

مقایسه دو آزمون درجه آزادی تقریبی و بوت استرپ پارامتری در مدل تحلیل واریانس دوطرفه نامتعادل ناهمگن

فهیمة برومندی^۱، محمود خراتی کوپائی^۲ و جواد بهبودیان^۳

تاریخ دریافت: ۱۳۹۵/۲/۱۲

تاریخ پذیرش: ۱۳۹۵/۸/۱

چکیده:

چنانچه در مدل تحلیل واریانس دوطرفه فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد، برای بررسی اثر دو عامل روی متغیر پاسخ، از آزمون F کلاسیک استفاده می‌شود. اما در اکثر مسائل کاربردی، فرض برابری واریانس‌ها برقرار نیست. در سال‌های اخیر، برای بررسی اثر عامل‌ها در حالت نابرابری واریانس‌ها، آزمون‌های مختلفی پیشنهاد شده است. در این مقاله ضمن معرفی دو آزمون درجه آزادی تقریبی و بوت استرپ پارامتری، با مطالعه شبیه‌سازی، عملکرد این دو آزمون را از نظر توان و خطای نوع اول مورد ارزیابی قرار می‌دهیم. نتایج شبیه‌سازی نشان می‌دهد که هر دو آزمون در کنترل خطای نوع اول عملکرد خوبی دارند و از نظر توان آزمون، اختلاف ناچیزی با یکدیگر دارند. از لحاظ محاسبات، روش بوت استرپ پارامتری بر اساس شبیه‌سازی بوده، زمان‌بر ماست؛ در حالی که روش درجه آزادی تقریبی از لحاظ استفاده در عمل ساده‌تر است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل واریانس دوطرفه ناهمگن، بوت استرپ پارامتری، درجه آزادی تقریبی، توزیع T^2 -هتلینگ.

۱ مقدمه

معنی‌داری ۰/۰۵، هنگامی که با افزایش اندازه نمونه در خانه‌ها واریانس خانه‌ها نیز افزایش یابد، اندازه خطای آزمون F کمتر از ۰/۰۵ و هنگامی که با افزایش اندازه نمونه در خانه‌ها واریانس خانه‌ها کاهش یابد، اندازه خطای آزمون F بیشتر از ۰/۰۵ است. به این ترتیب سؤالی که مطرح می‌شود این است که آزمون مناسب برای مدل تحلیل واریانس دوطرفه نامتعادل ناهمگن کدام است؟ در ادامه به مرور آزمون‌های پیشنهادی در سال‌های اخیر می‌پردازیم.

جیمز [۳] و یوهانسن [۴] هر یک آزمون‌هایی تقریبی پیشنهاد کردند که طبق مطالب ارائه‌شده به وسیله یاناکگی‌هارا و یوان [۹] و کریشنامورتی و لو [۵]، این دو آزمون خطای نوع اول را کنترل نمی‌کنند. علاوه بر این ویلکاکس [۸] به تعمیم آزمون جیمز پرداخت. کراچکف [۶] بر اساس شبیه‌سازی، آزمون تقریبی معرفی کرد. آناندا و ویراهاندی [۱] آزمون F تعمیم‌یافته بر اساس مفهوم p -مقدار تعمیم‌یافته ارائه کردند.

مدل تحلیل واریانس دوطرفه برای بررسی اثر دو عامل روی متغیر پاسخ به کار می‌رود. این مدل به‌طور گسترده در زیست‌شناسی، فیزیولوژی، فیزیک و علوم آزمایشگاهی کاربرد دارد. در یک مدل تحلیل واریانس دوطرفه هنگامی که اندازه نمونه در خانه‌های جدول برابر و فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد برای بررسی معنی‌داری اثرهای دو عامل از آزمون F کلاسیک استفاده می‌شود. در متون آماری نشان داده شده است که آزمون F در این شرایط خواص مطلوبی دارد لیمان [۷]. فوجیکوشی [۲] نشان داد در حالتی که فرض برابری واریانس‌ها برقرار باشد اما اندازه نمونه در خانه‌ها یکسان نباشد، آزمون F همچنان عملکرد خوبی دارد. اما در اکثر مسائل کاربردی، فرض همگنی واریانس‌ها برقرار نیست. در این شرایط، آزمون F خطای نوع اول را کنترل نمی‌کند و باعث نتایج گمراه‌کننده‌ای می‌شود. ژانگ [۱۰] نشان داد در سطح

