کاربردی از ارزیابی خطای اندازه‌گیری به‌روش تحلیل ردهٔ نهان

حمیدرضا نواب‌پور،[۱] اکرم صفرنژاد بروجنی[۲] و طیبه چگینی[۳]

تاریخ دریافت: ۱۳۹۴/۷/۳
تاریخ پذیرش: ۱۳۹۶/۱/۳۰

چکیده:

تحلیل ردهٔ نهان (LCA) روشی برای ارزیابی خطاهای غیر نمونه‌گیری، به‌خصوص خطای اندازه‌گیری داده‌های رسته‌ای است. [۱]، چهار رهیافت مدل‌بندی ردهٔ نهان، یعنی پارامتری‌سازی مدل احتمالاتی، مدل لگ خطی، مدل مسیر تعدیل‌یافته و مدل نموداری را با استفاده از نمودارهای مسیر معرفی کرده است. این مدل‌ها قابل تبدیل به یکدیگرند. مدل‌های احتمالاتی ردهٔ نهان، درست‌نمایی جدول رده‌بندی تقاطعی متغیرها را بر حسب احتمال‌های شرطی و حاشیه‌ای مربوط به هر خانهٔ این جدول بیان می‌کند. در این رهیافت پارامترهای مدل با استفاده از الگوریتم EM براورد می‌شوند. برای آزمون مدل ردهٔ نهان، آمارهٔ خی‌دو به‌عنوان ملاک نیکویی برازش معرفی شده است. در این مقاله از LCA و داده‌های یک آمارگیری کوچک مقیاس برای محاسبهٔ خطای بدرده‌بندی (که یک نوع خطای اندازه‌گیری است) نسبت دانشجویانی که دست کم در یک درس مردود شده‌اند و نیز خطای بدرده‌بندی نسبت دانشجویانی که دست کم یک‌بار مشروط شده‌اند، استفاده شده است.

واژه‌های کلیدی: خطای کل آمارگیری، خطای اندازه‌گیری، مدل احتمالاتی، تحلیل ردهٔ نهان، استاندارد طلایی، خطای بدرده‌بندی.

.

۱ مقدمه

از جمله روش‌هایی که برای تحلیل خطاهای غیر نمونه‌گیری به‌ویژه خطای اندازه‌گیری وجود دارد، رهیافت تحلیل ردهٔ نهان (LCA) است. زمانی‌که برخی از متغیرها نهان یا مشاهده‌نشده باشند، توزیع متغیر نهان بر اساس چند متغیر مشاهده‌شدهٔ نشان‌گر که برای اندازه‌گیری متغیر نهان ساخته شده‌اند، بررسی می‌شود. زمانی LCA به کار گرفته می‌شود که متغیر نهان و متغیرهای نشان‌گر، همگی متغیرهای رسته‌ای باشند. تحلیل ردهٔ نهان برای براورد پارامترهای مدل خطای آمارگیری به کار می‌رود. این براوردها، در ارزیابی میانگین توان دوم خطاها (MSE) و خطای کل آمارگیری (TSE) مفید هستند. همچنین این روش تحلیل می‌تواند با براورد احتمال خطای اندازه‌گیری مربوط به یک پرسش، طراح پرسش‌نامه را در انتخاب پرسش‌های بهتر یاری کند. در کل، LCA می‌تواند به‌عنوان ابزاری مفید برای همهٔ هدف‌های ارزیابی خطا تلقی شود و منبع‌های خطای آمارگیری را ارزیابی کند؛ اما در این مقاله توجه ما بر اندازه‌گیری‌های رسته‌ای و خطاهای رده‌بندی، یعنی بدرده‌بندی کردن یک رستهٔ واقعی به یکی از رسته‌های ممکن آن متغیر (خطای اندازه‌گیری) است. ایدهٔ کلّی مدل‌های ردهٔ نهان به کارهای اوّلیهٔ لازارسفلد [۹ و ۱۰] برمی‌گردد. [۳ و ۴] استفادهٔ گسترده از این روش تا زمانی‌که روش ماکسیمم درست‌نمایی را برای براورد پارامترهای مدل پیشنهاد داد به تأخیر افتاد. [۵ و ۱۱] دانش مدل‌های ردهٔ نهان (LC) و تطبیق‌پذیری‌شان را در تحلیل داده‌های رسته‌ای گسترش دادند. کاربردهای جدید LCA نیز کشف و به نوشته‌های جدیدی منتهی شده است که می‌توان به [۲، ۶، ۸ و ۱۲] اشاره کرد. در بخش ۲ در ابتدا ساده‌ترین حالت متغیر رسته‌ای که دارای دو رده است و کم‌ترین تعداد تکرار مورد نیاز برای براورد خطای اندازه‌گیری که دو اندازه‌گیری روی هر واحد نمونه‌ای است، در نظر گرفته می‌شود و بر اساس LCA، مدل خطای اندازه‌گیری و احتمال خطای پاسخ آن مورد بحث قرار می‌گیرد. سپس این حالت به حالت‌های کلّی‌تر مثل دو اندازه‌گیری روی متغیر

[۱] عضو هیئت علمی گروه آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، ایران
[۲] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، ایران
[۳] دانش‌آموختهٔ کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه علامه طباطبایی، ایران

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

رسته‌ای چندحالتی و همچنین حالت سه اندازه‌گیری روی متغیر رسته‌ای چندحالتی، تعمیم داده می‌شود. نمادگذاری‌ها بر اساس نمادگذاری [۱] صورت گرفته است. در بخش‌های ۳ و ۴ برای توصیف مدل ردهٔ نهان، یکی از رهیافت‌های مدل‌بندی با عنوان پارامتری‌سازی مدل احتمالاتی شرح داده می‌شود. در بخش ۵ شیوهٔ ارزیابی مدل تشریح می‌شود و در بخش ۶ با استفاده از داده‌های یک آمارگیری کوچک‌مقیاس، خطای بدرده‌بندی با استفاده از روش LCA براورد می‌شود.

۲ احتمال خطای پاسخ در حالت دو اندازه‌گیری روی متغیر رسته‌ای

طبق تعریف $[E(Y_i \mid i)]$، امتیاز واقعی τ_i برای متغیرهای دوحالتی که اگر پاسخ مثبت باشد، مقدار ۱ و اگر پاسخ منفی باشد، مقدار صفر اختیار می‌کند، به‌صورت » احتمال پاسخ مثبت برای iامین پاسخگو« تعبیر می‌شود. اگر μ_i مقدار واقعی خصیصهٔ مورد نظر که با y_i اندازه‌گیری می‌شود، ϕ_i احتمال خطای مثبت کاذب[۴] و θ_i احتمال خطای منفی کاذب[۵] در اندازه‌گیری Y_i باشند، این احتمال‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned}\phi_i &= P(Y_i = ۱ \mid \mu_i = ۰),\\ \theta_i &= P(Y_i = ۰ \mid \mu_i = ۱).\end{aligned} \qquad (۱)$$

در این صورت τ_i به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\tau_i = P(Y_i = ۱ \mid i) = \begin{cases} ۱ - \theta_i; & \text{اگر } \mu_i = ۱ \\ \phi_i; & \text{اگر } \mu_i = ۱ \end{cases}$$

برای نشان دادن ارتباط بین احتمال‌های رده‌بندی و خطای اندازه‌گیری، مدل زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$Y_i = \mu_i + \epsilon_i, \quad i = ۱, \ldots, N$$

که در آن ϵ_i مولفهٔ خطای اندازه‌گیری است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\epsilon_i = \begin{cases} ۱; & y_i = ۱, \mu_i = ۰ \\ -۱; & y_i = ۰, \mu_i = ۱ \\ ۰; & y_i = \mu_i \end{cases}$$

[۱] به بررسی اثر خطاها در براورد شیوع جامعه‌ای $\pi = \frac{۱}{N}\sum_{i=۱}^{N}\mu_i$ طبق این مدل پرداخت. او با استفاده از احتمال‌های خطای θ_i و ϕ_i، مفهوم‌های اعتبار، قابلیت اعتماد، واریانس پاسخ ساده، اریبی اندازه‌گیری و خطای بدرده‌بندی در داده‌های دوحالتی را ارزیابی کرده و نشان داده است که این معیارها بر اساس سه متغیر θ_i و ϕ_i و شیوع جامعه‌ای π، به‌طور کامل شناسایی می‌شوند.

