

توزیع NH تعمیم یافته نمایی شده

میلااد قربان نژاد محلی^۱، اکبر اصغرزاده^۲

چکیده:

ناداراجاه و حقیقی در سال ۲۰۱۱ یک تعمیم جدید از توزیع نمایی به نام توزیع NH را به عنوان یک مدل جایگزین برای مدل های گاما، وایبل و نمایی توانی شده معرفی نمودند. در این مقاله، تعمیمی از توزیع NH به نام توزیع NH تعمیم یافته نمایی شده معرفی و مورد مطالعه قرار می گیرد. معرفی مدل و کاربرد مدل پیشنهادی در تحلیل داده های واقعی مورد بحث قرار خواهد گرفت. همچنین کارایی روش برآورد درستنمایی ماکزیمم را برای محاسبه ی پارامترهای مجهول به کمک شبیه سازی مونت کارلو مورد ارزیابی قرار می دهیم.

واژه های کلیدی: توزیع NH، تابع نرخ شکست، توزیع نمایی، توزیع وایبل، توزیع نمایی توانی شده.

۱ معرفی توزیع

را برای داده ها فراهم می کند. تابع توزیع و تابع چگالی توزیع NH به صورت زیر می باشند:

$$G(x) = 1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}, \alpha > 0, \lambda > 0, \quad (3)$$

$$g(x) = \alpha\lambda(1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}, \quad (4)$$

برای مطالعه ی بیشتر درباره ی توزیع NH و برخی از تعمیم های آن می توان به [۱] و [۹] مراجعه کرد. در این مقاله با جایگذاری تابع توزیع و تابع چگالی توزیع NH به ترتیب در روابط (۱) و (۲)، تعمیمی جدید از توزیع NH به نام توزیع NH تعمیم یافته ی نمایی شده (EGNH)^۴ معرفی می شود که تابع توزیع و تابع چگالی آن به صورت زیر می باشند:

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x; \alpha, \lambda, \beta, \gamma) \\ &= [1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^\gamma, x > 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\lambda\beta\gamma(1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\} \\ &\times [1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^{\gamma-1}. \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن $\lambda > 0$ پارامتر مقیاس و $\alpha > 0$ ، $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ پارامترهای شکل می باشند.

در سال های گذشته تعمیم های متفاوتی از توزیع های پیوسته ارائه شده است. بر اساس یک تابع توزیع پایه ای $G(x)$ ، کوردیرو و دی کاسترو [۳] یک کلاس جدید از توزیع ها به نام توزیع تعمیم یافته نمایی شده با دو پارامتر اضافی $\beta > 0$ و $\gamma > 0$ را معرفی نمودند که تابع توزیع و تابع چگالی آن به ترتیب به صورت زیر می باشند:

$$F(x) = \{1 - [1 - G(x)]^\beta\}^\gamma, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \beta\gamma[1 - G(x)]^{\beta-1} \\ &\times \{1 - [1 - G(x)]^\beta\}^{\gamma-1} g(x), \end{aligned} \quad (2)$$

که در آن $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ تابع چگالی توزیع پایه ای می باشد. افزودن دو پارامتر β و γ باعث می شود که توزیع جدید انعطاف پذیری بیشتری در مقایسه با توزیع پایه ای $G(x)$ داشته باشد. در این مقاله با در نظر گرفتن $G(x)$ به عنوان تابع توزیع NH، تعمیمی از توزیع NH معرفی خواهد شد.

توزیع NH اولین بار توسط ناداراجاه و حقیقی در سال ۲۰۱۱ معرفی شد [۹]. آنها نشان دادند که در برخی موارد، این توزیع در مقایسه با توزیع های وایبل، گاما و نمایی توانی شده برازش بهتری

^۱ کارشناس ارشد دانشگاه مازندران

^۲ عضو هیئت علمی دانشگاه مازندران

^۳Cordeiro and de Castro

^۴Exponentiated Generalized Nadarajah-Haghighi

در ادامه با مطالعه رفتار تابع چگالی و تابع نرخ شکست این توزیع، نشان داده خواهد شد که توزیع جدید در مقایسه با توزیع NH از انعطاف پذیری بیشتری برخوردار بوده و لذا می تواند برای مدل بندی انواع مختلف از داده ها به کار رود.

□

۲ شکل تابع چگالی و نرخ خطر

تابع بقا و تابع نرخ شکست توزیع EGNH به ترتیب به صورت

زیر می باشند:

$$s(x) = 1 - F(x) = 1 - [1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^\gamma,$$

$$\begin{aligned} h(x) = \frac{f(x)}{s(x)} &= \alpha\lambda\beta\gamma(1 + \lambda x)^{\alpha-1} \\ &\times \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\} \\ &\times \frac{[1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^{\gamma-1}}{1 - [1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^\gamma} \end{aligned} \quad (V)$$

