

## فاصله تحمل دوطرفه برای توزیع نمایی براساس رکوردها

مهران نقی زاده قمی<sup>۱</sup>، سید محمد تقی کامل میرمصطفائی<sup>۲</sup>، مریم وحیدیان<sup>۳</sup>

چکیده:

فاصله‌ی تحمل یک فاصله‌ی تصادفی است که با یک سطح اطمینان مشخص، نسبتی از جامعه‌ی مورد بررسی را در بر می‌گیرد و در بسیاری از زمینه‌های کاربردی از جمله قابلیت اعتماد و کنترل کیفیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. در این مقاله، فاصله‌ی تحمل دو طرفه را برای جامعه‌ی نمایی بر اساس داده‌های رکوردی به دست می‌آوریم. مثالی از داده‌های رکوردی واقعی ارائه شده است. در پایان، به کمک مطالعه‌ی شبیه‌سازی، دقت فاصله‌های تحمل ارائه شده را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

**واژه‌های کلیدی:** آماره‌های رکوردی، توزیع نمایی، فاصله‌ی تحمل.

### ۱ مقدمه

رسیدند. جیلک [۹] و جیلک و اکرم [۱۰] بسیاری از این مقالات را مطابق با نتایج کلی، نتایج ناپارامتری، نتایج مربوط به توزیع‌های نرمال یک متغیره و نرمال چند متغیره، نتایج مربوط به توزیع‌های نمایی، گاما، وایبل و سایر توزیع‌های پیوسته و گسسته دسته‌بندی نمودند. همچنین پاتیل [۱۴] در یک مقاله‌ی مروری، مجموعه‌ای بزرگ از نتایج به دست آمده در رابطه با فاصله‌های تحمل برای توزیع‌های گوناگون پیوسته و گسسته را گردآوری نمود. از جمله مقالاتی که به موضوع ساختن فاصله‌های تحمل برای توزیع نمایی پرداخته‌اند، می‌توان به گاتمن [۸]، گودمن و مدنسکی [۶]، گوئشر و همکاران [۷]، انگلهارد و بین [۴] و فرناندز [۵] اشاره کرد. اخیراً نقی‌زاده قمی و کیاپور [۱۲] و کیاپور و نقی‌زاده قمی [۱۱] به ترتیب کوتاهترین فاصله‌های تحمل کلاسیک و بی‌زی با کنترل چندک‌ها در دو دم توزیع نمایی را براساس داده‌های رکوردی و با استفاده از تکنیک اوون [۱۳] به دست آوردند. فرض کنید که  $X_1, X_2, \dots$  دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل با تابع توزیع تجمعی پیوسته  $F(x)$  و تابع چگالی احتمال  $f(x)$  باشد، در این صورت مشاهده‌ی  $X_j$  را یک رکورد بالا گوئیم هرگاه از همه‌ی مشاهدات ما قبل خود بزرگ‌تر باشد. فرض کنید  $R_m = \max\{X_1, \dots, X_m\}$  در این صورت  $R_1 \leq R_2 \leq \dots \leq R_m \leq \dots$  یک رکورد بالا هنگامی

فاصله‌های تحمل در بسیاری از زمینه‌های کاربردی مانند تحلیل بقا و کنترل کیفیت مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال در کنترل کیفیت، برای یک فرایند تولید، حدود مشخصه‌های فنی<sup>۴</sup> از قبل توسط مهندسان تعیین می‌گردند که این حدود باید مشخصه‌های محصولات تولیدی را در بر بگیرند. برای آن که متوجه شویم که چه نسبتی از این محصولات، در حدود مشخصه‌های فنی صدق می‌کنند، یافتن یک فاصله‌ی تحمل بر اساس نمونه‌ای از محصولات تولید شده می‌تواند مفید باشد. چنانچه این فاصله‌ی تحمل درون حدود مشخصه‌های فنی قرار گیرد، آن‌گاه با اطمینان معینی می‌توان نتیجه گرفت که حداقل درصد مشخصی از محصولات، مطابق با معیارهای مورد نظر تولید شده‌اند. فاصله‌های تحمل در مبحث نمونه‌گیری برای پذیرش، یکی دیگر از موضوعات کنترل کیفیت نیز دارای کاربرد هستند. لذا موضوع یافتن فاصله‌های تحمل از اهمیت بالایی برخوردار است. از جمله اولین تحقیقات در رابطه با این موضوع توسط ویلکس [۱۵] انجام گرفت. پس از آن، مقالات تحقیقاتی بسیاری در رابطه با ساختن فاصله‌های تحمل و سایر جنبه‌های این موضوع و کاربردهای آن در تاریخ علم آمار به ثبت

<sup>۱</sup>استادیار گروه آمار دانشگاه مازندران [m.naghizadeh@umz.ac.ir](mailto:m.naghizadeh@umz.ac.ir)

<sup>۲</sup>استادیار گروه آمار دانشگاه مازندران [m.mirmostafaei@umz.ac.ir](mailto:m.mirmostafaei@umz.ac.ir)

<sup>۳</sup>کارشناسی ارشد آمار از دانشگاه مازندران [vahidian\\_m@yahoo.com](mailto:vahidian_m@yahoo.com)