میانگین احتمال نادرست مثبت (ϕ) و میانگین احتمال نادرست منفی (θ) به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\phi = \frac{۱}{N_{۰}}\sum_{i=۱}^{N_{۰}}\phi_i, \quad \theta = \frac{۱}{N_{۱}}\sum_{i=۱}^{N_{۱}}\theta_i$$

که جمع اوّل روی عضوهایی از جامعه است که مثبت واقعی هستند (یعنی $\mu_i = ۱$)، جمع دوم روی عضوهایی از جامعه عمل می‌کند که منفی واقعی هستند (یعنی $\mu_i = ۰$)، $N_{۱} = \sum_{i=۱}^{N}\mu_i$ تعداد افراد مثبت واقعی در جامعه است و $N_{۰} = N - N_{۱}$ تعداد افراد منفی واقعی در جامعه می‌باشد.

جدول رده‌بندی تقاطعی $\times$ متغیرهای $y_i = l$ و $\mu_i = l'$ با نسبت‌های خانه‌ای $P_{ll'}$ (که l و l' مقدارهای ۰ و ۱ را اختیار می‌کنند) را در نظر بگیرید (جدول ۱).

جدول ۱. جدول رده‌بندی تقاطعی متغیرهای دوحالتی y_i و μ_i

	$\mu_i = ۱$	$\mu_i = ۰$	
$y_i = ۱$	$P_{۱۱} = \frac{a}{n}$	$P_{۱۰} = \frac{b}{n}$	$P_{۱+} = P_{۱۱} + P_{۱۰}$
$y_i = ۰$	$P_{۰۱} = \frac{c}{n}$	$P_{۰۰} = \frac{d}{n}$	$P_{۰+} = P_{۰۱} + P_{۰۰}$
	$P_{+۱} = P_{۱۱} + P_{۰۱}$	$P_{+۰} = P_{۱۰} + P_{۰۰}$	

[۴] False-Positive

[۵] False-Negative

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

براوردگرهای ناریب ϕ و θ در حالت معلوم بودن مقدارهای واقعی به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\hat{\phi} = \frac{P_{1\cdot}}{P_{1\cdot} + P_{\cdot 1}} = \frac{b}{b+d},$$
$$\hat{\theta} = \frac{P_{\cdot 1}}{P_{\cdot 1} + P_{11}} = \frac{c}{c+a}. \qquad (۲)$$

[۷] نیز روشی برای براورد θ و π و ϕ زمانی‌که دو اندازه‌گیری برای متغیر Y موجود است، ارائه دادند. در روش آنها نیازی به دسترسی به اندازه‌های استاندارد طلایی و نیز فرض موازی بودن دو اندازه‌گیری y_1 و y_2 نیست، ولی به فرض استقلال موضعی دو اندازه‌گیری نیاز است. همچنین فرض می‌کنند که جامعه می‌تواند به دو گروه تقسیم شود به‌طوری که θ و ϕ برای دو گروه، یکسان، ولی ممکن است π برای این دو گروه متفاوت باشد. در این قسمت، روش آنها که مقدمه‌ای بر رهیافت LCA است، بیش‌تر شرح داده می‌شود.

فرض کنید X_i مقدار واقعی (مثبت واقعی با مقدار $X = 1$ و منفی واقعی با $X = 2$ نشان داده می‌شود)، A اوّلین اندازه‌گیری، B دومین اندازه‌گیری و G متغیر گروه‌بندی باشد که عضویت واحدها به زیرگروه‌های جامعه‌ای را نشان می‌دهد. متغیرهای A و B در صورت رده‌بندی مثبت، مقدار ۱ و در صورت رده‌بندی منفی، مقدار ۲ را اختیار می‌کنند.

[۷] هدف براورد احتمال‌های خطا و یافتن براوردی برای احتمال شیوع جامعه‌ای است. به این منظور نمادهای زیر را برای احتمال‌های مربوط معرفی کردند:

احتمال شیوع جامعه‌ای $\pi_1^X = p(X = 1)$

نسبتی از جامعه که متعلق به زیرگروه ۱ است: π_1^G

نسبتی از جامعه که متعلق به زیرگروه ۲ است: π_2^G

احتمال‌های حاشیه‌ای: π_a^A, π_b^B

احتمال خانه‌های مشاهده شده: $\pi_{ab}^{AB}, \quad a, b = 1, 2$

احتمال شیوع مثبت $\pi_{1|g}^{X|G} = p(X = 1 \mid G = g)$
برای گروه $G = g$:

احتمال شیوع مقدار منفی برای گروه $G = g$: $\pi_{2|g}^{X|G} = 1 - \pi_{1|g}^{X|G}$

احتمال‌های پاسخ مصاحبهٔ اوّل: $\pi_{a|X}^{A|X}$

احتمال‌های پاسخ بازمصاحبه: $\pi_{b|X}^{B|X}$

احتمال‌های خطا: $\pi_{1|2}^{A|X}, \pi_{2|1}^{A|X}, \pi_{1|2}^{B|X}, \pi_{2|1}^{B|X}$

احتمال خطای نادرست‌منفی و احتمال خطای مثبت کاذب تعریف‌شده در (۱) متناظر با اندازه‌گیری اوّل، طبق نمادگذاری بالا به‌صورت زیر هستند:

$$\theta = P(A = 2 \mid X = 1) = \pi_{2|1}^{A|X}$$
$$\phi = P(A = 1 \mid X = 2) = \pi_{1|2}^{A|X} \qquad (۶-)$$

جدول رده‌بندی GAB برای مشاهده‌ها تشکیل داده می‌شود. بردار شمارهای خانه‌ای $n = [n_{111}, \ldots, n_{222}]$ دارای توزیع چندجمله‌ای با بردار احتمال

$$\pi = [\pi_{111}^{GAB}, \pi_{112}^{GAB}, \ldots, \pi_{222}^{GAB}]'$$

است به‌طوری که $g, a, b = 1, 2$; n_{gab} تعداد مشاهده‌های رده‌بندی شده در خانهٔ $G = g$، $A = a$، $B = b$ جدول GAB و π_{gab}^{GAB} احتمال توأم این‌که واحد نمونه‌ای به خانهٔ (g, a, b) رده‌بندی شود، می‌باشند. برای براورد احتمال‌ها از روش ماکسیمم درست‌نمایی استفاده می‌شود که هستهٔ لگاریتم درست‌نمایی در این حالت به‌صورت زیر است:

$$\ell(\pi \mid n) = \sum_{g=1}^{2} \sum_{a=1}^{2} \sum_{b=1}^{2} n_{gab} \log\left(\pi_{gab}^{GAB}\right) \qquad (۵-)$$

که پارامترهای آن با فرض استقلال موضعی میان دو اندازه‌گیری A و B در هر گروه عبارت‌اند از:

$$\pi_1^G \pi_{1|1}^{X|G} \pi_{1|2}^{X|G} \pi_{1|21}^{A|XG} \pi_{1|22}^{A|XG} \pi_{2|11}^{A|XG} \pi_{2|12}^{A|XG}$$
$$\pi_{1|21}^{B|XG} \pi_{1|22}^{B|XG} \pi_{1|21}^{B|XG} \pi_{2|12}^{B|XG}$$

با توجه به‌عبارت زیر می‌توان نشان داد که رابطهٔ (۴) دارای ۱۱ پارامتر بالا است [۱].

$$P(G = g, A = a, B = b) = P(G = g)P(A = a, B = b \mid G = g)$$
$$= \pi_g^G \pi_{ab|g}^{AB|G}$$

بنا بر این نمی‌توان براوردهای یکتایی برای این پارامترها به دست آورد. برای شناسایی‌پذیر کردن مدل، باید قیدهایی به این مدل تحمیل شود.