^۱ دانشجوی دکتری، دانشگاه شیراز

^۲ دانشیار گروه آمار، دانشگاه شیراز

^۳ استاد گروه آمار، دانشگاه شیراز

تیماری، نمونه تصادفی n_{ij} تایی در دسترس است. برای $k = 1, 2, \dots, n_{ij}$ مشاهدات نمونه تصادفی با y_{ijk} نشان داده می شود که از مدل

$$y_{ijk} = \mu_{ij} + \epsilon_{ijk}, \quad \epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_{ij}^2),$$

$$i = 1, \dots, a; \quad j = 1, \dots, b; \quad k = 1, \dots, n_{ij} \quad (1)$$

پیروی می کند، که در آن μ_{ij} و σ_{ij}^2 به ترتیب میانگین و واریانس j امین ترکیب تیماری اند. در مدل با اثر ثابت، میانگین j امین ترکیب تیماری به صورت

$$\mu_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} \quad (2)$$

است، که در آن μ میانگین کل، α_i اثر اصلی سطح i ام عامل A ، β_j اثر اصلی سطح j ام عامل B ، γ_{ij} اثر متقابل بین سطح i ام عامل A و سطح j ام عامل B را نشان می دهد. در نتیجه می توان مدل را به صورت

$$y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \epsilon_{ijk}; \quad \epsilon_{ijk} \sim N(0, \sigma_{ij}^2) \quad (3)$$

بازنویسی کرد. همه این پارامترها شناسایی ناپذیرند و نیازمند شرایط شناسایی هستند. فرض کنید دنباله ای از وزن های w_{ij} $u_i v_j$ در دسترس باشد که در آن u_i و v_j مثبت و $\sum_{i=1}^a u_i = \sum_{j=1}^b v_j = 1$ است. شرایط شناسایی

$$\sum_{i=1}^a w_i \alpha_i = 0,$$

$$\sum_{j=1}^b w_{.j} \beta_j = 0,$$

$$\sum_{i=1}^a w_{ij} \gamma_{ij} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, b-1$$

$$\sum_{j=1}^b w_{ij} \gamma_{ij} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, a-1 \quad (4)$$

را در نظر بگیرید، که در آن $w_{i.} = \sum_{j=1}^b w_{ij}$ و $w_{.j} = \sum_{i=1}^a w_{ij}$ است.

برآوردگرهای ناریب میانگین و واریانس j امین ترکیب تیماری به ترتیب با $\hat{\mu}_{ij}$ و $\hat{\sigma}_{ij}^2$ نشان داده می شوند و برابری

هر یک از این سه آزمون، گرچه خطای نوع اول را کنترل می کند، بر اساس شبیه سازی است و برای اجرا پیچیده و زمان بر است. ژانگ [۱۰] آزمون با درجه آزادی تقریبی ارائه کرد که به اختصار ADF^۴ نامیده می شود. آماره این آزمون تحت فرض صفر به طور تقریبی دارای توزیع F است که فقط یکی از درجه های آزادی آن با استفاده از رابطه ساده بر اساس مشاهدات برآورد می شود. آزمون ADF مزایایی دارد از جمله اینکه تحت تبدیل $\tilde{y}_{ijk} = \lambda y_{ijk} + \theta$ ناورد است و می توان همه آزمون های مربوط به مدل تحلیل واریانس دوطرفه نظیر اثر ثابت، اثر متقابل و آزمون های مقابله^۵ را به وسیله آن انجام داد. ژانگ [۱۰] با استفاده از مطالعات شبیه سازی نشان داد آزمون ADF از نظر خطای نوع اول و توان تجربی بهتر از آزمون F کلاسیک عمل می کند.