<sup>۴</sup>Specification limits

رخ می دهد که در دنباله ی  $R_m$  یک پرش داشته باشیم. به عبارت دیگر  $X_m$  یک رکورد بالا است اگر  $R_m > R_{m-1}$ . رکوردهای پایین نیز به طور مشابه تعریف می شوند. در این مقاله،  $m$ امین رکورد بالا را با  $R_m$  نشان می دهیم. توجه داشته باشید که اولین رکورد همان اولین مشاهده است یعنی  $R_1 = X_1$ . اگر  $R_1, R_2, \dots, R_m$  دنباله ی رکوردهای بالا مستخرج از توزیع  $F$  باشند، آن گاه تابع چگالی احتمال توام آن ها برابر است با

$$f_{R_1, \dots, R_m}(r_1, \dots, r_m) = f(r_m) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{f(r_i)}{1 - F(r_i)}. \quad (1)$$

همچنین تابع چگالی احتمال  $m$ امین رکورد،  $R_m$ ، به صورت زیر است

$$f_{R_m}(x) = \frac{[-\log \bar{F}(x)]^{m-1}}{(m-1)!} f(x), \quad (2)$$

که در آن  $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$  تابع بقا نام دارد. (رجوع کنید به آرنولد و همکاران، [۲]).

داده های رکوردی در مسائل گوناگونی نظیر هواشناسی، زلزله شناسی، وقایع ورزشی و تحقیقات مهندسی معدن و نفت دارای کاربرد هستند. همچنین ویژگی های آماره های رکوردی در مقالات متعددی مورد بررسی قرار گرفته است. برای جزئیات بیشتر در رابطه با آماره های رکوردی و کاربردهای آن، علاقه مندان می توانند به کتاب آرنولد و همکاران [۲] مراجعه نمایند.

در این مقاله، بر اساس رکوردهای مشاهده شده از توزیع نمایی یک پارامتری، یک فاصله ی تحمل دو طرفه با دم های برابر با استفاده از تکنیک گودمن و مدنسکی [۶] در بخش ۲ ارائه می شود. در بخش ۳ با ارائه مثالی به بررسی روش ذکر شده در مقاله می پردازیم. دقت فاصله ی تحمل مطرح شده را با انجام یک مطالعه ی شبیه سازی در بخش ۴ مورد بررسی قرار می دهیم. سرانجام در بخش ۵ به بحث و نتیجه گیری خواهیم پرداخت.

## ۲ فاصله ی تحمل دو طرفه در توزیع نمایی بر اساس رکوردها

در این بخش، یک فاصله ی تحمل دو طرفه با دم های برابر را بر اساس رکوردهای مشاهده شده از توزیع نمایی به دست می آوریم.

فرض کنید متغیر تصادفی  $X$  دارای توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  و با تابع چگالی احتمال زیر باشد

$$f(x; \theta) = \frac{1}{\theta} \exp(-\frac{x}{\theta}), \quad x > 0, \quad \theta > 0. \quad (3)$$

لم زیر برای به دست آوردن فاصله های تحمل در توزیع نمایی با داده های رکوردی بسیار مفید خواهد بود.

**لم ۲.۱** فرض کنید  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$  داده های رکوردی مشاهده شده از توزیع نمایی با تابع چگالی احتمال (۳) باشند. در این صورت:

الف. برآوردگر درستنمایی ماکسیمم  $\theta$  بر اساس  $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_m)$  برابر است با  $\hat{\theta} = \frac{R_m}{m}$ .

ب. کمیت  $\chi^2_{m, \hat{\theta}}$  دارای توزیع خی دو با  $2m$  درجه آزادی است، که در آن  $\hat{\theta} = \frac{R_m}{m}$ .

**اثبات** الف. با توجه به (۱)، تابع درستنمایی برابر است با

$$L(\theta | r_1, \dots, r_m) = \frac{1}{\theta^m} \exp(-\frac{r_m}{\theta}), \quad \theta > 0.$$

با مشتق گیری از تابع درستنمایی نسبت به  $\theta$  و بررسی مشتق دوم، اثبات کامل می شود.

ب. با قرار دادن تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی توزیع نمایی با پارامتر  $\theta$  در رابطه ی (۲)، به راحتی نتیجه می شود که  $R_m$  دارای توزیع گاما با پارامتر شکل  $m$  و پارامتر مقیاس  $\theta$  است و در نتیجه  $\frac{2R_m}{\hat{\theta}} = \chi^2_{m, \hat{\theta}}$  دارای توزیع خی دو با  $2m$  درجه آزادی، می باشد.

## ۱.۲ یافتن فاصله ی تحمل دوطرفه با دم های برابر

فاصله ی تصادفی  $(L, U)$  یک فاصله ی تحمل دو طرفه با سطح پوشش  $\beta$  و سطح اطمینان  $1 - \alpha$  است هرگاه

$$Pr \left[ \int_L^U f(x; \theta) dx \geq \beta \right] = 1 - \alpha, \quad (4)$$

که در آن  $\alpha \in (0, 1)$  و  $\beta \in (0, 1)$ .