شکل ۱، نمودار تابع چگالی توزیع EGNH را به ازای پارامترهای $\gamma = 0.5, 1.5, 4, 10$ و $\lambda = \beta = 1$ و $\alpha = 0.5, 0.9, 1.5$ نشان می دهد. از روی شکل مشاهده می شود که اگر $0 < \gamma < 1$ باشد تابع چگالی نزولی است و اگر $\gamma > 1$ باشد تابع چگالی به صورت چوله تک مدی می باشد. با توجه به تابع چگالی (۶) داریم:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \begin{cases} \infty & \gamma < 1, \\ \alpha\lambda\beta & \gamma = 1, \\ 0 & \gamma > 1, \end{cases}$$

و $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$. همچنین مشتق لگاریتم تابع چگالی عبارت است از:

$$\begin{aligned} \frac{d \log f(x)}{dx} &= \frac{(\alpha - 1)\lambda - \alpha\lambda\beta(1 + \lambda x)^\alpha}{1 + \lambda x} \\ &+ \frac{\alpha\lambda\beta(\gamma - 1)(1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha}}{1 - e^{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha}}. \end{aligned}$$

از حل معادله $\frac{d \log f(x)}{dx} = 0$ می توان مد توزیع جدید را پیدا کرد. تابع چگالی EGNH برای $\alpha < 1$ و $\gamma < 1$ محدب لگاریتمی است و برای $\alpha > 1$ و $\gamma > 1$ مقعر لگاریتمی است.

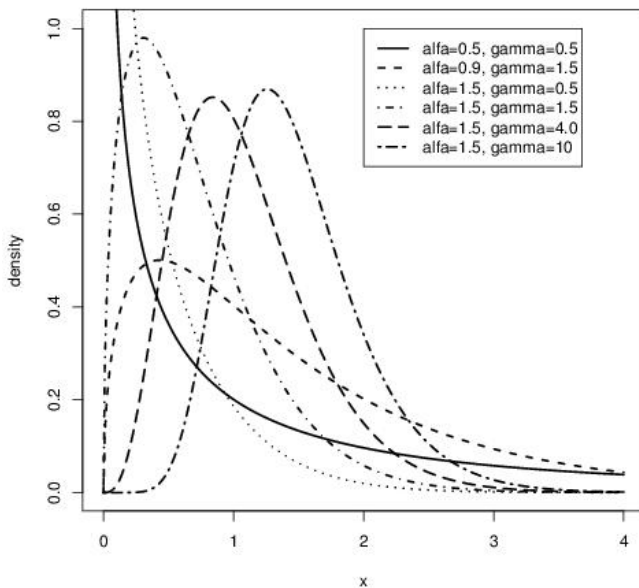
اثبات. فرض کنید $z = (1 + \lambda x)^\alpha$. لذا برای $x > 0$ ، $z > 1$ می باشد. بنابراین تابع چگالی EGNH بر حسب z به صورت زیر تبدیل خواهد شد:

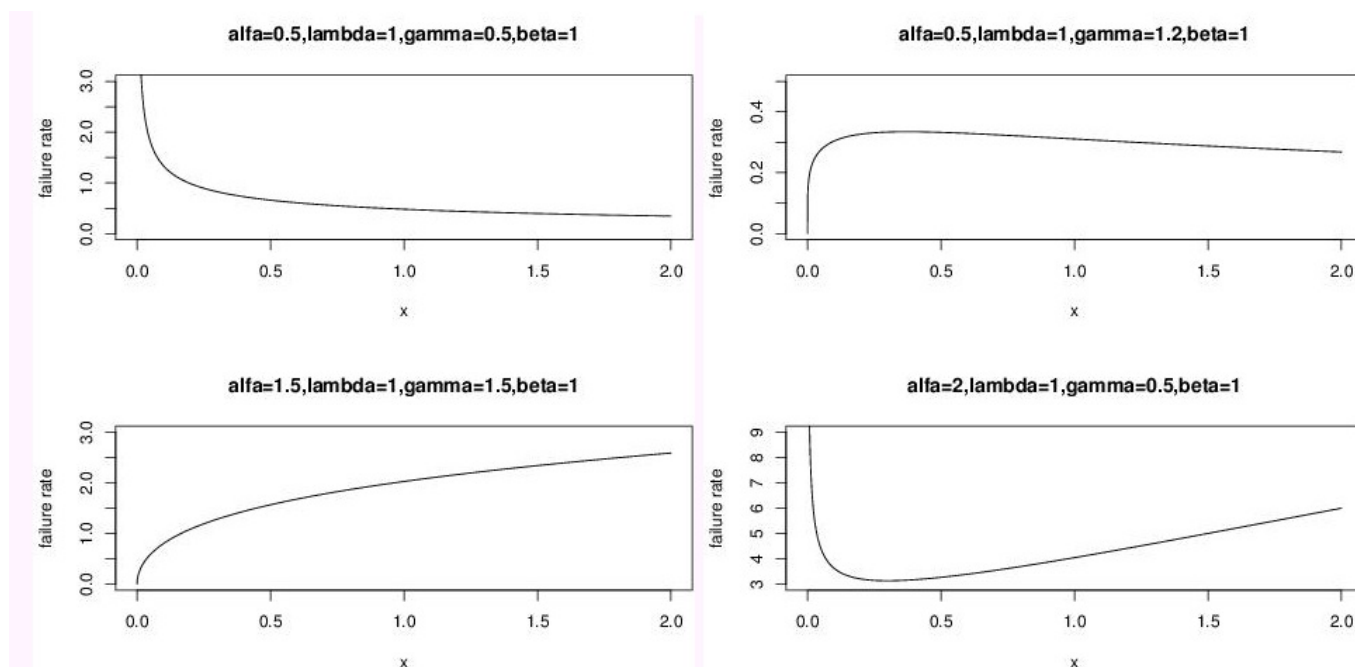
$$\xi(z) = f\left(\frac{z^{1/\alpha} - 1}{\lambda}\right) = \alpha\lambda\beta\gamma \frac{z^{(\alpha-1)/\alpha} \exp(\beta - \beta z)}{[1 - \exp(\beta - \beta z)]^{1-\beta}},$$