ژو و همکاران [۱۱] آزمون با روش بوت استرپ پارامتری ارائه کردند که به اختصار PB^۶ نامیده می شود و در آن نرخ خطای نوع اول و توان آزمون با استفاده از شبیه سازی مونته کارلویی برآورد شده است. ژو و همکاران [۱۱] با استفاده از مطالعات شبیه سازی نشان دادند که آزمون PB از نظر توان و خطای نوع اول بهتر از آزمون F تعمیم یافته عمل می کند.

تاکنون مقایسه ای بین دو آزمون ADF و PB انجام نشده است. در این مقاله با استفاده از مطالعات شبیه سازی، عملکرد دو آزمون ADF و PB را از نظر نرخ خطای نوع اول و توان آزمون مورد ارزیابی قرار می دهیم. در بخش ۲ در ابتدا ضمن معرفی مدل تحلیل واریانس دوطرفه، دو آزمون ADF و PB معرفی می شوند. در بخش ۳ مطالعه شبیه سازی، عملکرد دو آزمون از نظر توان و خطای نوع اول ارزیابی می شود. در انتها، بخش ۵ به بحث و نتیجه گیری اختصاص خواهد یافت.

۲ معرفی آزمون ها

مدل تحلیل واریانس دوطرفه با عامل های A و B را که هر یک به ترتیب دارای a و b سطح هستند در نظر بگیرید. تعداد کل ترکیب های تیماری ab است. فرض کنید برای $i = 1, 2, \dots, a$ و $j = 1, 2, \dots, b$ در j امین ترکیب

^۴ approximate degree of freedom

^۵ contrast

^۶ parametric bootstrap

۱.۲ آزمون ADF

با

آماره آزمون ADF در بررسی معنی داری اثر متقابل به صورت

$$T = (\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\mu}})^T (\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{C}_{ab}^T)^{-1} (\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\mu}}) \quad (۸)$$

است، که در آن $\hat{\boldsymbol{\mu}}$ و $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ به صورت

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_{11}, \dots, \hat{\mu}_{1b}, \dots, \hat{\mu}_{a1}, \dots, \hat{\mu}_{ab}]^T$$

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{11}^2 \cdot n_{11}, \dots, \hat{\sigma}_{1b}^2 \cdot n_{1b}, \dots, \hat{\sigma}_{a1}^2 \cdot n_{a1}, \dots, \hat{\sigma}_{ab}^2 \cdot n_{ab})$$

است. در واقع آزمون ADF این بر اساس است که تحت فرض صفر، توزیع آماره T به وسیله توزیع T^2 -هتلینگ با درجه های آزادی q و $\hat{d}$ تقریب زده می شود که از رابطه

$$\hat{d} = \frac{\frac{q(q+1)}{2}}{\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (n_{ij} - 1)^{-1} \hat{\delta}_{ij}^2} \quad (۹)$$

به دست می آید، که در آن $\hat{\delta}_{ij} = \frac{\hat{\sigma}_{ij}^2}{n_{ij}} \mathbf{C}_{ij}^T (\mathbf{C}_{ab}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}\mathbf{C}_{ab}^T)^{-1} \mathbf{C}_{ij}$ ؛ و $\mathbf{C}_{ij}$ ، (i, j) امین ستون ماتریس $\mathbf{C}_{ab}$ است. به این ترتیب به طور تقریبی داریم:

$$\frac{(\hat{d} - q + 1)T}{q\hat{d}} \sim F_{(q, \hat{d}-q+1)}. \quad (۱۰)$$

در نتیجه فرض صفر هنگامی رد می شود که داشته باشیم:

$$\frac{(\hat{d} - q + 1)T}{q\hat{d}} > F_{(q, \hat{d}-q+1)}(\alpha). \quad (۱۱)$$

۲.۲ آزمون PB

روش بوت استرپ پارامتری شامل نمونه گیری از مدل های برآورد شده است که نمونه ها یا آماره نمونه از مدل پارامترهای جایگزین شده با برآوردشان تولید می شوند. برای بررسی معنی داری اثر متقابل به روش بوت استرپ پارامتری الگوریتم زیر اجرا می شود:

۱. در ابتدا برای بردارهای معلوم $\hat{\boldsymbol{\mu}} = [\hat{\mu}_{11}, \hat{\mu}_{12}, \dots, \hat{\mu}_{ab}]^T$

$\mathbf{r} = [n_{11}, n_{12}, \dots, n_{ab}]$ و $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\hat{\sigma}_{11}^2, \hat{\sigma}_{12}^2, \dots, \hat{\sigma}_{ab}^2]$

مقدار مشاهده شده $\hat{s}_1$ از رابطه

$$\tilde{s}_1 = \hat{\boldsymbol{\mu}} \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} (\mathbf{I} - \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{x} (\mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} \mathbf{x})^{-1} \times \mathbf{x}^T \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}}) \hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-\frac{1}{2}} \hat{\boldsymbol{\mu}} \quad (۱۲)$$

$$\hat{\mu}_{ij} = n_{ij}^{-1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} y_{ijk},$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^2 = (n_{ij} - 1)^{-1} \sum_{k=1}^{n_{ij}} (y_{ijk} - \hat{\mu}_{ij})^2. \quad (۵)$$

در مدل تحلیل واریانس دوطرفه علاقه مندیم آزمون کنیم که

$$H_{.A} : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_a = 0,$$

$$H_{.B} : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_b = 0,$$

$$H_{OAB} : \gamma_{11} = \dots = \gamma_{1b} = \dots = \gamma_{a1} = \dots = \gamma_{ab} = 0. \quad (۶)$$

که دو فرضیه اول، عدم اثر اصلی و فرضیه سوم عدم اثر متقابل بین دو عامل را بررسی می کند. با در نظر گرفتن بردارهای u و v به صورت

$$\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_a]^T,$$

$$\mathbf{v} = [v_1, v_2, \dots, v_b]^T,$$

$$\boldsymbol{\mu} = [\mu_{11}, \dots, \mu_{1b}, \dots, \mu_{a1}, \dots, \mu_{ab}]^T$$

و با توجه به شرایط شناسایی (۴)، فرضیه های بالا را در نماد گذاری ماتریسی می توان به صورت

$$H_{.A} : \mathbf{C}_{a\mu} = 0,$$

$$H_{.B} : \mathbf{C}_{b\mu} = 0,$$

$$H_{.AB} : \mathbf{C}_{ab\mu} = 0 \quad (۷)$$

بازنویسی نمود، که در آن

$$\mathbf{C}_a = (\mathbf{I}_{a-1}, -\mathbf{1}_{a-1})[(\mathbf{I}_a - \mathbf{1}_a \mathbf{u}^T) \otimes \mathbf{v}^T]$$

$$\mathbf{C}_b = (\mathbf{I}_{b-1}, -\mathbf{1}_{b-1})[\mathbf{u}^T \otimes (\mathbf{I}_b - \mathbf{1}_b \mathbf{v}^T)]$$

$$\mathbf{C}_{ab} = [\mathbf{I}_{a-1}, -\mathbf{1}_{a-1})(\mathbf{I}_a - \mathbf{1}_a \mathbf{u}^T)]$$

$$\otimes [(\mathbf{I}_{b-1}, -\mathbf{1}_{b-1})(\mathbf{I}_b - \mathbf{1}_b \mathbf{v}^T)]$$

و $\mathbf{I}_r$ ماتریس همانی مرتبه r ، $\mathbf{1}_r$ بردار r بعدی با مؤلفه های برابر با ۱ و $\otimes$ نماد ضرب کرونکر است. در ادامه فقط به معرفی آماره آزمون ADF و PB در بررسی معنی داری اثر متقابل می پردازیم.