در واقع فاصله ی  $(L, U)$  که در رابطه ی (۴) صدق می کند، حداقل  $100\beta$  درصد از جامعه ای با تابع چگالی احتمال  $f(x; \theta)$  را با اطمینان  $1 - \alpha$  پوشش می دهد. برای توزیع نمایی با پارامتر مقیاس  $\theta$ ، فاصله ی تحمل دو طرفه با دم های برابر به فرم

$(L, U) = (k_1 \hat{\theta}, k_2 \hat{\theta})$  را در نظر می‌گیریم که در آن  $\hat{\theta} = \frac{R_m}{m}$  که در آن

برآوردگر درستنمایی ماکسیمم  $\theta$  و  $k_1, k_2 \geq 0$  فاکتورهای تحمل<sup>۶</sup>

نامیده می‌شوند. با پیروی از کار گودمن و مدنسکی [۶]، شرط

دم‌های برابر را با تساوی  $P(X < L) = P(X > U)$  وقتی  $\hat{\theta} = \theta$  به راحتی می‌توان نشان داد که تابع  $h(k_1, t)$  یک تابع مثبت تک‌مدی

باشد، در نظر می‌گیریم. با اعمال این شرط داریم

$$t_* = \frac{\ln k_1 - \ln[-\ln(1 - \exp(-k_1))]}{k_1 + \ln(1 - \exp(-k_1))}. \quad \int_{k_1 \hat{\theta}}^{k_2 \hat{\theta}} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) dx = \int_{k_2 \hat{\theta}}^{\infty} \frac{1}{\theta} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) dx, \quad (5)$$

با حل تساوی (۵) و قرار دادن  $\hat{\theta} = \theta$  نتیجه می‌شود

$$k_2 = -\ln\{1 - \exp(-k_1)\}. \quad (6)$$

رابطه‌ی (۴) با رابطه زیر معادل است

$$Pr\left(\left(\exp\left\{-k_1 \frac{\hat{\theta}}{\theta}\right\} - \exp\left\{-k_2 \frac{\hat{\theta}}{\theta}\right\}\right) \geq \beta\right) = 1 - \alpha. \quad (8)$$

با قرار دادن  $T = \frac{\hat{\theta}}{\theta}$  و با توجه به رابطه‌ی (۶) داریم

$$Pr[h(k_1, T) \geq \beta] = 1 - \alpha, \quad (9) \quad h(k_1, t_i) = \beta, \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

جدول ۱: فاکتورهای تحمل  $k_1$  و  $k_2$  برای مقادیر مختلف  $m$  و  $\beta$  و  $1 - \alpha$

| $\beta = 0.95$ |          | $\beta = 0.9$ |        | $\beta = 0.8$ |        | $\beta = 0.7$ |        | $m$ | $1 - \alpha$ |
|----------------|----------|---------------|--------|---------------|--------|---------------|--------|-----|--------------|
| $k_2$          | $k_1$    | $k_2$         | $k_1$  | $k_2$         | $k_1$  | $k_2$         | $k_1$  |     |              |
| ۸/۱۶           | ۰/۰۰۰۳   | ۶/۲۹          | ۰/۰۰۲  | ۴/۴۴          | ۰/۰۱   | ۳/۳۹          | ۰/۰۳   | ۳   | ۰/۹۰         |
| ۶/۸۹           | ۰/۰۰۱    | ۵/۳۳          | ۰/۰۰۵  | ۳/۸۰          | ۰/۰۲   | ۲/۹۴          | ۰/۰۵   | ۴   |              |
| ۶/۲۰           | ۰/۰۰۲    | ۴/۸۲          | ۰/۰۰۸  | ۳/۴۷          | ۰/۰۳   | ۲/۷۱          | ۰/۰۶   | ۵   |              |
| ۵/۷۷           | ۰/۰۰۳    | ۴/۵۰          | ۰/۰۱   | ۳/۲۷          | ۰/۰۴   | ۲/۵۷          | ۰/۰۶   | ۶   |              |
| ۱۰/۹۹          | ۱۰-۵     | ۸/۴۵          | ۰/۰۰۰۲ | ۵/۹۱          | ۰/۰۰۲  | ۴/۴۵          | ۰/۰۱   | ۳   | ۰/۹۵         |
| ۸/۷۷           | ۰/۰۰۰۲   | ۶/۷۵          | ۰/۰۰۱  | ۴/۷۵          | ۰/۰۰۸  | ۳/۶۱          | ۰/۰۲   | ۴   |              |
| ۷/۶۱           | ۰/۰۰۰۵   | ۵/۸۷          | ۰/۰۰۳  | ۴/۱۶          | ۰/۰۱   | ۳/۱۹          | ۰/۰۴   | ۵   |              |
| ۶/۹۰           | ۰/۰۰۱    | ۵/۳۴          | ۰/۰۰۵  | ۳/۸۱          | ۰/۰۲   | ۲/۹۴          | ۰/۰۵   | ۶   |              |
| ۲۰/۶۱          | ۱۰-۹     | ۱۵/۸۴         | ۱۰-۷   | ۱۱/۰۷         | ۱۰-۴   | ۸/۲۸          | ۰/۰۰۰۲ | ۳   | ۰/۹۹         |
| ۱۴/۵۵          | ۴ × ۱۰-۷ | ۱۱/۱۹         | ۱۰-۵   | ۷/۸۲          | ۰/۰۰۰۴ | ۵/۸۵          | ۰/۰۰۲  | ۴   |              |
| ۱۱/۷۱          | ۸ × ۱۰-۶ | ۹/۰۰          | ۰/۰۰۰۱ | ۶/۳۰          | ۰/۰۰۱  | ۴/۷۳          | ۰/۰۰۸  | ۵   |              |
| 10/07          | ۴ × ۱۰-۵ | ۷/۷۴          | ۰/۰۰۰۴ | ۵/۴۳          | ۰/۰۰۴  | ۴/۱۰          | ۰/۰۲   | ۶   |              |