[۷] علاوه بر فرض استقلال موضعی، یعنی $\pi_{ab|xg}^{AB|XG} = \pi_{a|xg}^{A|XG} \pi_{b|xg}^{B|XG}$، دو فرض زیر را به مدل تحمیل کردند:

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

۱. احتمال‌های خطای اندازه‌گیری گروه‌های مختلف با هم برابرند؛ یعنی

$$\pi^{A|XG}_{a|x۱} = \pi^{A|XG}_{a|x۲} = \pi^{A|X}_{a|x}, \quad a \neq x$$
$$\pi^{B|XG}_{b|x۱} = \pi^{B|XG}_{b|x۲} = \pi^{B|X}_{b|x}, \quad b \neq x$$

و

۲. احتمال شیوع در دو گروه متفاوت‌است؛ یعنی:

$$\pi^{X|G}_{۱|۱} \neq \pi^{X|G}_{۱|۲}\phi.$$

با توجه به این فرض‌ها، پارامترهای مدل مقید عبارت‌اند از:

$$\pi^{G}_{۱} \quad \pi^{X|G}_{۱|۱} \quad \pi^{X|G}_{۱|۲} \quad \pi^{A|X}_{۱|۲} \quad \pi^{A|X}_{۲|۱} \quad \pi^{B|X}_{۱|۲} \quad \pi^{B|X}_{۲|۱}$$

همچنین با تحمیل این قیدها، احتمال رده‌بندی یک واحد نمونه‌ای به خانهٔ (g,a,b) به‌شکل زیر درمی‌آید:

$$\pi^{GAB}_{gab} = \pi^{G}_{۱}\left(\pi^{X|G}_{۱|g}\pi^{A|XG}_{a|۱g}\pi^{B|XG}_{b|۱g} + \pi^{X|G}_{۲|۱}\pi^{A|XG}_{a|۲g}\pi^{B|XG}_{b|۲g}\right)$$

با جایگذاری این احتمال‌ها در فرمول هستهٔ لگاریتم درست‌نمایی (۴) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\ell(\pi \mid n) = \sum_{g=۱}^{۲}\sum_{a=۱}^{۲}\sum_{b=۱}^{۲} n_{gab}\Big[&\log \pi^{G}_{g} \\ &+ \log\Big(\pi^{X|G}_{۱|g}\pi^{A|XG}_{a|۱g}\pi^{B|XG}_{b|۱g} \\ &+ \pi^{X|G}_{۲|۱}\pi^{A|XG}_{a|۲g}\pi^{B|XG}_{b|۲g}\Big)\Big]\end{aligned}$$

براوردهای ماکسیمم درست‌نمایی پارامترها (احتمال‌های خانه‌ای و به‌خصوص احتمال‌های خطا و احتمال شیوع) با استفاده از روش‌های عددی مثل الگوریتم EM به دست می‌آیند.

این‌گونه تحلیل خطای رده‌بندی به‌راحتی به حالتی که متغیر مورد نظر، متغیری چندحالتی است (با فرض دو اندازه‌گیری) تعمیم داده می‌شود. فرض کنید X و در نتیجه A و B هر یک K رسته دارند و متغیر گروه‌بندی، جامعه را به L گروه تقسیم کند. همچنین فرض کنید $\pi^{X|G}_{x|g}, x = ۱,\ldots,K$ شیوع واقعی هر رسته در هر یک از زیرگروه‌های جامعه $(\sum_{x=۱}^{K}\pi^{X|G}_{x|g} = ۱)$ و $\pi^{A|XG}_{a|xg}, \pi^{B|XG}_{b|xg}, a \neq x, b \neq x$ احتمال‌های بدرده‌بندی کردن باشند. در این صورت، هستهٔ لگاریتم درست‌نمایی برای جدول GAB به‌صورت زیر است:

$$\ell(\pi \mid GAB) = \sum_{g}\sum_{a}\sum_{b} n_{gab}\log\left(\pi^{GAB}_{gab}\right)$$

که تحت شرط استقلال موضعی خطاهای اندازه‌گیری داریم:

$$\pi^{GAB}_{gab} = \sum_{x}\pi^{G}_{g}\pi^{X|G}_{x|g}\pi^{A|XG}_{a|xg}\pi^{B|XG}_{b|xg}$$

در این حالت، تعداد خانه‌های جدول رده‌بندی تقاطعی GAB برابر با $LK^۲$ و در نتیجه درجهٔ آزادی آن برابر با $LK^۲ - ۱$ است زیرا مجموع شمارهای همهٔ خانه‌ها برابر با تعداد کل مشاهده‌ها (n) است. برای براورد $LK(۲K-۱)-۱$ پارامتر مدل از فرض برابری احتمال‌های خطا در زیرگروه‌ها استفاده می‌شود، بنا بر این تعداد پارامترها $LK + ۲k(k-۱) - ۱$ است.

برای حالت $L = ۲$ تعداد پارامترهای مدل برابر با درجهٔ آزادی جدول، یعنی $۲K^۲ - ۱$ می‌شود و بنا بر این این مدل همواره اشباع شده است؛ در نتیجه صورت بسته‌ای برای براورد ماکسیمم درست‌نمایی (MLE) پارامترهای مدل به دست می‌آید. ولی برای حالت‌هایی که $L \geq ۳$، مدل اشباع نشده بوده و برای تعیین MLEها باید از روش‌های عددی مانند الگوریتم EM استفاده کرد.

حالت کلّی‌تر، وجود بیش از دو اندازه‌گیری برای متغیر رسته‌ای چندحالتی نیز قابل تصور است. به‌عنوان مثال اگر سه اندازه‌گیری A و B و C برای متغیر نهان X با K رسته وجود داشته باشد، فرض استقلال موضعی به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pi^{ABC|X}_{abc|x} = \pi^{A|X}_{a|x}\pi^{B|X}_{b|x}\pi^{C|X}_{c|x}$$

و در هستهٔ تابع درست‌نمایی، احتمال زیر قرار داده می‌شود:

$$\pi^{ABC}_{abc} = \sum_{x}\pi^{X}_{x}\pi^{A|X}_{a|x}\pi^{B|X}_{b|x}\pi^{C|X}_{c|x}$$

درجهٔ آزادی جدول ABC برابر با $K^۳ - ۱$ و تعداد پارامترهای مدل نامقید برابر با $(K-۱)(۳K+۱)$ است. در بخش بعدی، حالت کلّی مدل‌بندی خطای رده‌بندی، فرض‌هایی که برای شناسایی‌پذیری مدل‌های خطای رده‌بندی نیاز است و همچنین روش‌های براورد آنها با فرض سه اندازه‌گیری A و B و C روی متغیر X ارائه می‌شوند.

۳ مدل ردهٔ نهان استاندارد

در این قسمت، حالت سه اندازه‌گیری یا بیش‌تر را بررسی می‌کنیم و به بیان یک ساختار اندازه‌پذیر توسط چند نشان‌گر که برای اندازه‌گیری آن ساختار طراحی شده‌اند، می‌پردازیم. گفته شد که

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

LCA چارچوبی برای بررسی رابطهٔ میان متغیر واقعی و متغیرهایی که برای اندازه‌گیری آن طراحی شده‌اند، فراهم می‌آورد. یعنی اگر X متغیر نهان (متغیر واقعی) و A و B و C نشان‌گرهای X (که برای اندازه‌گیری X طراحی شده‌اند) باشند، LCA به بررسی رابطهٔ بین X و A و B و C می‌پردازد.

[۱] با تعمیم روش [۷]، رهیافت LCA را به تفصیل، معرفی کرده است. او با تعریف متغیرهای زیر و تحت شرط‌هایی که اصل‌های رده‌بندی هستند، ساده‌ترین مدل ردهٔ نهان را که LC استاندارد نامیده می‌شود، ارائه کرد.

