

برآورد دومرحله‌ای پارامترها با استفاده از تابع مفصل

علی هدایتی^۱، اسماعیل خرم^۲، سعید رضاخواه^۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۳/۲۴

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۳/۳۱

چکیده:

برآورد درست‌نمایی ماکسیمم در توزیع‌های چندمتغیره، نیازمند بهینه‌سازی با ابعاد زیاد (به تعداد پارامترهای مجهول) است. در این مقاله برآورد دومرحله‌ای پارامترها با استفاده از تابع مفصل یادآوری می‌شود. این روش مسئله را به چند بهینه‌سازی کوچک‌تر تقسیم می‌کند و موجب سهولت و صرفه‌جویی در محاسبات می‌گردد. همچنین دو روش برای بررسی سازگاری برآوردگرها مطرح می‌شود. از پارتو دومتغیره به عنوان مثال استفاده می‌کنیم و دو مجموعه داده (تولید شده و واقعی) نیز برای روشن شدن اهداف، تحلیل می‌شود. **واژه‌های کلیدی:** برآورد درست‌نمایی ماکسیمم، برآورد دومرحله‌ای پارامترها، تابع مفصل، سازگاری برآورد، پارتو دومتغیره.

۱ مقدمه

توزیع مجانبی این برآوردگرها را نیز به دست آورد که در این جا مورد نظر نمی‌باشد. اکنون با تعریف تابع مفصل بحث را آغاز می‌کنیم.

اگر $X_1, \dots, X_m$ ، m متغیر تصادفی باشند، تابع توزیع تجمعی توأم آنها را با $F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m)$ نشان داده و به صورت

$$F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_m \leq x_m) \\ -\infty < x_1, \dots, x_m < +\infty$$

تعریف می‌کنند و افزون بر آن تابع چگالی توأم عبارت است از

$$f_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m) = \frac{\partial^m F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m)}{\partial x_1 \dots \partial x_m}$$

و همان‌گونه که مشاهده می‌شود با در اختیار داشتن تابع توزیع توأم یا تابع چگالی توأم می‌توان توابع چگالی حاشیه‌ای، توابع توزیع حاشیه‌ای و توابع بقای حاشیه‌ای را به دست آورد، اما عکس آن امکان‌پذیر نیست و با توابع حاشیه‌ای نمی‌توان توزیع توأم را به دست آورد. تابع مفصل برای رفع این مشکل تعریف

برای به دست آوردن برآوردگرهای درست‌نمایی ماکسیمم در توزیع‌های چندمتغیره، نیازمند بهینه‌سازی با ابعاد زیاد (به تعداد پارامترهای مجهول) هستیم که حل آن به چند معادله با چند مجهول ختم می‌شود. این معادلات معمولاً فاقد جواب صریح بوده و نیازمند استفاده از روش‌های تکراری (مانند نیوتن-رافسون^۴) و برنامه‌های کامپیوتری است. اما در توزیع‌های چندمتغیره‌ای که تابع مفصل^۵ آنها موجود است می‌توان مسئله را به دو یا چند بهینه‌سازی کوچک‌تر و ساده‌تر تقسیم کرد و هر بهینه‌سازی را به‌طور جداگانه به دست آورد. بدیهی است که این امر موجب سهولت و صرفه‌جویی در محاسبات می‌گردد. این روش را برآورد دومرحله‌ای پارامترها می‌نامند. در بعضی منابع به دلیل استفاده تابع مفصل از توابع حاشیه‌ای آن را توابع استنباط حاشیه‌ها یا به اختصار (IFM)^۶ نیز می‌نامند [۳]. برآورد دومرحله‌ای نخستین بار در پایان‌نامه [۱۱] مطرح شد و سپس [۳] تکمیل گردید. [۴]

^۱ دانش‌آموخته کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران

^۲ عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران

^۳ عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه صنعتی امیرکبیر، ایران

^۴ Newton-Raphson

^۵ Copula function

^۶ Inference Functions for Margins

تعریف می‌شود. S_{X_1, X_2} و S_{X_1}, S_{X_2} به ترتیب تابع بقای توزیع F_{X_1} ، تابع بقای توزیع F_{X_2} و تابع بقای توزیع F_{X_1, X_2} هستند. اکنون با استفاده از رابطه بین توابع بقا و توابع توزیع، تابع بقای مفصل ($\bar{C}$) را بر حسب توابع توزیع به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ \Rightarrow S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= 1 - [1 - S_{X_1}(x_1)] - [1 - S_{X_2}(x_2)] \\ &\quad + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = S_{X_1}(x_1) \\ &\quad + S_{X_2}(x_2) - 1 + F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \\ \Rightarrow \bar{C}(u, v; \theta) &= u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v; \theta) \quad (5) \end{aligned}$$

در این مقاله ضمن مرور برآورد دومرحله‌ای و ویژگی‌های آن، دو روش برای بررسی سازگاری برآورد، دو آزمون فرض و چندین مثال نیز مطرح می‌کنیم، ساختار این مقاله به شرح زیر است.

در فصل دوم روش برآورد دومرحله‌ای مطرح می‌شود. در فصل سوم این روش را برای برآورد پارامترهای پارتو دومتغیره سانکاران- نائیر به کار برده و آن را با روش درست‌نمایی ماکسیمم مقایسه می‌کنیم. در فصل چهارم با دو مجموعه داده (تولید شده و واقعی) اهداف این روش را تحلیل کرده و سرانجام با نتیجه‌گیری در فصل پنجم مقاله را به پایان می‌بریم.

۲ برآورد دومرحله‌ای پارامترها با استفاده از تابع مفصل

فرض کنید $\{(x_{1i}, \dots, x_{mi}); i = 1, \dots, n\}$ مشاهدات یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع $F_{X_1, \dots, X_m}(x_1, \dots, x_m)$ با پارامترهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ و θ باشد آن‌گاه تابع درست‌نمایی و لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\dots) = \prod_{i=1}^n f_{X_1, \dots, X_m}(x_{1i}, \dots, x_{mi}) \quad (6)$$

$$\ln L(\dots) = \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1, \dots, X_m}(x_{1i}, \dots, x_{mi}) \quad (7)$$

خواهد بود. برای به دست آوردن برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول، باید تابع بالا را نسبت به پارامترهای

شده است. وقتی که توابع توزیع حاشیه‌ای پیوسته باشند، بنا به قضیه معروف اسکالر می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} F(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m; \theta) &= C(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_m(x_m; \alpha_m); \theta) \\ -\infty &< x_1, \dots, x_m < +\infty \end{aligned} \quad (1)$$

که در آن C یک خانواده از توابع مفصل با پارامتر θ و $F_1, \dots, F_m$ توابع توزیع حاشیه‌ای تک متغیره به ترتیب با پارامترهای $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ هستند. همچنین $x = (x_1, \dots, x_m)$ یافته‌های بردار تصادفی $X = (X_1, \dots, X_m)$ است $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ و θ نیز می‌توانند برداری از پارامترها باشند).