با دو بار مشتق گیری از $\log[\xi(z)]$ داریم:

$$\frac{d^2 \log[\xi(z)]}{dz^2} = - \left[\frac{(\alpha - 1)}{\alpha z^2} + \frac{(\gamma - 1)\beta^2 e^{\beta - \beta z}}{[1 - e^{\beta - \beta z}]^2} \right].$$

شکل ۱. نمودار تابع چگالی توزیع EGNH به ازای پارامترهای مختلف





شکل ۲. نمودار تابع نرخ خطر توزیع EGNH.

همه ی نمودارها $\lambda = 1$ فرض شده است. همان طور که مشاهده می شود تابع نرخ شکست توزیع EGNH می تواند صعودی، نزولی، وانی شکل و یا وانی شکل معکوس باشد. این در حالیست که تابع نرخ شکست توزیع NH فقط می تواند نزولی، صعودی و یا ثابت باشد. از اینرو توزیع EGNH در مقایسه با توزیع NH انعطاف پذیرتر بوده و لذا می تواند برای برازش انواع مختلف داده ها بکار رود.

تابع چندک و میانه توزیع EGNH به ترتیب به صورت زیر می باشند:

$$Q(p) = F^{-1}(p) = \frac{1}{\lambda} \{ [1 - \beta^{-1} \log(1 - p^{1/\gamma})]^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \text{Median}(X) = F^{-1}(1/2) &= \frac{1}{\lambda} \{ [1 + (\gamma\beta)^{-1} \log(2) \\ &- \log(2^{1/\gamma} - 1)]^{\frac{1}{\alpha}} - 1 \}. \end{aligned}$$

۳ خواص گشتاوری

فرض کنید $X \sim EGNH(\alpha, \lambda, \beta, \gamma)$ ، آنگاه $\square$ -امین گشتاور $\square$ عبارت است از:

برای مطالعه ی رفتار تابع نرخ شکست توزیع EGNH به لم زیر، که به لم گلاسر^۵ معروف است نیاز داریم.

لم ۱.۲. [۴]: فرض کنید $\pi(x) = -\frac{d}{dx} \log f(x)$

۱. اگر به ازای همه ی $x > 0$ ، $\pi'(x) < 0$ باشد آنگاه تابع نرخ شکست به طور یکنواخت نزولی می باشد.

۲. اگر به ازای همه ی $x > 0$ ، $\pi'(x) > 0$ باشد آنگاه تابع نرخ شکست به طور یکنواخت صعودی می باشد.

قضیه ۲.۲. تابع نرخ شکست توزیع EGNH برای $\alpha > 1$ و $\gamma > 1$ صعودی و برای $\alpha < 1$ و $\gamma < 1$ نزولی و برای $\alpha = \gamma = 1$ ثابت می باشد.

اثبات. با استفاده از نتایج بدست آمده از قضیه ۲ داریم:

$$\pi'(x) = -\frac{d^2 \log[\xi(z)]}{dz^2} = \left[\frac{(\alpha - 1)}{\alpha z^2} + \frac{(\gamma - 1)\beta^2 e^{\beta - \beta z}}{[1 - e^{\beta - \beta z}]^2} \right].$$

بنابراین با توجه به لم گلاسر، تابع نرخ شکست برای $\alpha > 1$ و $\gamma > 1$ صعودی و برای $\alpha < 1$ و $\gamma < 1$ نزولی می باشد و همچنین برای $\alpha = \gamma = 1$ ثابت می باشد. $\square$

شکل ۲، تابع نرخ شکست توزیع EGNH را به ازای پارامترهای مختلف نشان می دهد. با توجه به اینکه λ پارامتر مقیاس است، در

^۵Glaser Lemma

که در آن $\Gamma(a, x) = \int_x^\infty z^{a-1} e^{-z} dz$ تابع گاما ناقص می باشد. بنابراین s -امین گشتاور X عبارت است از:

$$\mu'_s = \gamma \lambda^{-s} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^s \binom{\gamma-1}{j} \binom{s}{i} \frac{(-1)^{s+j-i} e^{\beta(j+1)}}{\beta^{\frac{i}{\alpha}} (j+1)^{\frac{i}{\alpha}+1}} \times \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, \beta(j+1)\right). \quad (9)$$