فاکتور  $k_1$  با حل همزمان دو معادله‌ی (۸) و معادله‌ی (۹) با  $k_1$  و  $k_2$  محاسبه شده را به ازای مقادیر مختلفی از  $m$  و  $\beta$  و  $1 - \alpha$  مقادیر اولیه‌ی مناسب برای مقادیر  $k_1$ ،  $t_1$  و  $t_2$  و فاکتور  $k_2$  نیز با ارائه می‌دهد.

توجه به رابطه‌ی (۶) محاسبه می‌شود. جدول ۱ فاکتورهای تحمل

<sup>۶</sup>Tolerance factors

## ۳ مثال کاربردی

در این بخش، داده‌های میزان ریزش باران سالانه را که طی هفتاد سال اخیر یعنی سال‌های ۱۹۴۲ تا ۲۰۱۲ (از ۱ ژوئیه تا ۳۰ ژوئن) در شهر لس‌آنجلس بر حسب اینچ توسط مرکز شهری لس‌آنجلس (LACC)<sup>۷</sup> اندازه‌گیری شده‌اند، در نظر می‌گیریم. این داده‌ها را می‌توان از لینک [www.laalmanac.com/weather/we13.htm](http://www.laalmanac.com/weather/we13.htm) دریافت نمود. برای این داده‌ها، شش رکورد به شرح زیر مشاهده می‌شود

۱۸/۱۷، ۱۹/۲۲، ۲۶/۲۱، ۲۷/۴۷، ۳۳/۴۴، ۳۷/۹۶

یک نمودار ساده از این شش رکورد در مقابل مقادیر مورد انتظار رکوردهای توزیع نمایی استاندارد، (یادآور می‌شویم رکورد  $s$ ام از توزیع نمایی استاندارد دارای توزیع گاما با پارامتر شکل  $s$  و پارامتر مقیاس ۱ است) نشان دهنده یک همبستگی قوی است (ضریب همبستگی به بزرگی ۰/۹۸۴ می‌باشد). بنابراین این فرض که این رکوردها از توزیع نمایی استخراج شده‌اند، فرض معقولی است. (رجوع کنید به بالاکریشن و چان، [۳]، صفحه ۷۸). با توجه به این که  $R_6 = ۳۷/۹۶$ ، بنابراین برآوردگر درستنمایی ماکسیم  $\theta$  برابر است با  $\hat{\theta} = ۶/۳۲۷$ . از جدول ۱ به ازای  $\beta = ۰/۹$ ،  $\alpha = ۰/۹۵$  و  $m = ۶$  داریم  $k_1 = ۰/۰۰۵$  و  $k_2 = ۵/۳۴$ . بنابراین یک فاصله‌ی تحمل دو طرفه با سطح پوشش ۹۰ درصد و با اطمینان ۹۵ درصد برابر است با (۰/۰۳۲، ۳۳/۷۹). به عبارت دیگر با اطمینان ۹۵٪ می‌توان گفت که حداقل ۹۰٪ از باران‌های سالانه در شهر لس‌آنجلس در بازه (۰/۰۳۲، ۳۳/۷۹) قرار دارند.

## ۴ مطالعه‌ی شبیه‌سازی

در این بخش، دقت فاصله‌ی تحمل مطرح شده در بخش ۲ را به کمک مطالعه‌ی شبیه‌سازی مونت‌کارلو مورد بررسی قرار می‌دهیم. مراحل شبیه‌سازی به صورت زیر است

- ابتدا داده‌های رکوردی  $R_1, \dots, R_m$  از توزیع نمایی با

پارامترهای  $\theta = ۱, ۳, ۵$  به ازای مقادیر  $m = ۳, ۴, ۵, ۶$  تولید می‌شوند.

- برآورد درستنمایی ماکسیم  $\theta$  از رابطه  $\hat{\theta} = \frac{R_m}{m}$  به ازای مقادیر  $m = ۳, ۴, ۵, ۶$  محاسبه می‌گردد.

- به ازای مقادیر انتخابی  $\beta = ۰/۷, ۰/۸, ۰/۹, ۰/۹۵$ ، سطوح اطمینان اسمی  $\gamma = ۱ - \alpha = ۰/۹, ۰/۹۵, ۰/۹۹$  و  $m = ۳, ۴, ۵, ۶$  فاکتورهای تحمل  $k_1$  و  $k_2$  از جدول ۱ فراخوانی می‌شوند.