با مشتق‌گیری مرتبه m ام، تابع چگالی به صورت

$$\begin{aligned} f(x; \alpha_1, \dots, \alpha_m; \theta) &= c(F_1(x_1; \alpha_1), \dots, F_m(x_m; \alpha_m); \theta) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^m f(x_i; \alpha_i) \\ -\infty &< x_1, \dots, x_m < +\infty \end{aligned} \quad (2)$$

به دست می‌آید. در اینجا $c(\dots)$ تابع چگالی مفصل، $f_1, \dots, f_m$ توابع چگالی حاشیه‌ای و F_j تابع توزیع به‌ازای چگالی f_j ، $j = 1, \dots, m$ است. یکی از کاربردهای مهم دیگر تابع مفصل، ساختن توزیع‌های توأم با توابع حاشیه‌ای دلخواه است.

مثال ۱.۱. اگر X_1 و X_2 ، دو متغیر تصادفی باشند تابع توزیع تجمعی توأم آنها را با $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ نشان داده و به صورت

$$\begin{aligned} F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) \\ -\infty &< x_1, x_2 < +\infty \end{aligned}$$

تعریف می‌کنند. تابع مفصل یک تابع منحصر به فرد به صورت

$$\begin{aligned} C: [0, 1] \times [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= C\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2); \theta\}, \quad (3) \\ (x_1, x_2) &\in (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

است. تابع بقای منحصر به فرد مفصل به صورت

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = \bar{C}\{S_{X_1}(x_1), S_{X_2}(x_2); \theta\} \quad (4)$$

مثال ۱.۲. اگر X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی با تابع توزیع تجمعی $F_{X_1, X_2}(x_1, x_2)$ و $\{(x_{1i}, x_{2i}); i = 1, \dots, n\}$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از این توزیع باشد آن گاه تابع درست‌نمایی و لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2i}) \quad (۱۶)$$

$$\ln L(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2i}) \quad (۱۷)$$

خواهد بود. برای به دست آوردن برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم پارامترهای مجهول باید تابع بالا را نسبت به پارامترهای α_1, α_2 و θ ماکسیمم کرد، یعنی یک بهینه‌سازی سه‌بعدی و حل سه معادله سه مجهول.

روش دیگر، استفاده از برآورد دومرحله‌ای است. در این روش در مرحله اول برآوردهای درست‌نمایی ماکسیمم را برای پارامترهای حاشیه‌ای انجام می‌دهند و سپس پارامتر وابسته را برآورد می‌کنند. رابطه بین تابع توزیع توأم و تابع توزیع مفصل به صورت

$$F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = C\{F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2); \theta\},$$

$$(x_1, x_2) \in (-\infty, +\infty) \times (-\infty, +\infty) \quad (۱۸)$$

است. حال اگر از دو طرف یکبار نسبت به x_1 و یکبار نسبت به x_2 مشتق بگیریم رابطه بین تابع چگالی مفصل و توابع چگالی حاشیه‌ای به دست می‌آید.

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = c(F_{X_1}(x_1; \alpha_1), F_{X_2}(x_2; \alpha_2); \theta) \times f_{X_1}(x_1; \alpha_1) f_{X_2}(x_2; \alpha_2) \quad (۱۹)$$

که در اینجا $c(., .)$ تابع چگالی مفصل است. با استفاده از (؟؟) تابع درست‌نمایی ماکسیمم به صورت

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2i})$$

$$= \prod_{i=1}^n c(F_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1), F_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2); \theta)$$

$$\times \prod_{i=1}^n f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1) \times \prod_{i=1}^n f_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2) \quad (۲۰)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ و θ ماکسیمم کرد. یعنی

$$(\partial L / \partial \alpha_1, \dots, \partial L / \partial \alpha_m, \partial L / \partial \theta) = 0 \quad (۸)$$

پس با یک مسئله بهینه‌سازی دشوار با $m+1$ بعد روبرو هستیم که معمولاً جواب صریح نداشته و نیازمند روش‌های تکراری و برنامه‌های کامپیوتری است.

اما در روش دومرحله‌ای، برای توزیع‌هایی که تابع مفصل آنها موجود است تابع درست‌نمایی ماکسیمم با استفاده از (؟؟) به صورت

$$L(\dots) = \prod_{i=1}^n f_{X_1, \dots, X_m}(x_{1i}, \dots, x_{mi}) \quad (۹)$$

$$= \prod_{i=1}^n c(F_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1), \dots, F_{X_m}(x_{mi}; \alpha_m); \theta)$$

$$\times \prod_{i=1}^n f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1) \times \dots \times \prod_{i=1}^n f_{X_m}(x_{mi}; \alpha_m)$$

$$\ln L(\dots) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1), \dots, F_{X_m}(x_{mi}; \alpha_m); \theta) \quad (۱۰)$$

$$+ \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1) + \dots + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_m}(x_{mi}; \alpha_m)$$

خواهد بود. نخست رابطه زیر را ماکسیمم می‌کنیم

$$g(\dots) = \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1) + \dots + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_m}(x_{mi}; \alpha_m) \quad (۱۱)$$

برای این کار پارامترهای حاشیه‌ای تک تک متغیرهای تصادفی را با استفاده از تابع درست‌نمایی‌شان برآورد می‌کنیم

$$L_j(\alpha_j) = \prod_{i=1}^n f_j(X_{ij}; \alpha_j)$$

$$\ln L_j(\alpha_j) = \sum_{i=1}^n \ln f_j(X_{ij}; \alpha_j) \quad (۱۲)$$

$$\partial \ln L_j(\alpha_j) / \partial \alpha_j = 0 \quad (۱۳)$$

آن‌گاه در مرحله دوم برای برآورد θ تابع زیر را نسبت به θ ماکسیمم می‌کنیم

$$h(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_{X_1}(x_{1i}; \hat{\alpha}_1), \dots, F_{X_m}(x_{mi}; \hat{\alpha}_m); \theta) \quad (۱۴)$$

به عبارت بهتر بهینه‌سازی به $m+1$ بهینه‌سازی مجزا و ساده تبدیل می‌شود یعنی

$$(\partial L_1 / \partial \alpha_1, \dots, \partial L_m / \partial \alpha_m, \partial L / \partial \theta) = 0 \quad (۱۵)$$

برای مشاهده اثبات و توضیحات بیشتر به [۳] مراجعه شود.