همچنین s -امین گشتاور ناقص X عبارت است از:

$$\begin{aligned} T_s(y) &= E(X^s | X > y) \\ &= \int_y^\infty x^s f(x) dx \\ &= \alpha \lambda \beta \gamma \int_y^\infty x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \frac{\exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}}{[1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^{1-\gamma}} dx \\ &= \alpha \lambda \beta \gamma \int_y^\infty x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} \\ &\quad \times (-1)^j e^{\beta(j+1)[1-(1+\lambda x)^\alpha]} dx \\ &= \alpha \lambda \beta \gamma \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \\ &\quad \times \int_y^\infty x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{\beta(j+1)[1-(1+\lambda x)^\alpha]} dx \\ &= \alpha \lambda \beta \gamma \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j e^{\beta(j+1)} \\ &\quad \times \int_y^\infty x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{-\beta(j+1)(1+\lambda x)^\alpha} dx. \end{aligned}$$

توجه کنید که با تغییر متغیر $z = \beta(j+1)(1+\lambda x)^\alpha$ ، می توان $T_s(y)$ را بر حسب تابع گامای ناقص نوشت.

۴ میانگین انحرافات

میانگین انحراف از میانگین $\delta_1(X)$ و میانگین انحراف از میانه $\delta_2(X)$ دو معیار پراکندگی می باشند که به ترتیب به صورت زیر تعریف میشوند:

$$\delta_1(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - \mu| f(x) dx,$$

$$\delta_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} |x - M| f(x) dx,$$

که در آن $\mu = E(X)$ و $M = \text{Median}(X)$ می باشد.

می توان نشان داد که $\delta_1(x) = 2\mu F(\mu) - 2H(\mu)$

$$\begin{aligned} \mu'_s &= E(X^s) = \int_{-\infty}^{\infty} x^s f(x) dx \\ &= \alpha \lambda \beta \gamma \int_{-\infty}^{\infty} x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \frac{\exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}}{[1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^{1-\gamma}} dx. \end{aligned}$$

با توجه به بسط زیر

$$\begin{aligned} &[1 - \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\}]^{1-\gamma} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j e^{\beta j [1-(1+\lambda x)^\alpha]}, \end{aligned}$$

نتیجه می شود:

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \alpha \lambda \beta \gamma \int_{-\infty}^{\infty} x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j e^{\beta j [1-(1+\lambda x)^\alpha]} dx, \end{aligned}$$

از آنجائیکه عبارت داخل مجموع انتگرال پذیر می باشد لذا می توان جای انتگرال و مجموع را با هم عوض کرد بنابراین:

$$\begin{aligned} \mu'_s &= \alpha \lambda \beta \gamma \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j \int_{-\infty}^{\infty} x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} \\ &\quad \times \exp\{\beta - \beta(1 + \lambda x)^\alpha\} e^{\beta j [1-(1+\lambda x)^\alpha]} dx, \\ &= \alpha \lambda \beta \gamma \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\gamma-1}{j} (-1)^j e^{\beta(j+1)} \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{\infty} x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{-\beta(j+1)(1+\lambda x)^\alpha} dx. \end{aligned}$$

برای $s > 0$ صحیح و با انتخاب $y = \beta(j+1)(1+\lambda x)^\alpha$ داریم:

$$\begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\infty} x^s (1 + \lambda x)^{\alpha-1} e^{-\beta(j+1)(1+\lambda x)^\alpha} dx \\ &= \frac{1}{\alpha \lambda^s \beta (j+1)} \int_{\beta(j+1)}^{\infty} \left(\left(\frac{y}{\beta(j+1)} \right)^{1/\alpha} - 1 \right)^s e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\alpha \lambda^{s+1}} \int_{\beta(j+1)}^{\infty} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \frac{(-1)^{s-i}}{(\beta(j+1))^{\frac{i}{\alpha}+1}} y^{\frac{i}{\alpha}} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\alpha \lambda^{s+1}} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \frac{(-1)^{s-i}}{(\beta(j+1))^{\frac{i}{\alpha}+1}} \int_{\beta(j+1)}^{\infty} y^{\frac{i}{\alpha}} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{\alpha \lambda^{s+1}} \sum_{i=0}^s \binom{s}{i} \frac{(-1)^{s-i}}{(\beta(j+1))^{\frac{i}{\alpha}+1}} \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, \beta(j+1)\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} &= \frac{n}{\lambda} + (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \lambda x_i} \\ &- \alpha \beta \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} + \alpha \beta (\gamma - 1) \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} &= n + \frac{n}{\beta} - \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha - (\gamma - 1) \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{(1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha) e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma} = \frac{n}{\gamma} + \sum_{i=1}^n \log(1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}).$$

لذا برآوردگر درستنمایی ماکزیم θ یعنی $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^\top$ با استفاده از حل معادلات

$$\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \lambda} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \beta} = \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \gamma} = 0.$$

بدست می‌آید که می‌توان از روش های عددی برای حل این معادلات استفاده کرد.