و هنگامی که γ غیر صفر است تحت فرض مقابل توان آزمون محاسبه می شود. شایان ذکر است که در محاسبات آزمون ADF از دنباله وزن های برابر، یعنی $u_i = \frac{1}{a}$ و $v_j = \frac{1}{b}$ استفاده و با ۱۰۰۰۰ بار تکرار شبیه سازی مونت کارلویی فرایند، خطای نوع اول و توان برآورد شده است. در آزمون PB شبیه سازی دومرحله ای را به کار می بریم. برای سطح معنی داری α و ترکیبات مختلف پارامترهای n ، σ^2 و γ ، با ۵۰۰۰ بار تکرار شبیه سازی مونت کارلو، هر بار، بردار $\hat{\mu}^T$ تولید و $\hat{\sigma}_1$ در رابطه (۱۲) برای هر یک از بردارهای تولید شده محاسبه می شود. سپس برای هر یک از $\hat{\sigma}_1$ ها با ۱۰۰۰۰ بار تکرار بوت استرپ ($B = 10000$)، مقدار p - مقدار با توجه به مراحل ذکر شده در قسمت قبل برآورد می شود. در این ۵۰۰۰ بار تکرار شبیه سازی، میانگین تعداد دفعاتی که p - مقدار کمتر از سطح معنی داری α می باشد، هنگامی که γ صفر یا غیر صفر است، به ترتیب نرخ خطای تجربی نوع اول و توان تجربی برآورد می شود. شایان ذکر است که در هر دو آزمون سطح معنی داری ۰/۰۵ در نظر گرفته شده است. در جدول ۱ مقدار خطای نوع اول و توان تجربی دو آزمون ADF و PB برای ترکیبات مختلف پارامترهای n و σ^2 هنگامی که ($b = 3$ و $a = 2$)، ($b = 4$ و $a = 4$) و ($b = 3$ و $a = 6$) است محاسبه شده است. شایان ذکر است که w_r نشان دهنده برداری است که r بار تکرار می شود.

$$n_1 = (15, 15, 20, 20, 25, 25);$$

$$n_2 = (15, 18, 21, 24, 27, 30);$$

$$n_3 = (4, 8, 12, 20);$$

$$n_4 = (11, 11, 11, 11);$$

$$n_5 = (15, 15, 15, 15, 15, 15, 20, 20, 20, 20, 20, 20, 25, 25, 25, 25, 25);$$

$$n_6 = (15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25,$$

$$26, 27, 28, 29, 30, 31, 32);$$

$$\sigma_1^2 = (0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, 4, 0, 5, 1);$$

$$\sigma_2^2 = (0, 3, 0, 9, 0, 4, 0, 7, 0, 5, 1);$$

$$\sigma_3^2 = (1, 1, 1, 1);$$

$$\sigma_4^2 = (4, 3, 2, 1);$$

$$\sigma_5^2 = (0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 0, 3, 0, 3, 0, 4, 0, 4,$$

به دست می آوریم، که در آن x^- نشان دهنده وارون تعمیم یافته x است و $\hat{\Sigma}$ و x به صورت زیر هستند:

$$\hat{\Sigma} = \text{diag}(\hat{\sigma}_{11}^2, \hat{\sigma}_{12}^2, \dots, \hat{\sigma}_{ab}^2, n_{ab})$$

$$x = (\mathbf{1}_{ab}, \mathbf{I}_a \otimes \mathbf{1}_b, \mathbf{1}_a \otimes \mathbf{I}_b)$$

$$\hat{\sigma}_{ij}^{2*} \sim \hat{\sigma}_{ij}^2 X_{n_{ij}-1}^2(n_{ij}-1) \text{ و } \hat{\mu}_{ij}^* \sim N(0, \hat{\sigma}_{ij}^2, n_{ij})$$

را تولید و $\hat{\sigma}_1^*$ را مشابه رابطه (۱۲) به صورت

$$\hat{\sigma}_1^* = \hat{\mu}^{*T} \hat{\Sigma}^{*-1} x (x^T \hat{\Sigma}^{*-1} x)^{-1} x^T \hat{\Sigma}^{*-1} \hat{\mu}^* \quad (13)$$

به دست می آوریم که در آن $\hat{\mu}^* = [\hat{\mu}_{11}^*, \hat{\mu}_{12}^*, \dots, \hat{\mu}_{ab}^*]^T$ و

$$\hat{\sigma}^* = \text{diag}(\hat{\sigma}_{11}^2, \dots, \hat{\sigma}_{ab}^2, n_{ab}) \text{ است.}$$