چندمتغیره و α_j پارامتر حاشیه‌ای برای j امین تابع توزیع یک‌متغیره باشد، آنگاه $\hat{\theta}$ برآورد منحصر به فردی برای θ در حالت S خواهد بود. همچنین فرض کنیم S_1 و S_2 دو زیرمجموعه S باشند، $S_1 \subset S_2$ و $S_1 \geq 2$ آنگاه $\theta_{S_1} = a(\theta_{S_2})$ برای تابع a می‌باشد. اگر $i = 1, \dots, n$ ، Y_i داده‌های ما باشند و پارامترهای تک متغیره را نیز معلوم فرض کنیم (یا آنها را به صورت مجزا برآورد می‌کنیم) و برای $K = 1, 2$ ، $\hat{\theta}_{S_K}$ یک برآورد به روش دومرحله‌ای بر اساس داده‌های Y_{i,S_K} ، $i = 1, \dots, n$ باشد، $(Y_{ij}; j \in S_K)$ ، $i = 1, \dots, n$ نزدیک $\hat{\theta}_{S_1}$ و $a(\hat{\theta}_{S_2})$ برای تمام S_1 و S_2 ها ($S_1 \subset S_2$) یک شرط لازم و نه کافی برای نیکویی برازش است. مجموع توان دوم خطا (SE) برای $\hat{\theta}_{S_1} - a(\hat{\theta}_{S_2})$ را به صورت بهینه‌یابی‌های جداگانه و یا با استفاده از روش جک‌نایف^۸ می‌توان به دست آورد.

روش دیگر برای اطمینان از نیکویی برازش استفاده از برآورد فاصله‌ای است. با استفاده از نسبت درست‌نمایی ثابت می‌شود که با شرایط بالا رابطه

$$\{\theta : 2[L(\hat{\theta}_{S_1}; S_1) - L(\theta; S_1)] \geq \chi_{p_{S_1}, 1-\alpha}^2\} \quad (24)$$

برقرار است. که در آن $\chi_{p_{S_1}, 1-\alpha}^2$ توزیع χ^2 دو با ps درجه آزادی است، ps بعد بردار θ_S و $L(\cdot; S_1)$ لگاریتم تابع درست‌نمایی برای تابع چگالی توزیع $F(X_{S_1}; \alpha_j, j \in S_1; \theta_{S_1})$ است. [۳] چندین مثال برای این دو روش حتی برای متغیرهای گسسته ذکر شده است و روش‌های دیگری نیز برای ارزیابی نیکویی برازش مطرح گردیده است.

۳ کاربرد برآورد دومرحله‌ای پارامترها (توزیع دومتغیره پارتو)

[۶] پارتو دومتغیره جدیدی را که تابع بقای آن به صورت

$$P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) = (1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^{-\alpha_3} \quad (25)$$

$$x_1 > 0, x_2 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0$$

^۷ Estimation consistency

^۸ Jackknife method

در خواهد آمد. که اگر از دو طرف لگاریتم بگیریم خواهیم داشت

$$\ln L(\alpha_1, \alpha_2, \theta) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1), F_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2); \theta) + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2) \quad (21)$$

در روش دومرحله‌ای نخست رابطه

$$g(\alpha_1, \alpha_2) = \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1) + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2) \quad (22)$$

ماکسیم می‌کنیم. آنگاه در مرحله دوم برای برآورد θ ، تابع زیر را نسبت به θ ماکسیم می‌کنیم

$$h(\theta) = \sum_{i=1}^n \ln c(F_{X_1}(x_{1i}; \hat{\alpha}_1), (F_{X_2}(x_{2i}; \hat{\alpha}_2); \theta) \quad (23)$$

همان‌گونه که ملاحظه شد بهینه‌سازی سه‌بعدی به سه بهینه‌سازی یک‌بعدی تبدیل گردید که با کاهش چشمگیر محاسبات همراه است.

۱.۲ سازگاری برآورد^۷

برای اطمینان از این که مدل چندمتغیره بنا شده بر تابع مفصل (۲۴) برازش مناسبی برای داده‌ها است، راه‌های گوناگونی وجود دارد. یکی از این راه‌ها مقایسه توابع حاشیه‌ای مرتبه بالاتر با توابع حاشیه‌ای مرتبه پایین‌تر می‌باشد که آنرا سازگاری برآورد می‌نامند. نکته جالب در این روش استفاده از برآورد پارامتر مجهول در بررسی نیکویی برازش است، به عبارت دیگر با استفاده از یک مجموعه داده m متغیره، θ را بارها به طور مجزا در حالت‌های $m, 2, \dots$ متغیره برآورد می‌کنیم اگر این برآوردها اختلاف معناداری با هم نداشته باشند آنگاه مدل ما برازش مناسبی برای داده‌های ماست یعنی اگر

$$F(X; \alpha_1, \dots, \alpha_m; \theta) = C(F_1(X_1; \alpha_1), \dots, F_m(X_m; \alpha_m); \theta)$$

$$-\infty < x_1, \dots, x_m < +\infty$$

یک خانواده از توزیع m متغیره با توابع حاشیه‌ای $F_S(X_S; \alpha_j, j \in S; \theta_S)$ ، $S \in S_m$ ، $|S| \geq 2$ ، θ پارامتر

می‌باشد معرفی کردند. توابع توزیع و چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی X_1 و X_2 به صورت

$$\begin{aligned} f_{X_1}(x_1) &= \frac{\alpha_1 \alpha_3}{[1 + \alpha_1 x_1]^{\alpha_3 + 1}}, \\ P(X_1 \geq x_1) &= (1 + \alpha_1 x_1)^{-\alpha_3}; \quad x_1 > 0 \\ f_{X_2}(x_2) &= \frac{\alpha_2 \alpha_3}{[1 + \alpha_2 x_2]^{\alpha_3 + 1}}, \\ P(X_2 \geq x_2) &= (1 + \alpha_2 x_2)^{-\alpha_3}; \quad x_2 > 0 \end{aligned} \quad (29)$$

بنابراین توابع حاشیه‌ای مدل $SNBP$ با توابع حاشیه‌ای مدل $LSBP$ یکی هستند، با پارامترهای مقیاسی α_1, α_2 و θ پارامتر شکلی α_3 .