توجه کنید که واریانس مجانبی برآوردهای درستنمایی ماکزیم با وارون کردن ماتریس اطلاع فیشر بدست می‌آید. ماتریس واریانس-کوواریانس بردار برآوردگر $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\lambda}, \hat{\beta}, \hat{\gamma})^\top$ می‌شود:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{\alpha\alpha} & \sigma_{\alpha\lambda} & \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\alpha\gamma} \\ \sigma_{\alpha\lambda} & \sigma_{\lambda\lambda} & \sigma_{\lambda\beta} & \sigma_{\lambda\gamma} \\ \sigma_{\alpha\beta} & \sigma_{\lambda\beta} & \sigma_{\beta\beta} & \sigma_{\beta\gamma} \\ \sigma_{\alpha\gamma} & \sigma_{\lambda\gamma} & \sigma_{\beta\gamma} & \sigma_{\gamma\gamma} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\lambda} & J_{\alpha\beta} & J_{\alpha\gamma} \\ J_{\alpha\lambda} & J_{\lambda\lambda} & J_{\lambda\beta} & J_{\lambda\gamma} \\ J_{\alpha\beta} & J_{\lambda\beta} & J_{\beta\beta} & J_{\beta\gamma} \\ J_{\alpha\gamma} & J_{\lambda\gamma} & J_{\beta\gamma} & J_{\gamma\gamma} \end{pmatrix}^{-1}_{\alpha=\hat{\alpha}, \lambda=\hat{\lambda}, \beta=\hat{\beta}, \gamma=\hat{\gamma}},$$

که در آن

$$J = \begin{pmatrix} J_{\alpha\alpha} & J_{\alpha\lambda} & J_{\alpha\beta} & J_{\alpha\gamma} \\ J_{\alpha\lambda} & J_{\lambda\lambda} & J_{\lambda\beta} & J_{\lambda\gamma} \\ J_{\alpha\beta} & J_{\lambda\beta} & J_{\beta\beta} & J_{\beta\gamma} \\ J_{\alpha\gamma} & J_{\lambda\gamma} & J_{\beta\gamma} & J_{\gamma\gamma} \end{pmatrix},$$

و $\delta_2(x) = \mu - 2H(M)$ که در آن

$$\begin{aligned} H(q) &= \int_0^q x f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x f(x) dx - \int_q^\infty x f(x) dx. \end{aligned}$$

با استفاده از اولین گشتاور و همچنین اولین گشتاور ناقص $\square$ داریم:

$$\begin{aligned} H(q) &= \gamma \lambda^{-1} \sum_{j=0}^\infty \sum_{i=0}^j \binom{\gamma-1}{j} \binom{1}{i} \frac{(-1)^{1+j-i} e^{\beta(j+1)}}{\beta^{\frac{1}{\alpha}} (j+1)^{\frac{1}{\alpha}+1}} \\ &\left\{ \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, \beta(j+1)\right) - \right. \\ &\left. \Gamma\left(\frac{i}{\alpha} + 1, \beta(j+1)(1 + \lambda p)^\alpha\right) \right\}, \end{aligned}$$

که با جایگذاری در $\delta_1(X)$ و $\delta_2(X)$ ، میانگین انحرافات بدست می‌آیند.

۵ برآورد پارامترها

در این بخش، برآورد پارامترهای توزیع EGNH با استفاده از روش درستنمایی ماکزیم بحث می‌شود. فرض کنید که $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ یک نمونه ی تصادفی به حجم n از توزیع $EGNH(\alpha, \lambda, \beta, \gamma)$ باشند و $\theta = (\alpha, \lambda, \beta, \gamma)^\top$ بردار پارامترها باشد. لگاریتم تابع درستنمایی برای θ بر حسب نمونه تصادفی فوق عبارت است از:

$$\begin{aligned} \ell(\theta) &= \log L(\alpha, \lambda, \beta) = n\beta + n \log(\alpha \lambda \beta \gamma) \\ &+ (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) - \beta \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \\ &+ (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \log(1 - \exp[\beta - \beta(1 + \lambda x_i)^\alpha]). \end{aligned} \quad (10)$$

با مشتق گیری از لگاریتم تابع درستنمایی نسبت به پارامترهای α, λ, β و γ داریم:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell(\theta)}{\partial \alpha} &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{i=1}^n \log(1 + \lambda x_i) \\ &- \beta \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) + \beta(\gamma - 1) \\ &\times \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}, \end{aligned}$$

ماتریس اطلاع فیشر می باشد و

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\lambda} &= -\frac{n}{\lambda^2} - (\alpha - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i^\gamma}{(1 + \lambda x_i)^\gamma} \\
&\quad - \alpha\beta(\alpha - 1) \sum_{i=1}^n x_i^\gamma (1 + \lambda x_i)^{\alpha-\gamma} \\
&\quad + \alpha^\gamma \beta(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n x_i^\gamma (1 + \lambda x_i)^{\alpha-\gamma} \\
&\quad \times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}} \\
&\quad - \alpha^\gamma \beta^\gamma (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n x_i^\gamma (1 + \lambda x_i)^{\gamma(\alpha-1)} \\
&\quad \times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{[1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}]^\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\beta\beta} &= -\frac{n}{\beta^2} - (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n (1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha)^\gamma \\
&\quad \times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{[1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}]^\gamma}
\end{aligned}$$

$$J_{\gamma\gamma} = -\frac{n}{\gamma^2}$$

$$J_{\gamma\alpha} = \beta \sum_{i=1}^n \frac{(1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}$$

$$J_{\gamma\lambda} = \alpha\beta \sum_{i=1}^n \frac{x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}$$

$$J_{\beta\gamma} = -\sum_{i=1}^n \frac{(1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha) e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}$$

توجه کنید که از روی ماتریس اطلاع فوق می توان فواصل اطمینان مجانبی را برای پارامترها تعیین کرد. به عنوان مثال یک فاصله اطمینان مجانبی با ضریب اطمینان $1 - \tau$ برای پارامتر α عبارت خواهد بود از $\hat{\alpha} \pm z_{\frac{\tau}{2}} \sqrt{\sigma_{\alpha\alpha}}$.