- مراحل فوق به تعداد  $M = ۱۰۰۰۰۰$  بار تکرار می‌شود. فرض کنید که  $\hat{\theta}(i)$  برآورد درستنمایی ماکسیم  $\theta$  در تکرار  $i$ ام باشد و تابع  $I(t)$  تابع نشانگر باشد، یعنی  $I(t) = ۱$  اگر  $t \geq ۰$  و  $I(t) = ۰$  اگر  $t < ۰$ ، در این صورت برآوردهای سطح اطمینان فاصله‌ی تحمل و متوسط طول فاصله‌ی تحمل به ترتیب توسط رابطه‌های

$$\hat{\gamma} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M I\left(\exp\left(-k_1 \frac{\hat{\theta}(i)}{\theta}\right) - [1 - \exp(-k_1)]^{\frac{\hat{\theta}(i)}{\theta}} - \beta\right),$$

$$AW = \frac{k_2 - k_1}{M} \sum_{i=1}^M \hat{\theta}(i),$$

محاسبه می‌شوند که در آن نماد  $AW$  برای متوسط طول فاصله‌ی تحمل مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جداول ۲ تا ۴ نتایج شبیه‌سازی را ارائه می‌دهند. از نرم‌افزار آماری R نسخه‌ی ۳ برای انجام مراحل این شبیه‌سازی بهره گرفته شده است. از جداول ۲ تا ۴ ملاحظه می‌شود که:

الف) سطوح اطمینان برآورد شده به سطوح اطمینان اسمی متناظر خود نزدیک هستند که این امر بیانگر دقت بالای فاصله‌های تحملی است که از طریق روش‌های مطرح شده در این مقاله به دست می‌آیند.

<sup>۷</sup>Los Angeles Civic Center

جدول ۲: برآورد سطوح اطمینان و متوسط طول فاصله‌ی تحمل برای  $\theta = 1$  به ازای مقادیر مختلف  $m$ ،  $\beta$  و  $\gamma$ .

| $\beta$  |          |          |          | $m$            | $\gamma$ |
|----------|----------|----------|----------|----------------|----------|
| ۰/۹۵     | ۰/۹      | ۰/۸      | ۰/۷      |                |          |
| ۰/۹۰۰۷۶  | ۰/۹۰۰۲۰  | ۰/۹۰۱۰۷  | ۰/۹۰۰۸۸  | $\hat{\gamma}$ | ۳        |
| ۸/۱۳۵۸۱  | ۶/۲۷۸۴۰  | ۴/۴۴۱۴۸  | ۳/۳۶۵۸۲  | AW             | ۰/۹۰     |
| ۰/۹۰۰۳۹  | ۰/۸۹۹۷۵  | ۰/۹۰۰۴۰  | ۰/۹۰۰۱۷  | $\hat{\gamma}$ | ۴        |
| ۶/۸۹۳۶۶  | ۵/۳۱۸۱۹  | ۳/۷۸۱۱۲  | ۲/۸۸۸۵۵  | AW             |          |
| ۰/۹۰۰۴۰  | ۰/۸۹۸۹۱  | ۰/۹۰۱۱۲  | ۰/۹۰۰۸۱  | $\hat{\gamma}$ | ۵        |
| ۶/۲۱۲۶۹  | ۴/۸۰۵۵۰  | ۳/۴۴۳۹۷  | ۲/۶۴۵۴۳  | AW             |          |
| ۰/۹۰۰۸۵  | ۰/۸۹۹۵۹  | ۰/۸۹۹۴۶  | ۰/۹۰۰۰۷  | $\hat{\gamma}$ | ۶        |
| ۵/۷۶۴۵۶  | ۴/۴۸۴۵۳  | ۳/۲۲۶۹۸  | ۲/۴۹۴۹۲  | AW             |          |
| ۰/۹۵۰۴۱  | ۰/۹۵۰۸۳  | ۰/۹۵۰۹۷  | ۰/۹۵۰۲۵  | $\hat{\gamma}$ | ۳        |
| ۱۱/۰۱۲۴۹ | ۸/۴۴۷۶۳  | ۵/۸۸۲۸۳  | ۴/۴۳۵۵۰  | AW             | ۰/۹۵     |
| ۰/۹۵۰۹۶  | ۰/۹۵۱۶۷  | ۰/۹۵۰۲۸  | ۰/۹۵۰۱۷  | $\hat{\gamma}$ | ۴        |
| ۸/۷۵۸۲۶  | ۶/۷۵۲۹۰  | ۴/۷۵۰۴۳  | ۳/۵۸۹۴۷  | AW             |          |
| ۰/۹۵۱۰۱  | ۰/۹۵۱۱۲  | ۰/۹۵۰۹۴  | ۰/۹۵۰۷۰  | $\hat{\gamma}$ | ۵        |
| ۷/۶۳۰۵۱  | ۵/۸۷۸۸۲  | ۴/۱۳۹۹۲  | ۳/۱۴۴۶۵۵ | AW             |          |
| ۰/۹۵۰۴۲  | ۰/۹۵۰۴۸  | ۰/۹۵۰۹۷  | ۰/۹۵۰۴۶  | $\hat{\gamma}$ | ۶        |
| ۶/۸۸۹۳۱  | ۵/۳۴۵۱۰  | ۳/۷۹۶۰۱  | ۲/۸۹۸۴۱  | AW             |          |
| ۰/۹۹۰۱۵  | ۰/۹۹۰۲۶  | ۰/۹۹۰۱۴  | ۰/۹۹۰۱۲  | $\hat{\gamma}$ | ۳        |
| ۲۰/۵۹۵۴۲ | ۱۵/۸۶۹۵۵ | ۱۱/۱۱۳۹۴ | ۸/۳۱۲۶۲  | AW             | ۰/۹۹     |
| ۰/۹۸۹۹۳  | ۰/۹۹۰۴۴  | ۰/۹۹۰۳۴  | ۰/۹۹۰۳۷  | $\hat{\gamma}$ | ۴        |
| ۱۴/۵۵۰۲۹ | ۱۱/۱۴۹۵۵ | ۷/۸۲۸۹۷  | ۵/۸۲۷۰۶  | AW             |          |
| ۰/۹۹۰۳۸  | ۰/۹۹۰۲۳  | ۰/۹۸۹۹۷  | ۰/۹۹۰۱۷  | $\hat{\gamma}$ | ۵        |
| ۱۱/۷۲۱۶۴ | ۸/۹۹۶۰۹  | ۶/۲۹۰۵۰  | ۴/۷۱۸۱۱  | AW             |          |
| ۰/۹۹۰۲۷  | ۰/۹۹۰۲۹  | ۰/۹۸۹۹۲  | ۰/۹۸۹۷۴  | $\hat{\gamma}$ | ۶        |
| ۱۰/۰۶۳۳۰ | ۷/۷۴۰۰۶  | ۵/۴۲۵۹۱  | ۴/۰۸۸۰۲  | AW             |          |