آشکار است که اگر $\theta = \alpha_1 \alpha_2$ باشد تابع چگالی توأم به صورت

$$f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \quad (30)$$

درخواهد آمد و این شرط استقلال X_1 و X_2 است.

تابع چگالی شرطی $X_1 | X_2 = x_2$ را می‌توان به صورت

$$\begin{aligned} f_{X_1 | X_2 = x_2}(x) &= \frac{f_{X_1, X_2}(x, x_2)}{f_{X_2}(x_2)} \\ &= \frac{(1 + \alpha_2 x_2)^{\alpha_3 + 1}}{\alpha_2 \alpha_3} \\ &\quad \times \frac{\alpha_3 (\alpha_1 + \theta x_2)(\alpha_2 + \theta x) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta}{(1 + \alpha_1 x + \alpha_2 x_2 + \theta x_2)^{\alpha_3 + 2}} \\ &= p f_U(x; \beta, \alpha_3 + 1) \\ &\quad + (1 - p) f_V(x, \beta, \alpha_3 + 1); \quad 0 < p < 1 \end{aligned} \quad (31)$$

نوشت که U و V به ترتیب متغیرهای تصادفی با توزیع پارتو و توزیع پارتو اریب-طول هستند.

$$\begin{aligned} f_U(x; \beta, \alpha_3 + 1) &= \frac{\beta(\alpha_3 + 1)}{(1 + \beta x)^{\alpha_3 + 2}} \quad x > 0 \\ f_V(x; \beta, \alpha_3 + 1) &= \frac{\beta^2 \alpha_3 (\alpha_3 + 1) x}{(1 + \beta x)^{\alpha_3 + 2}} \end{aligned}$$

همچنین

$$\begin{aligned} p &= \frac{\alpha_2 \theta \alpha_2 x_2 + \alpha_1 \alpha_2 (1 + \alpha_3) - \theta}{\alpha_2 (1 + \alpha_3) (\alpha_1 + \theta x_2)} \\ \beta &= \frac{\alpha_1 + \theta x_2}{1 + \alpha_2 x_2} \end{aligned}$$

برای تولید متغیر تصادفی با توزیع پارتو (U) از روش تبدیل معکوس استفاده می‌کنیم زیرا تابع توزیع آن معکوس پذیر است

$$f_{X_1}(x_1) = \frac{\alpha_1 \alpha_3}{(1 + \alpha_1 x_1)^{\alpha_3 + 1}}, f_{X_2}(x_2) = \frac{\alpha_2 \alpha_3}{(1 + \alpha_2 x_2)^{\alpha_3 + 1}}$$

به دست می‌آید و نیز

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1) &= 1 - (1 + \alpha_1 x_1)^{-\alpha_3} \\ P(X_2 \leq x_2) &= 1 - (1 + \alpha_2 x_2)^{-\alpha_3} \end{aligned} \quad (26)$$

از این به بعد این توزیع را پارتو دومتغیره لیندلی-سینگ پوروالا می‌نامیم و آن را به اختصار با $LSBP(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ نشان می‌دهیم.

[۸] با تعمیم آن، توزیع پارتو دومتغیره‌ای با تابع بقای

$$\begin{aligned} S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= P(X_1 > x_1, X_2 > x_2) \\ &= (1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \theta x_1 x_2)^{-\alpha_3} \\ &\quad x_1 > 0, x_2 > 0, \alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, \\ &\quad 0 \leq \theta \leq (\alpha_3 + 1) \alpha_1 \alpha_2 \end{aligned} \quad (27)$$

معرفی کردند. از این به بعد این توزیع را پارتو دومتغیره سانکاران-نایر نامیده و با $SNBP(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta)$ نشان می‌دهیم. آشکار است که توزیع $LSBP$ یک حالت خاص از توزیع $SNBP$ است. اکنون با مرور مقاله [۹] از این توزیع به عنوان مثال استفاده می‌کنیم.

اگر X_1 و X_2 دارای توزیع $SNBP(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta)$ با تابع بقای (۲۲) باشند آنگاه تابع چگالی توأم آنها برای $X_1 > 0$ و $X_2 > 0$ به صورت

$$\begin{aligned} f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \frac{\alpha_3 [\alpha_3 (\alpha_1 + \theta x_2) (\alpha_2 + \theta x_1) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta]}{[1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \theta x_1 x_2]^{\alpha_3 + 2}} \end{aligned} \quad (28)$$

خواهد بود. با همان محدودیت‌های پارامترها.

با انتگرال‌گیری از تابع چگالی توأم نسبت به X_2 ، تابع چگالی حاشیه‌ای X_1 و با انتگرال‌گیری نسبت به X_1 ، تابع چگالی

و برای تولید متغیر تصادفی با توزیع پارتو اریب- طول (V) از روش قبول- رد استفاده می‌کنیم زیرا

$$g_2(u, v; \alpha_3, \theta) = \{1 + \delta[(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1]\} \{1 + \delta[(1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1]\} \quad (35)$$

$$\begin{aligned} f_V(x; \beta, \alpha_3 + 1) &= \frac{\beta^\gamma \alpha_3 (\alpha_3 + 1)x}{(1 + \beta x)^{\alpha_3 + \gamma}} \\ &= (\alpha_3 + 1) \times \frac{\beta x}{1 + \beta x} \times \frac{\beta \alpha_3}{(1 + \beta x)^{\alpha_3 + 1}} \\ &\leq (\alpha_3 + 1) f_U(x; \beta, \alpha_3) \end{aligned}$$

با ترکیب دو روش فوق [۱] به راحتی می‌توان داده‌هایی با توزیع پارتو دومتغیره سانکاران- نائیر تولید کرد.

اکنون تابع بقای مفصل

$$\begin{aligned} \bar{C}(u, v) &= [u^{-\frac{1}{\alpha_3}} + v^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1 + \delta(u^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1)(v^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1)]^{-\alpha_3} \\ &\cdot \leq \delta \leq (1 + \alpha_3), \alpha_3 > 0 \end{aligned} \quad (32)$$

تعریف می‌کنیم. اگر

$$u = S_{X_1}(x_1) = (1 + \alpha_1 x_1)^{-\alpha_3}, x_1 > 0$$

$$v = S_{X_2}(x_2) = (1 + \alpha_2 x_2)^{-\alpha_3}, x_2 > 0$$

باشد آن‌گاه تابع بقای توأم آن به صورت

$$S_{X_1, X_2}(x_1, x_2) = [1 + \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \delta(\alpha_1 x_1)(\alpha_2 x_2)]^{-\alpha_3}$$

در می‌آید. آشکار است که اگر $\theta = \delta \alpha_1 \alpha_2$ باشد همان تعریف تابع بقای مدل $SNBP$ خواهد شد.