متغیرهای مدل ردهٔ نهان به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شوند:
متغیر نهان X: که فرض می‌شود در شرایط آرمانی، اندازه‌پذیر است، ولی در شرایط واقعی با خطا اندازه‌گیری می‌شود،
رده‌های نهان: رسته‌های X،
متغیر آشکار: متغیرهایی مثل A و B و C و G که مشاهده می‌شوند،
متغیر نشان‌گر: متغیر آشکاری که به‌طور ویژه برای اندازه‌گیری X طراحی شده است (مثل A و B و C)،
متغیر گروه‌بندی: متغیر آشکار دیگری که برای شرح پراکندگی متغیر نهان یا احتمال‌های خطا در مدل ظاهر می‌شود (مثل G). این متغیر بر خلاف متغیر نشان‌گر برای اندازه‌گیری X طراحی نشده است.
احتمال پاسخ مثل $\pi^{A|X}_{a|x} = P(A = a \mid X = x)$: احتمال شرطی نشان‌گرها به‌شرط متغیر نهان،
احتمال خطا $\pi^{A|X}_{a|x}, \forall a \neq x$: نوعی احتمال پاسخ است که موردهایی را که در آنها X و نشان‌گر آن موافق نیستند را در نظر می‌گیرد، و
احتمال درستی $\pi^{A|X}_{a|x}, \forall a = x$: نوعی احتمال پاسخ است که موردهایی که در آن رستهٔ متغیر نشان‌گر و ردهٔ نهان یکسان‌اند در نظر می‌گیرد.
رابطهٔ زیر برای $\pi^{A|X}_{a|x}$ برقرار است:

$$\sum_{a \neq x} \pi^{A|X}_{a|x} = ۱ - \pi^{A|X}_{a|x=a}$$

تحت شرط استقلال موضعی، هستهٔ تابع درست‌نمایی برای جدول رده‌بندی تقاطعی ABC بر حسب X به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\pi^{ABC}_{abc} = \sum_{x} \pi^{X}_{x} \pi^{A|X}_{a|x} \pi^{B|X}_{b|x} \pi^{C|X}_{c|x} \qquad (۴-)$$

مدل (۵) یکی از ساده‌ترین مدل‌های ردهٔ نهان است که مدل LC استاندارد نامیده می‌شود.

۴ پارامتری‌سازی مدل ردهٔ نهان

برای توصیف یک مدل ردهٔ نهان، چهار رهیافت مدل‌بندی یا پارامتری‌سازی را معرفی کرده است [۱]، که عبارت‌اند از: رهیافت پارامتری‌سازی مدل احتمالاتی،[۶] رهیافت مدل لگ‌خطی[۷] با یک متغیر نهان، رهیافت مدل مسیر تعدیل‌یافته[۸] و رهیافت مدل نموداری[۹] با استفاده از نمودارهای مسیر. در این بخش فقط به رهیافت پارامتری‌سازی مدل احتمالاتی اشاره می‌شود.

۱.۴ پارامتری‌سازی مدل احتمالاتی LC مدل استاندارد

مدل احتمالاتی، درست‌نمایی جدول رده‌بندی تقاطعی مشاهده‌شده را بر حسب احتمال‌های شرطی و حاشیه‌ای مربوط به هر خانهٔ این جدول بیان می‌کند. مدل احتمالاتی ردهٔ نهان، مدل احتمالاتی‌ای است که شامل یک یا چند متغیر نهان باشد.

به‌عنوان مثال، فرض کنید LCA شامل سه نشان‌گر A و B و C برای متغیر نهان X به‌ترتیب با تعداد رده‌های k_A، k_B، k_C و k_x باشد (در بیش‌تر مدل‌ها فرض می‌شود $k_A = k_B = k_C = k_x$). یک مدل درست تعیین‌شده برای جدول رده‌بندی تقاطعی ABC باید بدون ابهام این، احتمال این‌که واحد انتخاب شدهٔ iام درون خانهٔ (a, b, c) جدول قرار گیرد را بر حسب پارامترهای π^{X}_{x}، $\pi^{A|X}_{a|x}$، $\pi^{B|X}_{b|x}$، $\pi^{C|X}_{c|x}$ تعریف کند، که $x = ۱, \ldots, k_x - ۱$. تعداد پارامترها در این مدل برابر با $k_x(k_A + k_B + k_C - ۲)$ است (که از جمع $k_x - ۱$ پارامتر مستقل متناظر با π^{X}_{x}، $k_x(k_A - ۱)$ پارامتر مستقل متناظر با $\pi^{A|X}_{a|x}$، $k_x(k_B - ۱)$ پارامتر مستقل متناظر با $\pi^{B|X}_{b|x}$ و $k_x(k_C - ۱)$ پارامتر مستقل متناظر با $\pi^{C|X}_{c|x}$ حاصل می‌شود). احتمال خانهٔ (a,b,c) در مدل LC استاندارد، برابر است

[۶] Proability Model
[۷] Log-Linear Model
[۸] Modified Path Model
[۹] Graphical Model

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

با:

$$\pi_{abc}^{ABC} = \sum_x \pi_x^X \pi_{a|x}^{A|X} \pi_{b|x}^{B|X} \pi_{c|x}^{C|X}$$

تابع درست‌نمایی چندجمله‌ای کامل در مدل LC استاندارد به‌صورت زیر نوشته می‌شود (برای جدول رده‌بندی تقاطعی ABC که n_{abc} فراوانی خانهٔ (a,b,c) است):

$$n = \sum_{abc} n_{abc}$$

$$\ell(\pi \mid n) = \frac{n!}{\prod_a \prod_b \prod_c n_{abc}!} \times \prod_a \prod_b \prod_c \left(\sum_x \pi_x^X \pi_{a|x}^{A|X} \pi_{b|x}^{B|X} \pi_{c|x}^{C|X} \right)^{n_{abc}}$$

و لگاریتم تابع درست‌نمایی برابر است با:

$$\ell(\pi \mid n) = const + \sum_a \sum_b \sum_c n_{abc} \log \left(\sum_x \pi_x^X \pi_{a|x}^{A|X} \pi_{b|x}^{B|X} \pi_{c|x}^{C|X} \right)$$

بنا بر این هستهٔ لگ تابع درست‌نمایی مدل LC استاندارد به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\ell = \sum_a \sum_b \sum_c n_{abc} \log \left(\sum_x \pi_x^X \pi_{a|x}^{A|X} \pi_{b|x}^{B|X} \pi_{c|x}^{C|X} \right) \qquad (۳-)$$

طبق تعریف، مجموع احتمال‌ها روی رسته‌های دوبه۲دو ناسازگار، برابر با ۱ است:

$$\sum_x \pi_x^X = \sum_a \pi_{a|x}^{A|X} = \sum_b \pi_{b|x}^{B|X} = \sum_c \pi_{c|x}^{C|X} = ۱$$

تنها شرط مدل LC استاندارد، همین است و به همین دلیل، به آن مدل ردهٔ نهان نامقید هم گفته می‌شود.

در مدل‌های LC مقید، قیدهای اضافی بر اساس ملاحظه‌های عملی یا نظری به مدل نامقید تحمیل می‌شوند. معمول‌ترین قیدها عبارت‌اند از:

۱. یک احتمال را برابر با برخی مقدارهای ثابت فرض می‌کنند.

۲. دو یا چند احتمال را با هم برابر می‌گیرند.

۱.۱.۴ براورد پارامترهای مدل LC

اگر X به‌جای این‌که متغیر نهان باشد، یک متغیر مشاهده‌شده (آشکار) باشد، لگاریتم تابع درست‌نمایی برای خانهٔ (x,a,b,c) از جدول رده‌بندی تقاطعی XABC به‌صورت زیر است:

$$\ell = \sum_x \sum_a \sum_b \sum_c n_{xabc} \log(\pi_{xabc}^{XABC}) \qquad (۲-)$$

که در آن n_{xabc} فراوانی خانهٔ (x,a,b,c) جدول تقاطعی XABC است و π_{xabc}^{XABC} احتمال قرارگیری واحد iام نمونه در خانهٔ (x,a,b,c) است و از مدلی که باید تعیین کنیم، پیروی می‌کند. برای محاسبهٔ براورد ماکسیمم درست‌نمایی در این شرایط، نرم‌افزارهای آماری بسیاری موجودند.

در حالتی که X مشاهده‌نشده است و فقط $n_{abc} = \sum_x n_{xabc}$ در دست است، داریم:

$$m_{abc} = E(n_{abc})$$

$$\pi_{abc}^{ABC} = \sum_x \pi_{xabc}^{XABC}$$

در نتیجه:

$$m_{abc} = n\pi_{abc}^{ABC} = n \sum_x \pi_{xabc}^{XABC}$$

$$\ell = \sum_a \sum_b \sum_c n_{abc} \log \left(\sum_x \pi_{xabc}^{XABC} \right)$$

وجود تابع مجموع، درون لگاریتم در براورد ماکسیمم درست‌نمایی، مشکل‌هایی به همراه دارد که برای رهایی از آنها می‌توان از روش‌های عددی مثل الگوریتم EM و نیوتن-رافسون کمک گرفت. الگوریتم EM با استفاده از بسیاری نرم‌افزارها از جمله ℓ_{EM} [۱۳] قابل دسترس است.