جدول ۳: برآورد سطوح اطمینان و متوسط طول فاصله‌ی تحمل برای  $\theta = 3$  به ازای مقادیر مختلف  $m$ ،  $\beta$  و  $\gamma$ .

| $\gamma$ | $m$ | $\beta$        |          |          |          |
|----------|-----|----------------|----------|----------|----------|
|          |     | ۰/۷            | ۰/۸      | ۰/۹      | ۰/۹۵     |
| ۰/۹۰     | ۳   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۸۹۹۹۱  | ۰/۹۰۰۱۲  | ۰/۹۰۱۸۲  |
|          |     | AW             | ۱۰/۰۷۱۵۱ | ۱۳/۲۹۰۱۸ | ۱۸/۹۰۲۴۸ |
|          | ۴   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۰۰۱۳  | ۰/۹۰۰۳۱  | ۰/۹۰۰۸۹  |
|          |     | AW             | ۸/۶۷۰۷۲  | ۱۱/۳۵۰۰۱ | ۱۵/۹۸۲۵۸ |
|          | ۵   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۰۰۲۴  | ۰/۹۰۰۵۸  | ۰/۸۹۹۴۳  |
|          |     | AW             | ۷/۹۳۰۳۸  | ۱۰/۳۲۴۲۰ | ۱۴/۴۵۲۹۲ |
|          | ۶   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۸۹۹۷۰  | ۰/۸۹۹۳۹  | ۰/۹۰۱۳۱  |
|          |     | AW             | ۷/۴۸۴۲۶  | ۹/۶۷۹۳۷  | ۱۳/۴۶۶۲۸ |
| ۰/۹۵     | ۳   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۵۰۸۴  | ۰/۹۵۰۴۸  | ۰/۹۵۰۸۰  |
|          |     | AW             | ۱۳/۳۰۶۹۵ | ۱۷/۷۸۳۵۹ | ۲۵/۲۸۷۱۰ |
|          | ۴   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۵۰۵۸  | ۰/۹۵۰۷۰  | ۰/۹۴۹۷۳  |
|          |     | AW             | ۱۰/۷۶۰۱۵ | ۱۴/۲۴۰۳۷ | ۲۰/۳۳۵۶۷ |
|          | ۵   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۵۰۳۰  | ۰/۹۵۰۶۵  | ۰/۹۵۰۵۰  |
|          |     | AW             | ۹/۴۴۲۸۰  | ۱۲/۴۳۱۴۰ | ۱۷/۶۳۵۱۱ |
|          | ۶   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۵۰۴۵  | ۰/۹۵۰۰۲  | ۰/۹۵۰۴۲  |
|          |     | AW             | ۸/۶۷۶۵۳  | ۱۱/۳۷۲۳۸ | ۱۵/۹۸۶۹۹ |
| ۰/۹۹     | ۳   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۸۹۸۸  | ۰/۹۹۰۱۶  | ۰/۹۸۹۹۵  |
|          |     | AW             | ۲۴/۷۷۹۷۸ | ۳۳/۲۲۰۴۷ | ۴۷/۳۶۷۲۵ |
|          | ۴   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۸۹۹۹  | ۰/۹۹۰۱۳  | ۰/۹۹۰۱۶  |
|          |     | AW             | ۱۷/۵۳۶۳۵ | ۲۳/۴۲۷۴۰ | ۳۳/۵۵۴۲۱ |
|          | ۵   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۹۰۴۰  | ۰/۹۹۰۷۵  | ۰/۹۹۰۴۵  |
|          |     | AW             | ۱۴/۱۵۷۸۰ | ۱۸/۸۸۷۸۵ | ۲۶/۹۷۸۲۱ |
|          | ۶   | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۹۰۰۴  | ۰/۹۸۹۹۶  | ۰/۹۸۹۶۰  |
|          |     | AW             | ۱۲/۲۶۸۰۵ | ۱۶/۳۰۲۷۹ | ۲۳/۲۲۷۷۳ |