با استفاده از (۳۳) و تابع بقای توأم مفصل توزیع $SNBP(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta)$ و مشتق گیری نسبت به u و v خواهیم داشت

$$\begin{aligned} c(u, v) &= [g_1(u, v; \alpha_3, \theta) \times g_2(u, v; \alpha_3, \theta) - g_3(u, v; \alpha_3, \theta)] \\ &\times \frac{1}{\alpha_3^\gamma} (1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}-1} (1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}-1} \end{aligned} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} g_1(u, v; \alpha_3, \theta) &= \delta \alpha_3 \{ (1+u)^{-\frac{1}{\alpha_3}} + (1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1 \\ &+ \delta [(1-u)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1][(1-v)^{-\frac{1}{\alpha_3}} - 1] \}^{-(\alpha_3 + \gamma)} \end{aligned} \quad (34)$$

که در آن برای سادگی $\delta = \frac{\theta}{\alpha_1 \alpha_2}$ تعریف شده است. اکنون با توجه به مطالب بالا برآوردهای درست‌نمایی ماکسیم (MLEs) را برای توزیع $SNBP(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta)$ وقتی همه پارامترها ناشناخته‌اند، به دست می‌آوریم.

فرض کنید $\{(x_{1i}, x_{2i}); i = 1, \dots, n\}$ یک نمونه تصادفی به اندازه n از توزیع $SNBP(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta)$ باشد آن‌گاه تابع درست‌نمایی و لگاریتم تابع درست‌نمایی به صورت

$$L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta) = \prod_{i=1}^n f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \quad (37)$$

$$= \frac{\alpha_3^n \prod_{i=1}^n [\alpha_3(\alpha_1 + \theta x_{2i})(\alpha_2 + \theta x_{1i}) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta]}{\prod_{i=1}^n [1 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i} x_{2i}]^{\alpha_3 + \gamma}}$$

$$\ln L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta) =$$

$$n \ln \alpha_3 + \sum_{i=1}^n \ln [\alpha_3(\alpha_1 + \theta x_{2i})(\alpha_2 + \theta x_{1i}) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta]$$

$$- (\alpha_3 + \gamma) \sum_{i=1}^n \ln (1 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i} x_{2i})$$

$$\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 > 0, 0 \leq \theta \leq (\alpha_3 + 1) \alpha_1 \alpha_2 \quad (38)$$

خواهد بود. برای به دست آوردن برآوردهای درست‌نمایی ماکسیم پارامترهای مجهول باید تابع بالا را نسبت به پارامترهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و θ ماکسیم کرد. یعنی

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial \alpha_3} &= \frac{n}{\alpha_3} + \\ &\sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_1 + \theta x_{2i})(\alpha_2 + \theta x_{1i})}{\alpha_3(\alpha_1 + \theta x_{2i})(\alpha_2 + \theta x_{1i}) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta} - \\ &\sum_{i=1}^n \ln (1 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i} x_{2i}) = 0 \end{aligned} \quad (39)$$

در خواهد آمد. نخست رابطه زیر را ماکسیم می کنیم

$$\begin{aligned} g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) &= \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1, \alpha_3) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2, \alpha_3) \\ &= n \ln \alpha_1 \alpha_3 - (\alpha_3 + 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha_1 x_{1i}) \\ &\quad + n \ln \alpha_2 \alpha_3 - (\alpha_3 + 1) \sum_{i=1}^n \ln(1 + \alpha_2 x_{2i}) \\ &= n(\ln \alpha_1 + \ln \alpha_2) + 2n \ln \alpha_3 \\ &\quad - (\alpha_3 + 1) \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \alpha_1 x_{1i}) + \ln(1 + \alpha_2 x_{2i})] \end{aligned} \quad (45)$$

برای یافتن برآورد α_3 نسبت به آن مشتق گرفته مساوی صفر قرار می دهیم

$$\frac{\partial g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial \alpha_3} = \frac{2n}{\alpha_3} - \sum_{i=1}^n [\ln(1 + \alpha_1 x_{1i}) + \ln(1 + \alpha_2 x_{2i})] = 0 \quad (46)$$

پس با ثابت فرض کردن α_1 و α_2 تابع $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ماکسیم می شود اگر

$$\widehat{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n [\ln(1 + \alpha_1 x_{1i}) + \ln(1 + \alpha_2 x_{2i})]} \quad (47)$$

بنابراین $\widehat{\alpha_1}$ و $\widehat{\alpha_2}$ با ماکسیم کردن $g(\alpha_1, \alpha_2, \widehat{\alpha_3}(\alpha_1, \alpha_2))$ نسبت به α_1 و α_2 به دست می آید که یک مسئله بهینه سازی

دو بعدی به صورت

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_1} &= \frac{n}{\alpha_1} - (\alpha_3 + 1) \times \sum_{i=1}^n \frac{x_{1i}}{1 + \alpha_1 x_{1i}} = \frac{n}{\alpha_1} \\ &\quad - \left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^n [\ln(1 + \alpha_1 x_{1i}) + \ln(1 + \alpha_2 x_{2i})]} + 1 \right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^n \frac{x_{1i}}{1 + \alpha_1 x_{1i}} = 0 \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial g(\alpha_1, \alpha_2)}{\partial \alpha_2} &= \frac{n}{\alpha_2} - (\alpha_3 + 1) \times \sum_{i=1}^n \frac{x_{2i}}{1 + \alpha_2 x_{2i}} = \frac{n}{\alpha_2} \\ &\quad - \left(\frac{2n}{\sum_{i=1}^n [\ln(1 + \alpha_1 x_{1i}) + \ln(1 + \alpha_2 x_{2i})]} + 1 \right) \\ &\quad \times \sum_{i=1}^n \frac{x_{2i}}{1 + \alpha_2 x_{2i}} = 0 \end{aligned} \quad (49)$$