۶ شبیه سازی

در این بخش کارایی روش درستنمایی ماکزیمم به کمک شبیه سازی مونت کارلو مورد مطالعه قرار می گیرد. در این شبیه سازی نمونه هایی به اندازه n از توزیع EGNH تولید کرده و سپس برآوردهای درستنمایی ماکزیمم α و β و λ و γ را محاسبه نموده

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\alpha} &= -\frac{n}{\alpha^2} - \beta \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha [\log(1 + \lambda x_i)]^\gamma \\
&\quad + (\beta - 1)\beta(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \\
&\quad \times \frac{[\log(1 + \lambda x_i)]^\gamma e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\lambda} &= \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1 + \lambda x_i} - \beta \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^\alpha \\
&\quad - \alpha\beta \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} \log(1 + \lambda x_i) \\
&\quad + \beta(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} \\
&\quad \times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha} \{1 + \alpha \log(1 + \lambda x_i)\}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\alpha\beta} &= -\sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) \\
&\quad + (\gamma - 1) \sum_{i=1}^n (1 + \lambda x_i)^\alpha \log(1 + \lambda x_i) \\
&\quad \times \frac{e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}} \\
&\quad + \beta(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n (1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha) (1 + \lambda x_i)^\alpha \\
&\quad \times \frac{\log(1 + \lambda x_i) e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{[1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}]^\gamma}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_{\lambda\beta} &= -\alpha \sum_{i=1}^n x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} \\
&\quad + \alpha(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n \frac{x_i (1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}} \\
&\quad + \alpha\beta(\gamma - 1) \sum_{i=1}^n x_i (1 - (1 + \lambda x_i)^\alpha) \\
&\quad \times \frac{(1 + \lambda x_i)^{\alpha-1} e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}}{[1 - e^{\beta-\beta(1+\lambda x_i)^\alpha}]^\gamma}
\end{aligned}$$

ایم. جدول ۱ میانگین اریبی و جذر میانگین مربع خطای^۶ نظر گرفته شده است. از جدول ۱ مشاهده می شود که با افزایش $(\sqrt{MSE})$ برآوردها را در $R = 5000$ بار شبیه سازی نشان اندازه نمونه n همانطور که انتظار می رود میانگین اریبی هریک از می دهد. در این شبیه سازی مقادیر مختلف (n, α, γ) در نظر گرفته برآوردها کاهش می یابد و جذر میانگین مربعات خطای برآوردها شده است. حجم نمونه به اندازه ی (n) ۲۰۰ و ۴۰۰ می باشد و کم می شود.