۳. مرحله ۲ را B بار تکرار می کنیم و $\hat{\sigma}_{11}^*, \dots, \hat{\sigma}_{TB}^*$ به دست می آید.

$$4. \widehat{p} = (\hat{\sigma}_{1b}^* > \hat{\sigma}_{11}^*; b = 1, \dots, B). B$$

۳ مطالعه شبیه سازی

در این بخش، بر اساس مطالعات شبیه سازی، عملکرد دو آزمون ADF و PB با استفاده از دو ملاک نرخ خطا و توان آزمون برای بررسی معنی داری اثر متقابل، مورد مقایسه قرار می گیرند. برای این منظور، نیازی به تولید داده های مستقیم نیست؛ بلکه فقط کافی است در هر ترکیب تیماری، میانگین و واریانس نمونه تولید شود؛ زیرا هر دو آزمون ADF و PB با استفاده از میانگین و واریانس نمونه در ترکیب های تیماری اجرا می شوند. برای ترکیبات مختلف بردار اندازه نمونه به صورت $n = [\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{ab}]^T$ بردار میانگین $\mu = [\mu_{11}, \mu_{12}, \dots, \mu_{ab}]^T$ و بردار واریانس $\sigma^2 = [\sigma_{11}^2, \sigma_{12}^2, \dots, \sigma_{ab}^2]$ که در اختیار است، بردار میانگین و واریانس نمونه در خانه ها، $\hat{\mu} = [\hat{\mu}_{11}, \hat{\mu}_{12}, \dots, \hat{\mu}_{ab}]^T$ و $\hat{\sigma}^2 = [\hat{\sigma}_{11}^2, \hat{\sigma}_{12}^2, \dots, \hat{\sigma}_{ab}^2]$ به گونه ای تولید می شوند که در آن ها $\hat{\mu}_{ij} \sim N(\mu_{ij}, \sigma_{ij}^2, n_{ij})$ و $\hat{\sigma}_{ij}^2 \sim (X_{n_{ij}-1}^2(n_{ij}-1) \sigma_{ij}^2)$ است. با توجه به رابطه (۲) و این که دو آزمون ADF و PB ناوردای مکانی هستند، بدون از دست دادن کلیت مسئله، $\mu_{ij} = \gamma_{ij}$ قرار داده شده است، که در نتیجه هنگامی که $\gamma = (\gamma_{11}, \dots, \gamma_{ab})$ مجموعه میانگین ها برای تولید داده های تصادفی، صفر باشد فرض صفر برقرار است و می توان نرخ خطای تجربی نوع اول را به دست آورد

PB، هنگامی که $\gamma = 272$ است، به ترتیب برابر با $0/385$ و $0/364$ می باشد که با تغییر 272 به 372 توان و آزمون به ترتیب به $0/816$ و $0/830$ تغییر می کند.

در حالت کلی، با توجه به جدول ۱ درمی یابیم که هر دو آزمون ADF و PB خطا را به خوبی کنترل می کنند و از نظر توان اختلاف ناچیزی با یکدیگر دارند.

۴ بحث و نتیجه گیری

در این مقاله در مدل تحلیل واریانس دوطرفه نامتعادل، هنگامی که فرض برابری واریانس ها برقرار نیست به معرفی دو آزمون درجه آزادی تقریبی و بوت استرپ برای بررسی معنی داری اثر متقابل پرداخته شد. در مطالعه شبیه سازی ملاحظه شد که هر دو آزمون ADF و PB خطای نوع اول را به خوبی کنترل می کنند و از نظر توان آزمون، اختلاف ناچیزی دارند. توان هر دو آزمون با افزایش اندازه نمونه در ترکیب های تیماری و مجموعه میانگین ها برای تولید داده های تصادفی افزایش می یابد و همچنین با افزایش واریانس در ترکیب های تیماری، توان هر دو آزمون رو به کاهش است. لیکن محاسبات با روش بوت استرپ پارامتری بر اساس شبیه سازی بوده، زمان بر است؛ در حالی که محاسبات با روش تقریب درجه آزادی به دلیل استفاده از تقریب ساده می شود و سرعت می یابد. بنابراین استفاده از روش تقریب درجه آزادی در عمل توصیه می شود.