است. اگر $\widehat{\alpha_1}$ ، $\widehat{\alpha_2}$ و $\widehat{\alpha_3}$ تابع $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ را ماکسیم کنند، آن گاه در مرحله دوم برای برآورد θ تابع زیر را نسبت به θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial \theta} &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_2 \alpha_3 x_{2i} + \alpha_1 \alpha_3 x_{1i} + 2\theta \alpha_3 x_{1i} x_{2i} - 1}{\alpha_3 (\alpha_1 + \theta x_{2i}) (\alpha_2 + \theta x_{1i}) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta} - \\ &(\alpha_3 + 2) \sum_{i=1}^n \frac{x_{1i} x_{2i}}{1 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i} x_{2i}} = 0 \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial \alpha_1} &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_3 \alpha_2 + \alpha_3 \theta x_{1i} + \alpha_2}{\alpha_3 (\alpha_1 + \theta x_{2i}) (\alpha_2 + \theta x_{1i}) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta} - \\ &(\alpha_3 + 2) \sum_{i=1}^n \frac{x_{1i}}{1 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i} x_{2i}} = 0 \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L(\theta, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)}{\partial \alpha_2} &= \sum_{i=1}^n \frac{\alpha_3 \alpha_1 + \alpha_3 \theta x_{2i} + \alpha_1}{\alpha_3 (\alpha_1 + \theta x_{2i}) (\alpha_2 + \theta x_{1i}) + \alpha_1 \alpha_2 - \theta} - \\ &(\alpha_3 + 2) \sum_{i=1}^n \frac{x_{2i}}{1 + \alpha_1 x_{1i} + \alpha_2 x_{2i} + \theta x_{1i} x_{2i}} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

همان گونه که مشاهده می شود به چهار معادله، چهار مجهول رسیدیم که فاقد جواب صریح است و نیازمند روش های تکراری و نرم افزارهای کامپیوتری است. یکی از این روش ها، نیوتن-رافسون می باشد.

اما در روش دو مرحله ای و با استفاده از مثال ۱.۲ تابع درست نمایی ماکسیم به صورت

$$\begin{aligned} L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta) &= \prod_{i=1}^n f_{X_1, X_2}(x_{1i}, x_{2i}) \\ &= \prod_{i=1}^n c(F_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1, \alpha_3), F_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2, \alpha_3); \theta) \\ &\quad \times \prod_{i=1}^n f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1, \alpha_3) \times \prod_{i=1}^n f_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \quad (43)$$

است که اگر از دو طرف لگاریتم بگیریم به صورت

$$\begin{aligned} \ln L(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \theta) &= \sum_{i=1}^n \ln c(F_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1, \alpha_3), \\ &\quad F_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2, \alpha_3); \theta) + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_1}(x_{1i}; \alpha_1, \alpha_3) \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \ln f_{X_2}(x_{2i}; \alpha_2, \alpha_3) \end{aligned} \quad (44)$$

ماکسیم می‌کنیم.

(۵۰)

$$h(\theta) = \sum_{i=1}^n [\ln c(F_{X_1}(x_{1i}; \hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_3), (F_{X_2}(x_{2i}; \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3); \theta)]$$

همان‌گونه که ملاحظه شد حتی هنگامی که چهار پارامتر مجهول هستند بهینه‌سازی چهاربعدی در حالت قبلی به یک بهینه‌سازی دوبعدی و یک بهینه‌سازی یک‌بعدی تبدیل گردید که با کاهش چشمگیر محاسبات همراه است.

۱.۳ آزمون فرض

در این زیربخش دو آزمون فرض ارائه می‌شود.

آزمون اول: آزمون استقلال متغیر X_1 از متغیر X_2 که آن را با توجه به (؟؟) می‌توانیم به صورت زیر مطرح کنیم.

$$H. : \theta = \alpha_1 \alpha_2 \quad V.S. \quad H_1 : \theta \neq \alpha_1 \alpha_2 \quad (51)$$

می‌دانیم که اگر آزمون به صورت

$$\begin{cases} H. : \theta \in A. \\ H_1 : \theta \in A_1 \end{cases}$$

و A کل فضای پارامتر باشد، آن‌گاه نسبت درست‌نمایی به صورت زیر است که معمولاً برای تعیین ناحیه بحرانی به کار می‌رود.

$$L = \frac{\max_{\theta \in A} L(\theta)}{\max_{\theta \in A_1} L(\theta)} < K < 1$$

توزیع L را در حالت کلی نمی‌توان به کمک $f(x; \theta)$ پیدا کرد، در عمل اغلب به جای آماره L ، آماره $\ln L$ را به کار می‌برند. تحت فرض $H.$ ، با توجه به $r = \dim A - \dim A_1 > 0$ ، ثابت می‌شود که

$$-2 \ln L \stackrel{d}{=} \chi^2(r)$$

یعنی $-2 \ln L$ با $\chi^2(r)$ به‌طور مجانبی (برای نمونه‌های بزرگ) هم‌توزیع است [۷]. با استفاده از خاصیت جمع‌پذیری توزیع خی‌دو یعنی

فرض کنید $X_1, \dots, X_r$ ، متغیر تصادفی مستقل باشند به‌طوری

که $X_i \sim \chi^2(n_i)$ و $i = 1, \dots, r$ آن‌گاه

$$Y = \sum_{i=1}^r X_i \sim \chi^2_{\sum_{i=1}^r n_i}$$

می‌توانیم از تعریف نسبت درست‌نمایی استاندارد که به صورت زیر است در این آزمون استفاده نماییم

$$2[\ln L_{SNBP}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\theta}) - \ln L_{SNBP}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3)] \rightarrow \chi^2_1$$

آزمون دوم:

$$H. : \theta = 0 \quad V.S. \quad H_1 : \theta > 0 \quad (52)$$

اگر $\theta = 0$ باشد توزیع به $LSBP$ تبدیل می‌شود.

چون فرض صفر در این آزمون در مرز تعریف θ قرار دارد نسبت درست‌نمایی به کار نمی‌رود. با استفاده از قضیه سوم از مقاله [۱۰] خواهیم داشت

$$2[\ln L_{SNBP}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3, \hat{\theta}) - \ln L_{SNBP}(\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \hat{\alpha}_3)] \rightarrow 1/2 + 1/2 \chi^2_1$$

۴ تحلیل داده‌ها

۱.۴ تحلیل داده‌های شبیه‌سازی شده برای برآورد

درست‌نمایی ماکسیم و دومرحله‌ای

در این زیربخش یک نمونه تصادفی با اندازه ۳۰ از توزیع $SNBP(1, 1, 1, 1)$ را با استفاده از (؟؟) تولید می‌کنیم. این نمونه را در جدول ۱ نشان داده‌ایم. سپس به وسیله روش درست‌نمایی ماکسیم و روش دومرحله‌ای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و θ را برآورد نموده و با هم مقایسه می‌کنیم. در ابتدا باید مطمئن شویم که داده‌ها از توزیع $SNBP(1, 1, 1, 1)$ بوده و تحلیل‌های کولموگوروف-اسمیرنوف^۹ ما قابل اطمینان است (برای این کار می‌توان از آزمون نیکویی برازش کولموگوروف استفاده کرد) [۲].