$\alpha = 0.7, 1.7$ و $\gamma = 0.5, 1.5, 2$ می باشد و $\lambda = \beta = 1$ در

جدول ۱. میانگین برآورد و جذر میانگین مربعات خطا (در پرانتز) برای توزیع EGNH

$\hat{\gamma}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\lambda}$	$\hat{\alpha}$	γ	α
$n = 200$					
۰/۰۱۰۱(۰/۰۶۶۴)	۰/۳۱۳۰(۱/۰۴۹۳)	۰/۵۳۵۶(۱/۷۸۷۴)	۰/۰۰۸۹(۰/۱۸۴۲)	۰/۵	۰/۷
۰/۰۷۱۸(۰/۳۴۷۲)	۰/۱۹۸۶(۰/۷۴۴۳)	۰/۵۰۲۰(۱/۳۳۹۸)	۰/۰۴۱۰(۰/۱۴۶۶)	۱/۵	۰/۷
۰/۰۳۴۸(۰/۴۵۷۹)	۰/۲۴۹۷(۰/۷۹۲۱)	۰/۰۵۷۹(۰/۷۵۸۹)	۰/۰۰۲۹(۰/۱۵۱۴)	۲/۰	۰/۷
۰/۰۰۳۹(۰/۰۵۵۸)	۰/۲۸۳۷(۰/۶۳۲۸)	۰/۰۳۵۷(۰/۹۶۵۷)	۰/۵۴۴۹(۱/۳۲۹۰)	۰/۵	۱/۷
۰/۰۴۱۱(۰/۲۸۲۰)	۰/۳۱۲۷(۰/۶۵۳۹)	۰/۰۹۷۸(۰/۶۵۴۹)	۰/۳۲۴۱(۰/۷۴۸۳)	۱/۵	۱/۷
۰/۱۰۹۵(۰/۴۴۶۱)	۰/۴۳۵۳(۰/۸۰۱۰)	۰/۲۳۳۸(۰/۶۳۹۵)	۰/۴۴۹۹(۱/۱۱۲۶)	۲/۰	۱/۷
$n = 400$					
۰/۰۰۴۹(۰/۰۴۳۴)	۰/۲۲۹۳(۰/۷۷۲۳)	۰/۳۱۳۸(۱/۰۶۸۱)	۰/۰۰۵۹(۰/۱۱۸۶)	۰/۵	۰/۷
۰/۰۴۰۳(۰/۲۳۳۰)	۰/۱۶۳۵(۰/۵۷۶۸)	۰/۳۰۴۳(۰/۹۹۲۷)	۰/۰۰۷۶(۰/۱۰۴۶)	۱/۵	۰/۷
۰/۰۰۶۱(۰/۲۸۷۰)	۰/۱۷۸۷(۰/۵۲۵۸)	۰/۰۳۰۲(۰/۴۸۴۰)	۰/۰۰۲۷(۰/۱۰۵۵)	۲/۰	۰/۷
۰/۰۰۳۵(۰/۰۳۹۹)	۰/۲۳۶۰(۰/۵۲۱۱)	۰/۰۱۸۸(۰/۷۶۸۳)	۰/۳۶۸۶(۰/۸۴۶۹)	۰/۵	۱/۷
۰/۰۲۸۲(۰/۱۹۴۲)	۰/۲۳۹۷(۰/۵۱۵۹)	۰/۰۸۸۸(۰/۵۷۵۳)	۰/۲۳۰۶(۰/۵۵۴۲)	۱/۵	۱/۷
۰/۰۷۹۶(۰/۳۰۰۰)	۰/۴۲۲۸(۰/۷۷۵۹)	۰/۲۱۳۹(۰/۵۸۷۱)	۰/۴۱۹۶(۰/۹۶۰۸)	۲/۰	۱/۷

^۶Root Mean Square Error

۷ تحلیل داده های واقعی

$$F_{EE}(x) = (1 - e^{-\lambda x})^\alpha \quad x > 0.$$

در این بخش دو سری داده واقعی را در نظر گرفته و توزیع EGNH را به این دو سری داده ها برازش می دهیم. داده های جدول ۲، داده های مربوط به مدت زمان تعمیر قطعه ای از هواپیما می باشد که توسط یورنسن^۷ [۶] گزارش شده است. مجموعه داده های دوم در جدول ۳ قرار دارند که تعداد خرابی لاستیک های با قطر ۲۵-۱۰۰ سانتی متر می باشد که این داده ها در لاولس^۸ [۷] گزارش شده اند. به این مجموعه داده ها، توزیع NH تعمیم یافته نمایی شده (EGNH) و توزیع های وایبل نمایی شده (EW)، NH نمایی شده (ENH) [۸]، نمایی نمایی شده (EE)، وایبل انعطاف پذیر (FW) و توزیع NH را برازش نموده ایم. تابع توزیع مربوط به توزیع های وایبل نمایی شده، وایبل انعطاف پذیر، NH نمایی شده و نمایی نمایی شده به صورت زیر می باشند:

$$F_{EW}(x) = [1 - e^{-\lambda(x-\mu)^\alpha}]^\beta \quad x > \mu,$$

$$F_{FW}(x) = 1 - \exp\{-\exp(\alpha x - \beta/x)\} \quad x > 0,$$

$$F_{ENH}(x) = [1 - \exp\{1 - (1 + \lambda x)^\alpha\}]^\beta \quad x > 0,$$

۸ نتیجه گیری

در این مقاله با افزودن دو پارامتر شکل بتا و گاما به توزیع NH، تعمیمی از توزیع NH معرفی گردید. با توجه به اینکه توزیع جدید دارای نرخ شکست صعودی، نزولی، وانی شکل و وانی شکل معکوس است، این توزیع انعطاف پذیری بیشتری نسبت به توزیع NH دارد و لذا می تواند برای مدل بندی انواع مختلفی از داده ها بکار رود.

جدول ۲. مدت زمان تعمیر قطعه

۱/۰۰	۱/۰۰	۰/۸۰	۰/۸۰	۰/۷۰	۰/۷۰	۰/۷۰	۰/۶۰	۰/۶۰	۰/۵۰
۲/۰۰	۲/۰۰	۱/۵۰	۱/۵۰	۱/۵۰	۱/۵۰	۱/۳۰	۱/۱۰	۱/۰۰	۱/۰۰
۴/۷۰	۴/۵۰	۴/۰۰	۴/۰۰	۳/۳۰	۳/۰۰	۳/۰۰	۲/۷۰	۲/۵۰	۲/۲۰
۲۴/۵۰	۲۲/۰	۱۰/۲۰	۹/۰۰	۸/۸۰	۷/۵۰	۷/۰۰	۵/۴۰	۵/۴۰	۵/۰۰

جدول ۳. تعداد خرابی لاستیک

۱۴۶	۱۲۱	۹۸	۸۶	۷۶	۶۱	۴۲	۳۸	۲۰	۱۵
۲۵۱	۲۲۴	۲۲۰	۱۹۸	۱۸۰	۱۸۰	۱۷۶	۱۷۵	۱۵۷	۱۴۹
						۶۵۳	۳۲۵	۳۲۱	۲۸۲
								۲۶۴	

^۷ Jørgensen^۸ Lawless

جدول ۴. برآورد درستنمایی ماکزیمم، آزمون کولموگروف و p -value مربوط به آن و مقدار لگاریتم تابع درستنمایی برای داده های زمان تعمیر.