جدول ۴: برآورد سطوح اطمینان و متوسط طول فاصله‌ی تحمل برای  $\theta = 5$  به ازای مقادیر مختلف  $m$ ،  $\beta$  و  $\gamma$ .

| $\beta$   |          |          |          | $m$            | $\gamma$ |
|-----------|----------|----------|----------|----------------|----------|
| ۰/۹۵      | ۰/۹      | ۰/۸      | ۰/۷      |                |          |
| ۰/۸۹۹۵۲   | ۰/۹۰۰۱۵  | ۰/۹۰۰۱۰  | ۰/۹۰۱۰۳  | $\hat{\gamma}$ | ۳        |
| ۴۰/۷۱۵۹۷  | ۳۱/۳۶۷۲۰ | ۲۲/۱۳۷۳۳ | ۱۶/۸۰۶۸۳ | AW             | ۰/۹۰     |
| ۰/۹۰۰۰۶   | ۰/۹۰۱۹۵  | ۰/۹۰۰۵۸  | ۰/۹۰۰۲۹  | $\hat{\gamma}$ | ۴        |
| ۳۴/۴۷۱۹۵  | ۲۶/۶۸۱۶۷ | ۱۸/۸۹۶۳۱ | ۱۴/۴۳۵۶۳ | AW             | ۰/۹۰     |
| ۰/۹۰۰۳۹   | ۰/۹۰۰۶۷  | ۰/۹۰۰۶۳  | ۰/۹۰۰۲۶  | $\hat{\gamma}$ | ۵        |
| ۳۱/۰۲۰۷۷  | ۲۴/۰۴۶۶۴ | ۱۷/۱۹۰۸۸ | ۱۳/۲۰۴۹۲ | AW             | ۰/۹۰     |
| ۰/۹۰۰۶۵   | ۰/۹۰۱۵۹  | ۰/۸۹۹۸۹  | ۰/۹۰۱۵۱  | $\hat{\gamma}$ | ۶        |
| ۲۸/۸۱۹۴۳  | ۲۲/۴۷۴۱۰ | ۱۶/۱۲۶۵۳ | ۱۲/۴۷۶۹۵ | AW             | ۰/۹۰     |
| ۰/۹۵۰۹۸   | ۰/۹۵۱۰۴  | ۰/۹۵۰۹۰  | ۰/۹۵۰۰۹  | $\hat{\gamma}$ | ۰/۹۵     |
| ۵۵/۱۲۰۷۳  | ۴۲/۱۵۸۳۴ | ۲۹/۶۵۳۰۴ | ۲۲/۲۲۲۷۴ | AW             | ۰/۹۵     |
| ۰/۹۵۰۱۶   | ۰/۹۵۰۵۱  | ۰/۹۴۹۷۰  | ۰/۹۵۰۳۳  | $\hat{\gamma}$ | ۴        |
| ۴۳/۷۹۰۳۴  | ۳۳/۸۷۲۲۷ | ۲۳/۷۶۲۳۳ | ۱۷/۸۸۹۷۲ | AW             | ۰/۹۵     |
| ۰/۹۵۰۳۳   | ۰/۹۴۹۹۳  | ۰/۹۴۹۹۰  | ۰/۹۵۰۱۰  | $\hat{\gamma}$ | ۵        |
| ۳۸/۱۲۳۸۱  | ۲۹/۳۸۸۹۵ | ۲۰/۷۴۹۲۲ | ۱۵/۷۴۱۱۹ | AW             | ۰/۹۵     |
| ۰/۹۵۱۸۷   | ۰/۹۵۱۳۲  | ۰/۹۵۰۱۴  | ۰/۹۵۰۳۷  | $\hat{\gamma}$ | ۶        |
| ۳۴/۵۷۷۵۸  | ۲۶/۷۰۹۸۸ | ۱۸/۹۱۱۷۳ | ۱۴/۴۸۴۷۰ | AW             | ۰/۹۵     |
| ۰/۹۹۰۳۰   | ۰/۹۸۹۹۲  | ۰/۹۹۰۱۷  | ۰/۹۹۰۲۱  | $\hat{\gamma}$ | ۳        |
| ۱۰۲/۹۵۲۶۰ | ۷۹/۲۳۰۳۳ | ۵۵/۲۳۸۳۴ | ۴۱/۴۷۴۹۶ | AW             | ۰/۹۹     |
| ۰/۹۸۹۹۸   | ۰/۹۹۰۴۴  | ۰/۹۸۹۵۸  | ۰/۹۹۰۳۸  | $\hat{\gamma}$ | ۴        |
| ۷۲/۸۵۱۸۳  | ۵۵/۹۳۹۸۴ | ۳۹/۱۴۴۸۶ | ۲۹/۲۳۵۶۹ | AW             | ۰/۹۹     |
| ۰/۹۹۰۴۵   | ۰/۹۹۰۵۰  | ۰/۹۹۰۳۴  | ۰/۹۹۰۲۷  | $\hat{\gamma}$ | ۵        |
| ۵۸/۶۹۹۵۳  | ۴۵/۰۵۱۱۶ | ۳۱/۴۷۵۵۳ | ۲۳/۵۹۴۲۲ | AW             | ۰/۹۹     |
| ۰/۹۸۹۹۱   | ۰/۹۹۰۳۰  | ۰/۹۹۰۲۱  | ۰/۹۹۰۰۷  | $\hat{\gamma}$ | ۶        |
| ۵۰/۴۱۰۹۸  | ۳۸/۷۰۳۵۷ | ۲۷/۱۲۱۴۹ | ۲۰/۴۱۹۱۵ | AW             | ۰/۹۹     |