اکنون با توجه به آنچه در بخش ۳ گفته شد به برآورد $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و θ با روش درست‌نمایی ماکسیم می‌پردازیم. چون چهار معادله، چهار مجهول به‌دست آمده فاقد جواب صریح است از روش‌های تکرار و نرم‌افزار استفاده می‌کنیم

$$\begin{aligned} \hat{\theta} &= 0.7545 & \hat{\alpha}_1 &= 0.6333 \\ \hat{\alpha}_2 &= 1/0.304 & \hat{\alpha}_3 &= 1/7864 \end{aligned}$$

^۹Kolmogorov-Smirnov

یکبار دیگر نمونه تولید شده به اندازه ۳۰ را با توزیع $SNBP(1, 1, 1, 1)$ که در جدول ۱ نمایش داده‌ایم در نظر می‌گیریم.

$$\hat{\theta} = 0.7185$$

برای استفاده از روش دومرحله‌ای نخست با ماکسیمم کردن

$g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ همان‌گونه که در بخش ۳ توضیح دادیم، α_2 و α_3 را برآورد می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\hat{\alpha}_1 = 0.6333 \quad \hat{\alpha}_2 = 1/0.304$$

$$\hat{\alpha}_3 = 1/7864$$

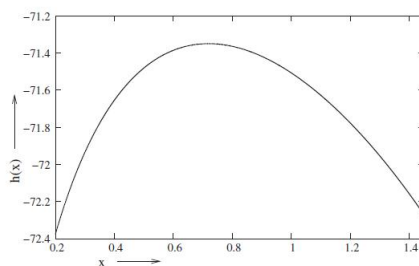
مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی در روش درست‌نمایی ماکسیمم برابر $-71/349$ است و مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی در روش دومرحله‌ای برابر با $-71/353$ است. همان‌گونه که مشاهده می‌شود روش دومرحله‌ای کمی بسته‌تر از روش درست‌نمایی می‌باشد.

چون مدل ما دومتغیره است فقط یک مقدار برای θ به دست می‌آید و نمی‌توانیم از روش سازگاری برآورد ۱.۲ استفاده کنیم، اما فاصله اطمینان خودگردان‌ساز برای پارامترهای $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ و θ به ترتیب $(0.8224, 0.3938, 0.5273, 1/5055)$ ، $(0.7110, 2/7110, 0.9328, 0.3434)$ و $(0.9328, 1/0.936)$ می‌باشد [۹].

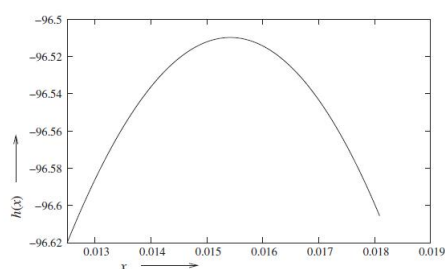
اکنون باید با ماکسیمم کردن $h(x)$ را برآورد کنیم. اما به دلیل ساختار پیچیده، $h(x)$ موقعی به راحتی ماکسیمم می‌شود که تک‌مدی باشد به همین دلیل نمودار آن را رسم می‌کنیم. نمودار $h(x)$ را در شکل ۱ نشان داده‌ایم. همان‌گونه که مشاهده می‌شود تک‌مدی است. اکنون می‌توان به راحتی از $h(x)$ لگاریتم گرفت

جدول ۱. اعداد شبیه‌سازی شده برای X_1 و X_2

شماره	X_1	X_2	شماره	X_1	X_2	شماره	X_1	X_2
۱	۰/۲۵۲	۸/۴۰۰	۲	۱/۱۰۵	۰/۴۵۸	۳	۰/۴۲۷	۱/۶۰۲
۴	۱۲/۴۹۱	۲/۳۸۳	۵	۰/۲۶۰	۰/۱۰۶	۶	۰/۲۴۰	۱/۷۶۹
۷	۴/۸۸۸	۰/۷۵۸	۸	۰/۸۷۰	۰/۵۷۲	۹	۰/۰۳۶	۰/۲۵۴
۱۰	۱/۵۳۷	۰/۰۲۳	۱۱	۱/۵۰۸	۰/۵۳۵	۱۲	۰/۲۳۹	۱/۴۱۲
۱۳	۰/۱۷۳	۰/۰۱۱	۱۴	۱/۰۹۰	۱/۲۷۸	۱۵	۶/۰۰۲	۰/۰۱۷
۱۶	۰/۸۹۷	۲/۰۳۲	۱۷	۰/۶۹۰	۰/۱۳۸	۱۸	۱/۸۸۳	۰/۳۹۸
۱۹	۰/۹۶۰	۰/۲۵۷	۲۰	۰/۵۶۱	۰/۵۷۳	۲۱	۵/۳۷۰	۰/۳۲۵
۲۲	۰/۱۶۷	۰/۲۶۰	۲۳	۱۳/۶۰۲	۰/۳۶۴	۲۴	۳/۹۲۲	۰/۹۳۸
۲۵	۰/۱۳۲	۰/۵۴۷	۲۶	۰/۶۰۳	۰/۱۰۲	۲۷	۰/۲۲۶	۰/۴۸۱
۲۸	۰/۱۴۳	۰/۷۷۹	۲۹	۰/۶۴۳	۰/۰۷۱	۳۰	۰/۳۴۹	۱/۵۸۶