۲.۱.۴ الگوریتم EM برای پارامتری‌سازی احتمالاتی

در جدول ABC شمارش در خانهٔ (a,b,c) با نماد n_{abc} نشان داده می‌شود. فرض می‌شود X متغیر نهان و سه نشان‌گر آن (A,B,C) دوحالتی هستند. پس تعداد پارامترها ۷=۱-(۲-۲+۲+۲)۲ است. الگوریتم EM بین گام E و گام M حرکت می‌کند تا ملاک همگرایی تعیین‌شده، برقرار شود. مقدارهای پارامترها در tامین تکرار با $\pi_۱^{x(t)}$، $\pi_{۱|x}^{A|X(t)}$، $\pi_{۱|x}^{B|X(t)}$ و $\pi_{۱|x}^{C|X(t)}$ نشان داده می‌شوند.

در ابتدا مقدارهای آغازین پارامترها در گام E وارد می‌شوند (این مقدارها توسط کاربر یا به‌طور تصادفی توسط نرم‌افزار اختیار می‌شوند). در این گام برای tامین تکرار، براوردی از جدول رده‌بندی تقاطعی داده‌های کامل که با $XABC^{(t)}$ نشان داده

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

می‌شود، قابل محاسبه است. شمار خانهٔ (x,a,b,c) در جدول $^{(t)}XABC$ به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$^{(t)}n_{xabc} =^{(t)} \pi^{X|ABC}_{x|abc} n_{abc}$$

با استفاده از قاعدهٔ بیز داریم:

$$^{(t)}\pi^{X|ABC}_{x|abc} = \frac{^{(t)}\pi^{XABC}_{xabc}}{^{(t)}\pi^{XABC}_{۱abc} +^{(t)} \pi^{XABC}_{۲abc}}$$

بر اساس فرض‌های مدل LC، هر قید ثابتی که بر پارامترها تحمیل شود، باید در این گام با مقدارهای متناظرش، جایگزین شود.

در گام M، از این براوردهای جدول XABC برای محاسبهٔ MLE پارامترها با استفاده از درست‌نمایی داده‌های کامل استفاده می‌شود.

$$\ell_{full} = \log(\ell_{full}) = \sum_x \sum_a \sum_b \sum_c n_{xabc}$$
$$\log\left(\sum_x \pi^X_x \pi^{A|X}_{a|x} \pi^{B|X}_{b|x} \pi^{C|X}_{c|x}\right)$$

با هفت بار مشتق گرفتن از این تابع، نسبت به هفت پارامتر مورد نظر، به هفت معادله درست‌نمایی می‌رسیم که با برابر با صفر قرار دادن این معادله‌ها، براورد پارامترها به‌صورت زیر به دست می‌آید.

$$^{(t+۱)}\pi^X_۱ = \frac{^{(t)}n_{x+++}}{n},$$
$$^{(t+۱)}\pi^{A|X}_{a|x} = \frac{^{(t)}n_{ax++}}{^{(t)}n_{x+++}},$$
$$^{(t+۱)}\pi^{B|X}_{b|x} = \frac{^{(t)}n_{x+b+}}{^{(t)}n_{x+++}},$$
$$^{(t+۱)}\pi^{C|X}_{c|x} = \frac{^{(t)}n_{x++c}}{^{(t)}n_{x+++}}.$$

از این براوردها استفاده شده، تکرار بعدی الگوریتم EM شروع می‌شود و تا جایی پیش می‌رود که تفاوت حل‌های براوردهای پارامترها بین دو تکرار، کوچک‌تر از مقدار همگرایی شود. در این‌جا گفته می‌شود الگوریتم به‌طور کامل همگرا شده است و بنا بر این احتمال شیوع و احتمال‌های خطا براورد می‌شوند.

بیش‌ترین فایدهٔ الگوریتم EM زمانی است که هیچ صورت بسته‌ای برای معادله‌های درست‌نمایی داده‌های ناکامل موجود نباشد، در حالی‌که معادله‌های درست‌نمایی داده‌های کامل به‌راحتی قابل حل باشند. پس الگوریتم EM برای بسیاری از مدل‌های LC آرمانی است. روش‌های نیوتن-رافسون و امتیازبندی فیشر به مشتق دوم معادله‌های درست‌نمایی بر حسب پارامترها نیازمند هستند، که این باعث کند شدن سرعت همگرایی آنها نسبت به الگوریتم EM می‌شود که به مشتق دوم (مگر برای براوردهای مدل‌مبنای خطای استاندارد براوردهای پارامترهای مدل) نیاز ندارد. همچنین این روش‌ها بر خلاف الگوریتم EM به بسیار وابسته مقدارهای آغازین هستند.

۵ ارزیابی مدل

مدل‌های ردهٔ نهان می‌توانند با استفاده از آمارهٔ نیکویی برازش خی‌دو مثل مدل‌های لگ‌خطی سنتی، آزمون شوند. فرض کنید n_{abc} شمارش مشاهده شده برای خانهٔ (a,b,c) از جدول رده‌بندی تقاطعی ABC، و $\hat{m}_{abc}$ شمارش براورد شده تحت مدل مفروض باشند. در این صورت آمارهٔ خی‌دو پی‌یرسون به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$X^۲ = \sum_{abc} \frac{(n_{abc} - \hat{m}_{abc})^۲}{\hat{m}_{abc}}$$

و آمارهٔ انحراف عبارت است از:

$$G^۲ = ۲\sum_{abc} n_{abc} \log\left(\frac{n_{abc}}{\hat{m}_{abc}}\right)$$

شرط پذیرفته شدن مدل این است که مقدار محاسبه‌شدهٔ $X^۲$ یا $G^۲$ کوچک‌تر از مقدار $\chi^۲_{df}$ معیار با درجهٔ آزادی

$$df = k - np - ۱ \qquad (۱-)$$

باشد، که k تعداد خانه‌های جدول و np تعداد پارامترهای مدل می‌باشند. همچنین اگر p مقدار آمارهٔ $X^۲$ کوچک باشد (به‌عنوان مثال، کم‌تر از ۰/۰۵ مدل رد می‌شود و قضاوت می‌شود که برازش خوبی به داده‌ها صورت نگرفته است.

اگر $df = ۰$، مدل اشباع‌شده است. اما اگر $df <$، مدل شناسایی‌ناپذیر است و نمی‌توان پارامترها را براورد کرد. در این حالت باید یا قید به مدل تحمیل شود یا تعداد خانه‌های جدول افزایش یابد؛ به‌عنوان مثال، متغیر گروه‌بندی وارد مدل شود.

۶ کاربرد

به‌منظور تحلیل خطاها، یک آمارگیری در سطح یکی از دانشکده‌های دانشگاه‌های تهران اجرا شد. با توجه به نیاز به وجود مقدارهای واقعی متغیرها برای براورد اریبی‌ها، موضوع آمارگیری باید طوری انتخاب و اجرا می‌شد که مقدار به‌طور

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

تقریبی بدون خطای متغیرها قابل دسترسی باشند. در قسمت آموزش این دانشکده برخی اطلاعات در مورد وضعیت تحصیلی دانشجویان ثبت می‌شود که می‌توان این اندازه‌ها را اندازه‌های استاندارد طلایی تلقی کرد. بنا بر این در این بررسی، هدف‌ها و جامعهٔ هدف به‌صورت زیر در نظر گرفته شدند.

۱.۶ طرح مطالعه

جامعهٔ هدف در این کاربرد، همهٔ دانشجویان مقطع کارشناسی ارشد ورودی سال‌های ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰ دانشکدهٔ مورد نظر بوده است که در نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ در رشته‌های موجود در این دانشکده اشتغال به تحصیل داشته‌اند. در این مطالعه پرسش‌نامه‌ای طراحی و واحدهای نمونه‌ای به‌تصادف به سه پرسشگر مورد استفاده منتسب شدند و به‌صورت تلفنی مورد مصاحبه قرار گرفتند.

چارچوب نمونه‌گیری شامل فهرست همهٔ شماره‌های دانشجویی دانشجویان کارشناسی ارشد ورودی سال‌های ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰ همهٔ رشته‌های این دانشکده به همراه با معدل کل، تعداد واحدهای گذرانیده‌شده، تعداد ترم‌های مشروطی تا انتهای نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ و نیز شمارهٔ تماس آنها بود که از طریق ادارهٔ تحصیلات تکمیلی این دانشکده در اختیار پژوهشگر قرار گرفت.