ب) با افزایش تعداد رکوردها،  $m$  متوسط طول فاصله‌های تحمل کاهش می‌یابد. واضح است که با در اختیار داشتن رکوردهای بیشتر، اطلاعات بیشتری به دست می‌آید و در نتیجه فاصله‌های تحمل دقیق‌تری می‌توان یافت.

ج) با افزایش  $\theta$ ، متوسط طول فاصله‌های تحمل نیز افزایش می‌یابد. انتظار می‌رفت که این امر رخ دهد زیرا طول فاصله‌ی تحمل، ضریبی از  $\hat{\theta}$  می‌باشد.

فاکتورهای تحمل، با حل همزمان معادله‌های (۸) و (۹) و به کمک روش عددی نیوتن-رافسون به دست می‌آیند. برای حل این معادله‌ها از بسته‌ی نرم‌افزاری Maple نسخه‌ی ۱۷ استفاده شده است. نتایج در جدول ۱ ارائه شده‌اند. مثالی از داده‌های میزان ریزش باران سالانه در شهر لس‌آنجلس در بخش ۳ ارائه شد. همچنین دقت فاصله‌های تحمل ارائه شده بر اساس داده‌های رکوردی با استفاده از شبیه‌سازی مونت‌کارلو مورد بررسی قرار گرفت. نتایج در جداول ۲، ۳ و ۴ ارائه شده‌اند، که به کمک آن‌ها می‌توان سطوح اطمینان برآورد شده و متوسط طول فاصله‌های تحمل را در حالت‌های مختلف با یکدیگر مقایسه نمود.

## ۵ بحث و نتیجه‌گیری

در این مقاله، بر اساس داده‌های رکوردی مشاهده شده از توزیع نمایی، فاصله‌های تحمل دو طرفه با دم‌های برابر به دست آمدند.

## مراجع

- [1] Ahmadi, J. and Arghami, N. R. (2003), Nonparametric Confidence and Tolerance Intervals from Record Values Data, *Statistical Papers*, **44**, 455-468.
- [2] Arnold, B. C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H. N. (1998), *Records*, John Wiley & Sons, New York.
- [3] Balakrishnan, N. and Chan, P. S. (1998), On the normal record values and associated inference, *Statistics and Probability Letters*, **39**, 73-80.
- [4] Engelhardt, M. and Bain, L. J. (1978), Tolerance Limits and Confidence Limits on Reliability for the Two-parameter Exponential Distribution, *Technometrics*, **20**, 37-39.
- [5] Fernández, A. J. (2010), Two-sided Tolerance Intervals in the Exponential Case: Corrigenda and Generalizations, *Computational Statistics and Data Analysis*, **54**, 151-162.
- [6] Goodman, L. A. and Madansky, A. (1962), Parameter-free and Nonparametric Tolerance Limits: The Exponential Case, *Technometrics*, **4**, 75-95.
- [7] Guenther, W. C., Patil, S. A. and Uppuluri, V. R. R. (1976), One-sided  $\beta$ -content Tolerance Factors for the Two Parameter Exponential Distribution, *Technometrics*, **18**, 330-340.
- [8] Guttman, I. (1959), Optimum Tolerance Regions and Power When Sampling from Some Non-normal Universes, *Annals of Mathematical Statistics*, **30**, 926-938.
- [9] Jilek, M. (1981), A Bibliography of Statistical Tolerance Regions, *Mathematische Operationsforschung und Statistik - Series Statistics*, **15**, 441-456.

- [10] Jilek, M. and Ackermann, H. (1989), A Bibliography of Statistical Tolerance Regions, II, *Statistics*, **20**, 165-172.
- [11] Kiapour, A. and Naghizadeh Qomi, N. (2016). Equal-tailed and Shortest Bayesian Tolerance Intervals Based on Exponential  $k$ -Records. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, doi:10.1080/03610926.2015.1076476.
- [12] Naghizadeh Qomi, N., Kiapour, A. (2016). Shortest Tolerance Intervals Controlling Both Tails of the Exponential Distribution Based on Record Values. *Communications in Statistics- Theory and Methods*, doi:10.1080/03610926.2014.990106.
- [13] Owen, D. B. (1964). Control of Percentages in Both Tails of the Normal Distributions. *Technometrics*, **6**, 377-387.
- [14] Patil, J. K. (1986), Tolerance Limits - A Review, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, **15**, 2719-2762.
- [15] Wilks, S. S. (1941), Determination of Sample Sizes for Setting Tolerance Limits, *Annals of Mathematical Statistics*, **12**, 91-96.