 و c_3 هر دو غیرفعال باشند.

□ به‌ازای $p \in (\frac{2}{3}, 1)$،

$$I_{JR^{II}}(c_1, c_2)_{s-c_3} < 0$$

بنا بر این، $I_B(c_1)_{s-c_2*c_3} < I_B(c_1)_{s-c_2-c_3}$. یعنی به‌ازای $p \in (\frac{2}{3}, 1)$، جزء c_1 در صورت غیرفعال بودن c_2 و c_3 اهمیت بیشتری دارد نسبت به زمانی که c_2 فعال و c_3 غیرفعال باشد.

□ به‌ازای $p = \frac{2}{3}$،

$$I_{JR^{II}}(c_1, c_2)_{s-c_3} = 0$$

یعنی به‌ازای $p = \frac{2}{3}$، اهمیت جزء c_1 در دو حالتی که c_2 و c_3 هر دو غیرفعال یا c_2 فعال و c_3 غیرفعال باشند، یکسان است.

قضیه زیر تأثیر افزایش سطح افزونگی را در یک سیستم ۳ از n بر روی JRI سه جزء نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۶.۵. در یک سیستم ۳ از n، اگر $p < \frac{2}{n-1}$ باشند، آن گاه

$$I_{JR^{III}_{3,n}}(c_1, c_2, c_3) > I_{JR^{III}_{3,n+1}}(c_1, c_2, c_3).$$

بر اساس قضیه فوق، در صورتی که $p < \frac{2}{n-1}$باشند، آن گاه افزایش n سبب کاهش اثر توأم سه جزء در قابلیت اعتماد سیستم می‌شود.

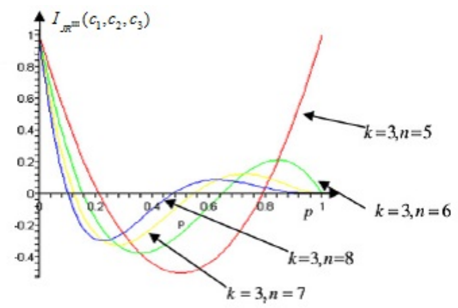
در ادامه به مثالی در این زمینه توجه فرمایید.

مثال ۷.۵ برای سیستم ۳ از n با nهای متفاوت، $I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3)$ را برای حالت‌های زیر، محاسبه می‌کنیم.

$$k = 3, \quad n = 5,$$
$$k = 3, \quad n = 6,$$
$$k = 3, \quad n = 7,$$
$$k = 3, \quad n = 8.$$

با توجه به شکل ۷، به‌ازای مقدار ثابت $k = 3$ و مقادیر مختلف $p \in (0, 1)$ به‌وضوح مشاهده می‌کنیم که برای $p < \frac{2}{n-1}$ داریم:

$$I_{JR^{III}_{3,n}}(c_1, c_2, c_3) > I_{JR^{III}_{3,n+1}}(c_1, c_2, c_3).$$



شکل ۷. $I_{JR^{III}}(c_1, c_2, c_3)$ سیستم‌های ۳ از n

مراجع

[۱] اسدی، مجید (۱۳۹۲)، آشنایی با نظریهٔ قابلیت اعتماد. تهران: مرکز نشر دانشگاهی.

[2] Armstrong, M. J. (1995). Joint reliability-importance of components. *IEEE Transactions on Reliability*, **44**, 408–412.

[3] Birnbaum, Z. W. (1969). On the importance of different components in a multicomponent system. In: Krishnaiah, P. R., ed. *Multivariate Analysis II*. New York: Academic Press, pp. 581–592.

[4] Gao, X., Cui, L. and Li, J. (2007). Analysis for joint importance of components in a coherent system. *European Journal of Operational Research*, **182**, 282–299.

[5] Hagstrom, J. N. (1990). *Redundancy, substitutes and complements in system reliability*. Technical report, College of Business Administration, University of Illinois.

[6] Hong, J. S. and Lie, C. H. (1993). Joint reliability-importance of two edges in an undirected network. *IEEE Transactions on Reliability*, **42**, 17–33.

[7] Hong, J. S., Koo, H. Y. and Lie C. H. (2002). Joint reliability-importance of k-out-of-n systems. *European Journal of Operational Research*, **142**, 539–547.

[8] Jan, S. and Chang, H. W. (2006). *Joint reliability importance of k-out-of-n systems and series-parallel systems*. Proceedings of PDPTA'06, pp. 395–398.

[9] Kuo, W. and Zhu, X. (2012). *Importance Measures in Reliability, Risk, and Optimization: Principles and Applications*. Wiley, New York.

[10] Wu, S. (2005). Joint importance of multistate systems. *Computers and Industrial Engineering*, **49**, 63–75.

[11] Xie, M. and Lai, C. D. (1996). Exploiting symmetry in the reliability analysis of coherent systems. *Naval Research Logistics*, **43**, 1025–1034.