$$(0, 5, 0, 5, 0, 6, 0, 6, 0, 7, 0, 7, 0, 8, 0, 8, 0, 9, 1);$$

$$\sigma_6^2 = (0, 9, 0, 8, 0, 7, 0, 6, 0, 5, 0, 4, 0, 3, 0, 2, 0, 1);$$

$$\gamma_1 = (0, 0, -0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 4);$$

$$\gamma_2 = (0, 0, 0, 0, -0, 1, -0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 2, 0, 2, 0,$$

$$3, 0, 3, 0, 4, 0, 4, 0, 5, 0, 5, 0, 6, 0, 6, 0, 7, 0, 7).$$

با توجه به جدول ۱، با افزایش اندازه نمونه در ترکیب های تیماری، توان هر دو آزمون ADF و PB رو به افزایش است. به عنوان مثال در $(a = 2$ و $b = 3)$ برای پارامترهای $\gamma = 272$ و $\sigma^2 = \sigma_6^2$ توان دو آزمون ADF و PB هنگامی که اندازه نمونه n_1 است به ترتیب برابر با $0/694$ و $0/699$ می باشد که با تغییر n_1 به n_2 توان دو آزمون به ترتیب به $0/762$ و $0/762$ افزایش می یابد. همچنین با افزایش واریانس در ترکیب های تیماری، توان هر دو آزمون ADF و PB رو به کاهش است. برای مثال در $(a = 6$ و $b = 3)$ برای پارامترهای $\gamma = 372$ و $n = n_6$ توان دو آزمون ADF و PB هنگامی که بردار واریانس σ_5^2 است به ترتیب برابر با $0/956$ و $0/957$ می باشد، که با تغییر σ_5^2 به σ_6^2 توان دو آزمون به ترتیب به $0/642$ و $0/638$ کاهش می یابد. علاوه بر این با افزایش γ مجموعه میانگین ها برای تولید داده های تصادفی، توان هر دو آزمون نیز افزایش می یابد. به عنوان مثال در $(a = 4$ و $b = 4)$ برای پارامترهای $\sigma_4^2 = \sigma^2$ و $n = n_3$ توان دو آزمون ADF و