از آن‌جا که به نظر می‌رسید وضعیت نمره‌ها و شرایط درسی برای رشته‌های مختلف متفاوت باشد، برای گزینش نمونه از روش نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده شد. چارچوب بر اساس رشته‌های تحصیلی طبقه‌بندی شد و سه طبقهٔ آمار اقتصادی-اجتماعی (طبقهٔ اوّل)، آمار ریاضی (طبقهٔ دوم) و ریاضیات مالی (طبقهٔ سوم) تشکیل شدند.

واحد نمونه‌گیری در این آمارگیری، هر یک از دانشجویان کارشناسی ارشد رشته‌های آمار اقتصادی-اجتماعی، آمار ریاضی، و ریاضیات مالی ورودی سال‌های ۱۳۸۹ و ۱۳۹۰ دانشکدهٔ مورد نظر بوده است که در نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ اشتغال به تحصیل داشته‌اند. جامعهٔ هدف در این مطالعه شامل $N = ۹۴$ دانشجو بوده است. اندازه‌های جامعهٔ هر یک از طبقه‌ها در جدول ۲ آمده است.

برای تعیین تعداد واحدهای نمونه‌ای در هر طبقه، n_h، یک نمونهٔ مقدماتی از هر طبقه به اندازهٔ n_{hpre} به‌صورت تصادفی انتخاب و اندازهٔ نمونهٔ نهایی برای هر طبقه از فرمول زیر محاسبه شد.

$$n_h = \frac{Z^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}} s^{۲}_h}{e^{۲}_h + \frac{Z^{۲}_{\frac{\alpha}{۲}} s^{۲}_h}{N_h}} \qquad (۰)$$

که در آن $s^{۲}_h = \frac{n_{hpre}}{n_{hpre}-۱}\hat{p}_{hpre}(۱-\hat{p}_{hpre})$، و N_h اندازهٔ جامعهٔ طبقهٔ hام، n_{hpre} اندازهٔ نمونهٔ مقدماتی از طبقهٔ h، $\hat{p}_{hpre}$ براورد نسبت متناظر با طبقهٔ h، e_h حاشیهٔ خطای طبقهٔ h و $Z_{\frac{\alpha}{۲}}$ صدک $(۱-\frac{\alpha}{۲})$ام توزیع نرمال استاندارد می‌باشند. در این مطالعه $\alpha = ۰/۱$ و $e_h = ۰/۲$، $h = ۱,۲,۳$ در نظر گرفته شدند.

متغیرهای مورد بررسی، از طریق پرسش‌های زیر اندازه‌گیری شدند:

$Q۲$: آیا تا پایان ترم اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ نمرهٔ ضعیف و ناخوشایندی از هیچ‌یک از درس‌های کارشناسی ارشدتان گرفته‌اید؟

بله □ خیر □

$Q۳$: کم‌ترین معدل ترمی شما تا پایان نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ در کدام یک از رسته‌های زیر قرار داشته است؟

کم‌تر از ۱۴□ ۱۴-۱۶□ ۱۶-۱۸□

بیش‌تر از ۱۸□

$Q۴$: آیا تا پایان نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ از هیچ‌یک از درس‌های کارشناسی ارشدتان افتاده‌اید؟

بله □ خیر □

$Q۷$: آیا در هیچ ترمی تا پایان نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۰-۱۳۹۱ مشروط شده‌اید؟

بله □ خیر □

متغیرهای دوحالتی $Y_۲, Y_۳, Y_۴, Y_۷$ به‌ترتیب متناظر با چهار پرسش $Q۲, Q۳, Q۴, Q۷$ تعریف می‌شوند، به‌طوری که متغیرهای $Y_۲, Y_۴, Y_۷$ در صورتی که دانشجو پاسخ بله را انتخاب کند، مقدار ۱ و در صورت انتخاب گزینهٔ «خیر»، مقدار «صفر» را اختیار می‌کنند. متغیر $Y_۳$ نیز در صورتی که فرد رستهٔ کم‌تر از ۱۴ را انتخاب کرده باشد، مقدار ۱ و در صورت انتخاب بقیهٔ گزینه‌ها مقدار صفر را اختیار می‌کند.

برای محاسبهٔ اندازهٔ نمونهٔ هر طبقه، بزرگ‌ترین واریانس متناظر با این چهار متغیر در نظر گرفته شد. با قرار دادن $\alpha = ۰/۱$ و $e_h = ۰/۲$ در فرمول (۹)، اندازهٔ نمونه برای هر طبقه براورد شد. جدول ۳ اندازهٔ نمونهٔ محاسبه‌شده برای هر طبقه را نشان می‌دهد.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

جدول ۲. اندازهٔ جامعهٔ هر یک از طبقه‌ها

طبقه	آمار اقتصادی-اجتماعی	آمار ریاضی	ریاضیات مالی
اندازهٔ جامعه‌ای	$N_۱ = ۳۱$	$N_۲ = ۳۴$	$N_۳ = ۲۹$

جدول ۳. اندازهٔ نمونهٔ هر یک از طبقه‌ها

طبقه	آمار اقتصادی-اجتماعی	آمار ریاضی	ریاضیات مالی
اندازهٔ نمونهٔ مقدماتی	۳	۷	۴
$S^۲$بزرگ‌ترین	۰/۳۳۳	۰/۲۸۵	۰/۳۳۳
مقدار فرمول (۹)	۱۳/۰۰۷	۱۲/۲۵۵۷	۱۲/۶۳۵۲
اندازهٔ نمونه	$n_۱ = ۱۳$	$n_۲ = ۱۳$	$n_۳ = ۱۳$
تعداد نمونهٔ مانده	۱۰	۶	۹

۲.۶ براورد خطاها با استفاده از LCA

در این قسمت، خطای رده‌بندی مربوط به هر پرسش، در ابتدا در حالتی که مقدارهای واقعی در دست است و سپس در حالت عدم دسترسی به اندازه‌های واقعی با کمک LCA براورد می‌شوند.

۱.۲.۶ براورد ϕ و θ با استفاده از داده‌های ثبتی

گفته شد که دو پرسش Q۳ و Q۷ پرسش‌نامه برای اندازه‌گیری خصیصه‌ای یکسان یعنی نسبت مشروطی دانشجویان طراحی شده‌اند و باید به پاسخ‌های مشابهی منتهی شوند (البته پرسش Q۳ نیز به متغیر دوحالتی تبدیل شده است، در صورتی که پاسخگو رستهٔ معدل کم‌تر از ۱۴ را انتخاب کرده باشد، متغیر $Y_۳$ مقدار ۱ و در صورت انتخاب بقیهٔ رسته‌ها، مقدار صفر را می‌گیرد). با رسم جدول رده‌بندی تقاطعی این دو پرسش، خانه‌های غیر قطر اصلی جدول نشان‌دهندهٔ عدم توافق بین پاسخ فرد به این دو پرسش و نشان‌دهندهٔ وجود خطای رده‌بندی توسط دست‌کم یکی از پرسش‌ها می‌باشند. این جدول برای پرسش‌های Q۳ و Q۷ در جدول ۴ نشان داده شده است. در این جدول دیده می‌شود که یک نفر که به پرسش Q۳ پاسخ مثبت داه، پاسخش به Q۷ منفی بوده است و سه نفر که به Q۷ پاسخ مثبت داده‌اند، به Q۳ پاسخ منفی داده‌اند.

جدول ۴. جدول رده‌بندی تقاطعی پاسخ‌های دو پرسش Q۳ و Q۷

		$Y_۷$		
		بله	خیر	کل
$Y_۳$	بله	۵	۱	۶
	خیر	۲	۳۰	۳۳
	کل	۸	۳۱	۳۹

اما جدول ۴ برای انتخاب پرسش مناسب‌تر برای نیل به هدف تعیین نسبت مشروطی اطلاعی به دست نمی‌دهد. با مقایسهٔ پاسخ‌های پرسش‌ها با داده‌های ثبتی (داده‌های کارنامه‌ای Y_M)، پرسشی که مطابقت بیش‌تری با رده‌بندی داده‌های ثبتی داشته باشد، مناسب‌تر است (جدول ۵).