توزیع	برآوردها	K-S	p-value	لگاریتم درستنمایی
$EGNH(\alpha, \lambda, \beta, \gamma)$	(۰/۰۷۵۳، ۳۴/۶۲۷۲، ۱۱/۶۶۵۲، ۵۷/۷۳۳۳)	۰/۰۹۷۶	۰/۸۴۰۳	-۸۹/۴۱۸۳
$EW(\alpha, \lambda, \beta, \mu)$	(۰/۱۲۲۵، ۱۳/۵۶۲۳، ۱۲۵۴/۳۸۴۱، ۰/۲۵۶۹)	۰/۱۰۲۳	۰/۸۲۱۴	-۸۹/۷۲۳۶
$ENH(\alpha, \lambda, \beta)$	(۰/۲۴۲۹، ۳۱۹/۸۸۵۲، ۳۴/۲۲۲۶)	۰/۱۰۷۱	۰/۷۴۸۲	-۸۹/۸۱۴۲
$EE(\lambda, \delta)$	(۱/۱۱۳۸، ۰/۲۶۷۸)	۰/۱۵۸۴	۰/۲۶۸۴	-۹۵/۴۵۷۹
$FW(\alpha, \beta)$	(۰/۰۹۹۵، ۲/۱۴۴۶)	۰/۲۰۷۴	۰/۰۶۴۱	-۲۱۰/۸۵۵۵
$NH(\alpha, \lambda)$	(۰/۷۰۹۴، ۰/۴۵۵۶)	۰/۱۴۵۶	۰/۳۶۴۹	-۹۴/۷۴۵۰

جدول ۵. برآورد درستنمایی ماکزیمم، آزمون کولموگروف و p -value مربوط به آن و مقدار لگاریتم تابع درستنمایی برای داده های تعداد خرابی.

توزیع	برآوردها	K-S	p-value	لگاریتم درستنمایی
$EGNH(\alpha, \lambda, \beta, \gamma)$	(۱/۰۹۲۴، ۱/۲۹۱۶، ۰/۰۰۳۳، ۱/۵۸۲۴)	۰/۱۲۹۷	۰/۷۹۴۲	-۱۵۲/۴۳۷۳
$EW(\alpha, \lambda, \beta, \mu)$	(۰/۹۵۲۲، ۰/۰۸۷۴، ۲/۲۸۴۵، ۰/۱۴۵۹)	۰/۱۶۲۸	۰/۵۲۴۱	-۱۵۳/۶۴۲۳
$ENH(\alpha, \lambda, \beta)$	(۰/۸۶۵۴، ۰/۰۰۷۸، ۱/۲۲۰۳)	۰/۱۸۵۷	۰/۳۵۴۸	-۱۵۳/۹۴۶۶
$EE(\lambda, \delta)$	(۱/۸۸۳۸، ۰/۰۰۸۲)	۰/۱۴۵۰	۰/۶۶۹۳	-۱۵۲/۴۹۰۸
$FW(\alpha, \beta)$	(۰/۰۱۲۵، ۰/۶۷۱۸)	۰/۷۲۲۹	-۱۲۰۸/۹۶۵	-۴۱۲۹/۷۶۶
$NH(\alpha, \lambda)$	(۲/۸۸۷۹، ۰/۰۰۱۴)	۰/۱۴۴۷	۰/۶۷۱۸	-۱۵۳/۲۸۸۹

مراجع

- [۱] قربان نژاد محلی، م. (۱۳۹۴)، توزیع NH : برآوردیابی و تعمیم ها، پایان نامه کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه مازندران.
- [2] Bebbington, M., Lai, C.D., Zitikis, R., (2007). A flexible Weibull extension. *Reliability Engineering and System Safety*, 92, 719-726.
- [3] Cordeiro, G. M. & de Castro, M. (2011). A new family of generalized distributions, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 11, 1-27.
- [4] Glaser, R. E. (1980). Bathtub and Related Failure Rate Characterizations, *Journal of American Statistical Association*, 75, 667-672.

- [5] Johnson, N., Kotz and S., Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions* —Volume 1, second ed. Wiley, New York.
- [6] Jorgensen, B. (1982). Statistical Properties of the Generalized Inverse Gaussian Distribution. *Springer-Verlag*, New York.
- [7] Lawless .J. F. (2003). Statistical models and methods for lifetime data. *Wiley*, New York.
- [8] Lemonte, A. J. (2013). A new exponential-type distribution with constant, decreasing, increasing, upside-down bathtub and bathtub-shaped failure rate function. *Computational Statistics and Data Analysis* , 62 ,149-170 .
- [9] Nadarajah, S. and Haghighi, F. (2011). An extension of the exponential distribution. *Statistics*, 45, 543–558.