جدول ۱. مقدار خطای نوع اول و توان تجربی دو آزمون ADF و PB

$a = ۲$ و $b = ۳$						
n	$\sigma^۲$	Test	$\gamma_1 = (\gamma_{11}, ..., \gamma_{۲۳})$			
			۰	γ_1	$۲\gamma_1$	$۳\gamma_1$
n _۱	$\sigma_1^۲$	ADF	۰/۰۴۹	۰/۲۱۴	۰/۶۹۴	۰/۹۷۰
		PB	۰/۰۵۲	۰/۲۱۰	۰/۶۹۹	۰/۹۶۵
	$\sigma_۲^۲$	ADF	۰/۰۴۹	۰/۱۶۷	۰/۵۵۰	۰/۹۰۲
		PB	۰/۰۵۵	۰/۱۶۲	۰/۵۵۴	۰/۸۹۸
n _۲	$\sigma_1^۲$	ADF	۰/۰۵۲	۰/۲۴۰	۰/۷۶۲	۰/۹۸۷
		PB	۰/۰۴۶	۰/۲۴۶	۰/۷۶۲	۰/۹۸۲
	$\sigma_2^۲$	ADF	۰/۰۵۱	۰/۱۸۶	۰/۶۱۴	۰/۹۳۳
		PB	۰/۰۵۰	۰/۱۸۴	۰/۶۱۸	۰/۹۳۱
$a = ۴$ و $b = ۶$						
n	$\sigma^۲$	Test	$\gamma_۲ = (\gamma_{۱۱}, ..., \gamma_{۴۴})$			
			۰	$\gamma_۲$	$۲\gamma_۲$	$۳\gamma_۲$
n _۲	$\sigma_۲^۲$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۱۷۱	۰/۷۱۳	۰/۹۸۸
		PB	۰/۰۴۶	۰/۱۶۲	۰/۶۹۸	۰/۹۸۸
	$\sigma_۴^۲$	ADF	۰/۰۵۱	۰/۱۱۵	۰/۳۸۵	۰/۸۳۰
		PB	۰/۰۴۴	۰/۹۶	۰/۳۶۴	۰/۸۱۶
n _۴	$\sigma_۲^۲$	ADF	۰/۰۴۸	۱۸۰	۰/۶۹۴	۰/۹۸۰
		PB	۰/۴۴	۰/۱۷۶	۰/۶۸۹	۰/۹۷۸
	$\sigma_۴^۲$	ADF	۰/۰۴۶	۰/۱۲۵	۰/۴۷۰	۰/۸۸۰
		PB	۰/۰۴۷	۰/۱۱۹	۰/۴۶۴	۰/۸۷۰
$a = ۲$ و $b = ۳$						
n	$\sigma^۲$	Test	$\gamma_۳ = (\gamma_{۱۱}, ..., \gamma_{۶۳})$			
			۰	$\gamma_۳$	$۲\gamma_۳$	$۳\gamma_۳$
n _۵	$\sigma_۵^۲$	ADF	۰/۰۵۴	۰/۱۲۵	۰/۵۲۷	۰/۹۱۰
		PB	۰/۰۵۲	۰/۱۳۶	۰/۵۳۰	۰/۹۱۳
	$\sigma_۶^۲$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۰۸۸	۰/۲۴۸	۰/۵۶۶
		PB	۰/۰۵۱	۰/۰۹۴	۰/۲۴۷	۰/۵۷۲
n _۶	$\sigma_۵^۲$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۱۶۳	۰/۶۰۶	۰/۹۵۶
		PB	۰/۰۴۵	۰/۱۵۳	۰/۵۹۶	۰/۹۵۷
	$\sigma_۶^۲$	ADF	۰/۰۵۰	۰/۰۹۷	۰/۲۹۳	۰/۶۴۲
		PB	۰/۰۴۶	۰/۰۸۹۸	۰/۲۸۹	۰/۶۳۸

مراجع

- [1] Ananda, M. M. and Weerahandi, S. (1997). Two-way ANOVA with unequal cell frequencies and unequal variances, *Statistica Sinica*, **7**, 631-646.
- [2] Fujikoshi, Y. (1993). Two-Way ANOVA models with unbalanced data, *Discrete Mathematics*, **116**, 315-334.
- [3] James, G. S. (1954). Tests of linear hypotheses in univariate and multivariate analysis when the ratios of the population variances are unknown, *Biometrika*, **41**, 19-43.
- [4] Johansen, S. (1980). The Welch-James approximation to the distribution of the residual sum of squares in a weighted linear regression, *Biometrika*, **67**, 85-95.
- [5] Krishnamoorthy, K. and Lu, F. (2010). A parametric bootstrap solution to the MANOVA under heteroscedasticity, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **80**, 873-887.
- [6] Krutchkoff, R. G. (1989). Two-way fixed effects analysis of variance when the error variances may be unequal, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **32**, 177-183.
- [7] Lehmann, E. L. (1986). *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley, New York.
- [8] Wilcox, R. R. (1989). Adjusting for unequal variances when comparing means in one-way and two-way fixed effects ANOVA model, *Journal of Educational and Behavioral Statistics*, **14**, 269-278.
- [9] Yanagihara, H. and Yuan, K. H. (2005). Three approximate solutions to the multivariate Behrens-Fisher problem, *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, **34**, 975-988.
- [10] Zhang, J. T. (2011). An approximate degrees of freedom test for heteroscedastic two-way ANOVA, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 336-346.
- [11] Xu, L. W., Yang, F. Q., Abula, A., and Qin, S. (2013). A parametric bootstrap approach for two-way ANOVA in presence of possible interaction with unequal variances. *Journal of Multivariate analysis*, **115**, 172-180.