جدول ۵. جدول رده‌بندی تقاطعی پاسخ‌های دو پرسش و داده‌های ثبتی Q۳ و Q۷

		Y_M		
		بله	خیر	کل
$Y_۳$	بله	۵	۱	۶
	خیر	۴	۲۹	۳۳
	کل	۹	۳۰	۳۹
$Y_۳$	بله	۸	۰	۸
	خیر	۱	۳۰	۳۱
	کل	۹	۳۰	۳۹

با توجه به جدول ۵ (که در آن داده‌های ثبتی کارنامه‌ای، اندازه‌های استاندارد طلایی، Y_M، فرض شده‌اند)،یک نفر وجود دارد که پاسخ او به پرسش Q۳ مثبت بوده، یعنی اعلام کرده که ترم مشروطی داشته، در حالی که طبق کارنامهٔ وی درس افتاده نداشته است. همچنین چهار نفری که اعلام نکرده‌اند ترم مشروطی داشته‌اند، در معدل‌های ترمی آنها معدل زیر ۱۴ یافت شده است. بنا بر این بین پاسخ‌های افراد بهQ۳ و اندازه‌های استاندارد طلایی (Y_M) به‌طور کامل مطابقت وجود ندارد. با نظر به پرسش Q۷ نیز مشاهده می‌شود که یک نفری که ترم مشروطی داشته، آن را اظهار نکرده و پاسخ منفی به این پرسش داده است؛ پس هیچ‌یک از دو پرسش Q۳ و Q۷ بدون خطا نبوده‌اند.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

فرض کنید ϕ و θ به‌ترتیب نشان‌دهندهٔ احتمال‌های خطای مثبت کاذب یعنی احتمال این‌که فردی که در واقعیت مشروطی نداشته، در رستهٔ دانشجویان مشروط شده قرار داده شده باشد) و احتمال خطای نادرست‌منفی (یعنی احتمال این‌که فردی که در واقعیت مشروطی داشته به‌اشتباه در رستهٔ دانشجویان غیر مشروطی رسته‌بندی شده باشد) برای اندازه‌گیری y باشند، که در ۱ تعریف شده‌اند. با دانستن مقدار واقعی μ_i طبق رابطهٔ ۲ می‌توان این احتمال‌ها را براورد کرد. بنا بر این با استفاده از داده‌های جدول ۵ براوردهای θ و ϕ برای Q۳ و Q۷ به‌صورت زیر به دست می‌آیند.

$$\hat{\phi}_{۳} = \frac{۱}{۱+۲۹} = ۰/۰۳۳, \quad \hat{\phi}_{۷} = \frac{۰}{۰+۳۰} = ۰,$$
$$\hat{\theta}_{۳} = \frac{۴}{۴+۵} = ۰/۴۴, \quad \hat{\theta}_{۷} = \frac{۱}{۱+۸} = ۰/۱۱.$$

بر اساس پرسش اوّل (Q۳)، حدود ۳ درصد از دانشجویانی که مشروط نشده‌اند، اظهار داشته‌اند که مشروط شده‌اند و حدود ۴۴ درصد از دانشجویانی که دست‌کم در یک ترم از دورهٔ کارشناسی ارشد تا نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ مشروط شده‌اند، گفته‌اند که در هیچ ترمی مشروط نشده‌اند. بر اساس پرسش دوم (Q۷)، هیچ‌یک از دانشجویانی که تا نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ مشروط نشده‌اند، پاسخ مثبت نداده‌اند (یعنی نگفته‌اند که مشروط شده‌ایم) و فقط حدود ۱۱ درصد از کسانی که مشروط شده‌اند، مشروط شدن‌شان را اعلام نکرده‌اند. به نظر می‌رسد که پرسش دوم به نتیجه‌های واقعی‌تری منتهی شده است. بنا بر این پرسش Q۷ برای هدف ما مناسب‌تر بوده است. دلیل این امر می‌تواند وجود عبارت «کم‌ترین معدل ترم» در پرسش اوّل باشد که باعث گمراه شدن پاسخگو و بد فهمیده شدن منظور پرسش شده باشد، که البته با انجام دادن مصاحبهٔ تشخیصی با دانشجویان می‌توان مشکل بد تفسیر شدن پرسش را رفع کرد. علاوه بر این ممکن است افراد، معدل‌های ترم‌های تحصیلی‌شان را فراموش کرده باشند؛ ولی عبارت مشروط شدن که در پرسش دوم آمده است، کم‌تر از ذهن پاسخگو پاک شده باشد.

۲.۲.۶ براورد ϕ و θ به‌روش LCA

در حالتی که داده‌های ثبتی (اندازه‌های استاندارد طلایی) در دسترس نباشند، از روش LCA برای انتخاب پرسش مناسب‌تر به‌کمک براورد پارامترهای ϕ و θی متناظر با پرسش‌ها و مقایسهٔ آنها استفاده می‌شود.

در این کاربرد، دو پرسش Q۳ (کدبندی‌شده به متغیر دوحالتی) و Q۷ به‌عنوان دو نشان‌گر A و B برای متغیر نهان X (که دست‌کم یک بار مشروط شدن دانشجو را نشان می‌دهد) در نظر گرفته شدند. فرض کنید

$$X = \begin{cases} ۱, & \text{اگر دانشجو مشروط شده باشد} \\ ۲, & \text{اگر دانشجو مشروط نشده باشد} \end{cases}$$

$$A, B = \begin{cases} ۱, & \text{اگر پاسخ مثبت باشد} \\ ۲, & \text{اگر پاسخ منفی باشد} \end{cases}$$

با توجه به پاسخ‌های دانشجویان حاضر در نمونه، جدول رده‌بندی تقاطعی AB تشکیل داده شد (جدول ۴). در به کار گیری مدل ردهٔ نهان فرض شد که خطای اندازه‌گیری نشان‌گرها مستقل از هم هستند؛ یعنی مدل‌های اندازه‌گیری $y_{iA} = \mu_i + \epsilon_{iA}$ و $y_{iB} = \mu_i + \epsilon_{iB}$ برای دو نشان‌گر A و B در نظر گرفته شدند، که در آنها y_{iA} پاسخ فرد i ام به اندازه‌گیری A، y_{iB} پاسخ فرد iام به اندازه‌گیری B، μ_i پاسخ واقعی (مقدار واقعی) فرد i ام، ϵ_{iA} خطای اندازه‌گیری در اندازه‌گیری اوّل، و ϵ_{iB} خطای اندازه‌گیری در باز اندازه‌گیری مجدد هستند.

جدول ۶. جدول رده‌بندی تقاطعی نشان‌گرها و نسبت مشروطی‌ها به تفکیک رشتهٔ تحصیلی

کل	B		G		
	۱	۲			
۲	۱	۱	۱	A	۱
۱۱	۱۰	۱	۲		
۱۳	۱۱	۲	کل		
۳	۰	۳	۱	A	۲
۱۰	۸	۲	۲		
۱۳	۸	۵	کل		
۱	۰	۱	۱	A	۳
۱۲	۱۲	۰	۲		
۱۳	۱۲	۱	کل		

فرض استقلال ϵ_{iA} و ϵ_{iB} با استفاده از آزمون خی‌دو ($\chi^۲$) بررسی شد و این فرض در سطح معنی‌داری ۰/۰۱ رد نشد. مدل‌های مختلفی به داده‌ها برازش داده شد و بر اساس ملاک خی‌دو، مدل احتمالاتی انتخاب شد. سپس با استفاده از نرم‌افزار ℓEM (که الگوریتم EM را به کار می‌گیرد) از رهیافت مدل‌بندی احتمالاتی

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

استفاده و مدل ردهٔ نهان استاندارد (۵) (با این تفاوت که در این‌جا فقط دو نشان‌گر A و B وجود دارد) به شمارش‌های خانه‌ای جدول رده‌بندی تقاطعی (۴) طبق روش بیان‌شده در زیربخش ۲.۱.۴ برازش داده شد. پس از ۱۹ بار تکرار الگوریتم EM و با ملاک همگرایی ۰/۰۰۰۰۰۰۸ براوردهایی برای احتمال‌های پاسخ و نسبت‌های شیوع واقعی به دست آمد. درجهٔ آزادی مدل برازش یافته بر اساس رابطهٔ (۸) برابر است با:

$$df = k - np - ۱ = ۴ - ۵ - ۱ = -۲ < ۰$$

P(G)

1	0.3333 (0.0755)
2	0.3333 (0.0755)
3	0.3333 (0.0755)