شکل ۱. نمودار $h(x)$ برای داده‌های شبیه‌سازی شده

شکل ۲. نمودار $h(x)$ برای داده‌های واقعی

جدول ۲. دو اندازه‌گیری واقعی برای ۳۰ صفحه مختلف

شماره	ضربه	نوسان	شماره	ضربه	نوسان	شماره	ضربه	نوسان
۱	۱۸۸۹	۱۶۵۱	۲	۲۴۰۳	۲۰۴۸	۳	۲۱۱۹	۱۷۰۰
۴	۱۶۴۵	۱۶۲۷	۵	۱۹۷۶	۱۹۱۶	۶	۱۷۱۲	۱۷۱۳
۷	۱۹۴۳	۱۶۸۵	۸	۲۱۰۴	۱۸۲۰	۹	۲۹۸۳	۲۷۹۴
۱۰	۱۷۴۵	۱۶۰۰	۱۱	۱۷۱۰	۱۵۹۱	۱۲	۲۰۴۶	۱۹۰۷
۱۳	۱۸۴۰	۱۸۴۱	۱۴	۱۸۶۷	۱۶۸۵	۱۵	۱۸۵۹	۱۶۴۹
۱۶	۱۹۵۴	۲۱۴۹	۱۷	۱۳۲۵	۱۱۷۰	۱۸	۱۴۱۹	۱۳۷۱
۱۹	۱۸۲۸	۱۶۳۴	۲۰	۱۷۲۵	۱۵۹۴	۲۱	۲۲۷۶	۲۱۸۹
۲۲	۱۸۹۹	۱۶۱۴	۲۳	۱۶۳۳	۱۵۱۳	۲۴	۲۰۶۱	۱۸۶۷
۲۵	۱۸۵۶	۱۴۹۳	۲۶	۱۷۲۷	۱۴۱۲	۲۷	۲۱۶۸	۱۸۹۶
۲۸	۱۶۵۵	۱۶۷۵	۲۹	۲۳۲۶	۲۳۰۱	۳۰	۱۴۹۰	۱۳۸۲

۲.۴ تحلیل داده‌های واقعی برای برآورد ماکسیم کنیم. نتایج زیر به دست می‌آید.

درست‌نمایی ماکسیم و دومرحله‌ای

$$\hat{\alpha}_1 = ۰/۰۳۲۱ \quad \hat{\alpha}_2 = ۰/۰۲۹۲$$

$$\hat{\alpha}_3 = ۱۸/۳۴۳۸$$

برای برآورد کردن θ نیاز به ماکسیم کردن $h(x)$ است. برای این کار نخست نمودار $h(x)$ را رسم می‌کنیم که شکل ۲ آن را نمایش می‌دهد.

همان‌گونه که مشاهده می‌شود نمودار $h(x)$ تک‌مدی است، پس به آسانی می‌توان ماکسیم آن را یافت. نخست از آن لگاریتم گرفته و سپس نسبت به θ مشتق می‌گیریم و مساوی صفر قرار می‌دهیم و معادله را حل می‌کنیم. نتیجه زیر به دست می‌آید.

$$\hat{\theta} = ۰/۰۱۵۴$$

مقدار لگاریتم تابع درست‌نمایی ماکسیم هم برابر با $-۹۶/۵۰۹۸$ خواهد شد. فاصله اطمینان خودگردان‌ساز برای پارامترهای α_1

برای این کار از یک مجموعه داده شامل دو اندازه‌گیری متفاوت استفاده می‌کنیم، ضربه و ارتعاش سی صفحه مختلف. اندازه اول ضربه موجی است که به صفحه وارد شده است و اندازه دوم ارتعاش و لرزش حاصل از آن. اصل این مجموعه داده متعلق به ویلیام گالیگان است و گزارش آن در جدول ۲ نمایش داده شده است [۵].

اکنون با استفاده از روش دومرحله‌ای به برآورد پارامترها می‌پردازیم. همان‌گونه که قبلاً گفتیم برای به دست آوردن برآورد پارامترهای α_1 ، α_2 و α_3 باید تابع $g(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ را

۵ نتیجه گیری

در این مقاله، نخست تعریف تابع مفصل را مرور کرده و مزیت‌های آن را بیان کردیم، سپس یادآور شدیم که با کمک روش دومرحله‌ای می‌توان پارامترهای مجهول توابع چندمتغیره‌ای را که توابع مفصلشان موجود است به آسانی و با محاسبات کمتری به دست آورد. دو روش برای آزمودن سازگاری برآورد تابع مفصل چندمتغیره بررسی گردید. توزیع پارتو دومتغیره سانکاران-نایر به عنوان مثال مطرح شد و دو مجموعه داده، یکی شبیه‌سازی شده و دیگری واقعی را تحلیل کردیم تا مقایسه‌ای عملی بین برآورد دومرحله‌ای و برآورد درست‌نمایی انجام گیرد.

α_1, α_2 و θ به ترتیب $(0/0.181, 0/0.403)$ ، $(0/0.196, 0/0.446)$ و $(0/0.123, 0/0.185)$ است. حال آزمون استقلال ۱.۳ را انجام می‌دهیم. آماره آزمون برابر با $0/884$ می‌شود. p -مقدار هم برابر با $0/7$ است پس ما نمی‌توانیم فرض صفر را رد کنیم. به عبارت بهتر توابع حاشیه‌ای از یکدیگر مستقل هستند. پس دو متغیر تصادفی مستقل به مدل $SNBP$ ترجیح دارد و دیگر نیازی به برآورد ماکسیمم درست‌نمایی بر اساس داده‌های واقعی موجود در جدول ۲ نمی‌باشد.

مراجع

[۱] رضایی، ص، و طهماسبی، ر، (۱۳۹۰)، شبیه‌سازی آماری، انتشارات سری شار، تهران.

- [2] Conover, W.J, (1980), *Practical nonparametric statistics*, 2nd ed, John Wiley Sons, INC.
- [3] Joe, H, (1997), *Multivariate Model and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, London.
- [4] Joe, H, (2005), Asymptotic efficiency of two-stage estimation method for copula-based models, *Journal of Multivariate Analysis*, **94**, 401–419.
- [5] Johnson, R.A, and Wiechern, D.W, (1992), *Applied Multivariate Statistical Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [6] Lindley, D.V, and Singpurwalla, N.D, (1986), Multivariate distribution for the life lengths of a system sharing a common environment, *Journal of Applied Probability*, **23**, 418–431.
- [7] Mood, A. M, Graybill, F. A, and Boes, D.C, (1974), *Introduction to the theory of statistics*, McGraw-Hill, Inc.
- [8] Sankaran, P.G, and Nair, N.U, (1993), A bivariate Pareto model and its applications to reliability, *Naval Research Logistics*, **40**, 1013–1020.
- [9] Sankaran, P.G, and Kundu, D, (2012), A bivariate Pareto model, *Statistics: A Journal of Theoretical and Applied Statistics*, **iFirst**, 1–15.
- [10] Self, S.G, and Liang, K.L, (1987), Asymptotic properties of the maximum likelihood estimators and likelihood ratio test under non-standard conditions, *Journal of the American Statistical Association*, **82**, 605–610.

- [11] Xu, J.J, (1996), *Statistical modeling and inference for multivariate and longitudinal discrete response data*, PhD thesis, Department of Statistics, University of British Columbia.