P(A|X)

1 | 1	0.6250 (0.1712)
2 | 1	0.3750 (0.1712)
1 | 2	0.0000 (0.0000)
2 | 2	1.0000 (0.0000)

P(X|G)

1 | 1	0.2461 (0.1260)
1 | 2	0.4102 (0.1471)
1 | 3	0.0820 (0.0791)
2 | 1	0.7539 (0.1260)
2 | 2	0.5898 (0.1471)
2 | 3	0.9180 (0.0791)

P(B|X)

1 | 1	0.8334 (0.1522)
2 | 1	0.1666 (0.1522)
1 | 2	0.0000 (0.0000)
2 | 2	1.0000 (0.0000)

شکل ۱. براورد احتمال‌های پاسخ شرطی دو نشان‌گر A و B وضعیت مشروطی

بنا بر این مدل شناسایی‌پذیر نیست. در این حالت می‌توان یک متغیر گروه‌بندی G مثل متغیر رشتهٔ تحصیلی را به‌منظور افزایش درجهٔ آزادی، وارد مدل کرد. این متغیر در صورتی که دانشجو در رشتهٔ آمار اقتصادی - اجتماعی باشد، مقدار ۱، در صورت عضویت دانشجو در طبقهٔ آمار ریاضی مقدار ۲، و در صورتی که پاسخگو دانشجوی رشتهٔ ریاضیات مالی باشد، مقدار ۳ را اختیار می‌کند. جدول رده‌بندی تقاطعی نشان‌گرهای A و B (متناظر با $Y_۳, Y_۷$) به تفکیک رشتهٔ تحصیلی در جدول ۶ آمده است. شمارش‌های خانه‌ای این جدول، داده‌های ورودی برنامهٔ برازش مدل احتمالاتی $\{G\ \ X \mid G\ \ A \mid G\ \ B \mid G\}$ می‌باشند.

بخشی از خروجی برنامهٔ برازش این مدل احتمالاتی که در شکل ۱ آمده است، براورد احتمال‌های پاسخ شرطی دو نشان‌گر A و B را نشان می‌دهد. احتمال‌های خطا که در LCA به‌صورت رابطهٔ (۳) تعریف می‌شوند، از این قسمت از خروجی برنامه استخراج می‌شوند. احتمال خطای نادرست منفی برای A برابر با . درصد براورد شده است؛ یعنی پرسش اوّل در حدود ۳۷ درصد از پاسخگویانی را که در واقع تا انتهای نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۱۳۹۱-۱۳۹۰ دست‌کم یک ترم مشروط شده بودند، به‌عنوان پاسخگویانی که تا انتهای این نیم‌سال مشروط نشده بودند، بدرده‌بندی کرده است. ولی پرسش دوم در حدود ۱۷ درصد (کم‌تر از نصف نسبت مربوط به پرسش اوّل) از افرادی را که در واقع مشروطی داشته‌اند به‌عنوان دانشجویانی که تا آن نیم‌سال در هیچ ترمی مشروط نشده بودند، بدرده‌بندی کرده است. تفاوت احتمال خطای نادرست منفی دو پرسش در حدود ۲۰ درصد بوده است.

هیچ‌یک از پرسش‌های اوّل و دوم، افرادی را که در واقع تا انتهای نیم‌سال اوّل سال تحصیلی ۹۱-۹۰ مشروط نشده بودند بدرده‌بندی نکرده است و این افراد را در رستهٔ دانشجویانی که دست‌کم یک‌بار مشروط شده بودند، قرار نداده است؛ یعنی احتمال خطای مثبت کاذب این دو پرسش، صفر براورد شده است. البته منطقی هم است که افراد به‌اشتباه اظهار نکنند که دارای یک صفت نامطلوب از نظر اجتماعی هستند و صفت مشروط شدن، خصیصه‌ای نیست که افراد به‌دنبال داشتن آن باشند، در حالی که عکس آن محتمل است؛ یعنی در صورت دارا بودن خصیصهٔ نامطلوب، افراد سعی می‌کنند اعلام کنند که این صفت را ندارند. به همین دلیل، احتمال خطای نادرست منفی برای این دو پرسش بیش‌تر از احتمال خطای مثبت کاذب می‌باشد. بنا بر این پرسش دوم، یعنی $Q۷$، بر پرسش اوّل ترجیح داده می‌شود.

۷ بحث و نتیجه‌گیری

تحلیل ردهٔ نهان (LCA) برای براورد برخی پارامترهای مدل خطای آمارگیری به کار می‌رود. همچنین این روش تحلیل، می‌تواند با براورد احتمال خطای مربوط به یک پرسش، طراح پرسش‌نامه را در انتخاب پرسش‌های بهتر یاری کند. در یک آمارگیری کوچک‌مقیاس خطای بدرده‌بندی نسبت دانشجویانی

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]

که دست‌کم یک درس را افتاده‌اند و نیز خطای رده‌بندی نسبت دانشجویانی که دست‌کم یک بار مشروط شده‌اند، محاسبه شد. پرسش‌های Q۳ و Q۷ که برای اندازه‌گیری یک خصیصهٔ یکسان (وضعیت مشروطی دانشجو) در پرسش‌نامه آورده شده‌اند، به‌عنوان نشان‌گرهایی برای خصیصهٔ مورد بررسی (که متغیر نهان نامیده می‌شود) در نظر گرفته شدند. با به کار گیری روش تحلیل ردهٔ نهان، براوردی از خطای رده‌بندی متناظر با هر پرسش به دست آمد. احتمال خطای نادرست منفی متناظر با پرسش Q۳ برابر با ۰/۳۷۵۰ و برای پرسش Q۷ برابر با ۰/۱۶۶۶ براورد شدند. براورد احتمال خطای مثبت کاذب هر دو پرسش نیز صفر به دست آمد.

پرسشی که احتمال‌های خطاهای رده‌بندی متناظر با آن کوچک‌تر بودند، یعنی Q۷ به‌عنوان پرسش مناسب‌تر برگزیده شد.

مراجع

[1] Biemer, P. P. (2011), *Latent Class Analysis of Survey Error*, New York: John Wiley & Sons Inc.

[2] Collins, L. and Lanza, S. (2010), *Latent Class and Latent Transition Analysis*, Hoboken, NJ, New York: John Wiley & Sons Inc.

[3] Goodman, L. A. (1974a), Exploratory Latent Structure Analysis Using Both Identifiable and Unidentifiable models, *Biometrika*, **61**, 215-231.

[4] Goodman, L. A. (1974b), The Analysis of systems of Qualitative Variables When Some of the Variables Are Unobservable. Part I: A modified Latent Structure Approach, *American Journal of Sociology*, **79**, 1179-1259.

[5] Haberman, S. J. (1979), *Analysis of Qualitative Data*, New York: John Wiley & Sons Inc. Academic Press.

[6] Hagenaars, J. A. and McCutcheon, A. L. (2002), *Applied Latent Class Analysis*, New York: John Wiley & Sons Inc. Cambridge University Press.

[7] Hui, S. L. and Walter, S. D. (1980), Estimating the Error Rates of Diagnostic Tests, *Biomertrics*, **36**, 167-171.

[8] Langeheine, R. and Rost, J. (1988), *Sample Survey Methods and Theory*, New York: John Wiley & Sons Inc. Plenum Press.

[9] Lazarsfeld, P. F. (1950a), *The Logical and Mathematical Foundations of Latent Structure Analysis*, in S. A. Stouffer et al., eds., Measurement and prediction, Princeton: University Press, Chapter 10, 362-412.

[10] Lazarsfeld, P. F. (1960b), *Some Latent Structures*, in S. A. Stouffer et al., eds., Measurement and Prediction, Princeton University Press, Princeton, Chapter 11, 362-412.

[11] McCutcheon, A. L. (1987), *Latent Class Analysis, Quantitative applications in the Social Science Series*, Vol. 64, Sage Publication, Thousand Oaks, CA.

[12] Rost, J. and Langeheine, R. (1977), *Application of Latent Trait and Latent Class Models in the Social Sciences*, New York: John Wiley & Sons Inc. Waxmann Munster.

[13] Vermunt, J. K. (1977), LEM: *A General Program for the Analysis of Categorical Data, Tilburg, Department of Methodology and Statistics*, Tilburg University, Netherland.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-06-04]