نتایجی در زمینه توزیع‌های تعادلی و کاربرد آن در مطالعه سیستم های متوالی

پرستو میری[۱]، مهدی توانگر[۲]

چکیده:

توزیع‌های تعادلی کاربرد زیادی در نظریّه قابلیت اعتماد، ترتیب‌های تصادفی و فرآیندهای تصادفی دارند. در واقع منشأ اصلی پیدایش این مفهوم نظریّه تجدید است. در این مقاله مفهوم توزیع تعادلی را معرّفی و خواص مهم آن را بیان می‌کنیم. همچنین برخی نتایج مرتبط با این موضوع را برای طول عمر سیستم متوالی ارائه می‌کنیم. در مقاله حاضر مشخّص سازی توزیع تعمیم یافته پارتو نیز مورد بررسی قرار گرفته و به برخی روابط بین توزیع‌های تعادلی و پایه اشاره شده است.

واژه‌های کلیدی: مفاهیم سالخوردگی، قابلیّت اعتماد، نرخ شکست، میانگین عمر باقیمانده، مشخّص سازی، ترتیب‌های تصادفی.

۱ مقدمه

متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع $X_1, X_2, ...$ را با تابع توزیع مشترک $F(x)$ و میانگین متناهی μ در نظر بگیرید. فرض کنید این متغیرهای تصادفی طول عمر اجزاء (قطعات) یک سیستم باشند به طوری که با از بین رفتن قطعه اوّل، قطعه دوم جایگزین می‌شود، پس از خرابی قطعه دوم، این قطعه با قطعه سوم تعویض می‌شود و الی آخر. برای $n = 1, 2, ...$ تعریف می‌کنیم $Y_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. در این صورت $\{Y_n\}$ یک فرآیند تجدید[۳] را تشکیل می‌دهد. تحت این شرایط، مطالعه ویژگی‌های سالخوردگی سیستم یا مؤلفه‌ی فعال در زمان t حائز اهمیت است. امروزه کاربرد گسترده فرآیند تجدید را می‌توان در بسیاری از تجهیزات و دستگاه‌های مورد استفاده بشر ملاحظه کرد.

فرض کنید U_t و V_t به ترتیب نشان دهنده سن و عمر باقیمانده مؤلفه فعال در زمان t باشد. توزیع مجانبی U_t و V_t را توزیع تعادلی[۴] متناظر با $F(x)$ می‌نامند که دارای تابع چگالی زیر است: (کاکس[۵]،۱۹۶۲)

$$g(x) = \mu^{-1}\bar{F}(x), \quad x > 0, \qquad (۱)$$

که در آن $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$ تابع قابلیت اعتماد است. معمولاً $F(x)$ را توزیع پایه می‌نامند. منشأ اصلی پیدایش این مفهوم نظریّه تجدید است که در آن توزیع تعادلی در واقع توزیع مجانبی زمان‌های بازگشت پیشرو و پسرو است. مطالعات گسترده‌ای روی ویژگی‌های قابلیّت اعتماد این توزیع مانند رفتار نرخ شکست، میانگین عمر باقیمانده و ... انجام شده است. همچنین تلاش‌هایی در جهت یافتن روابط بین توزیع تعادلی و توزیع پایه از نظر ویژگی‌های مختلف قابلیت اعتماد انجام شده است. کاربردهای متعدّدی نیز از توزیع‌های تعادلی در مشخّص سازی توزیع‌های احتمال، تعریف مفاهیم جدید سالخوردگی، ترتیب‌های تصادفی و

[۱]دانشجوی کارشناسی ارشد آمار دانشگاه اصفهان
[۲]استادیار گروه آمار دانشگاه اصفهان

[۳] process renewal
[۴] distribution equilibrium
[۵] Cox
[۶] Gupta
[۷] Deshpande
[۸] Preeth & Nair
[۹] Kirmani & Gupta
[۱۰] Shaked
[۱۱] Shanthikumar

فرآیندهای تصادفی ارائه شده است که برای جزئیات بیشتر می‌توان به گوپتا[۶] (۱۹۷۹)، دشپاندا[۷] و همکاران (۱۹۸۶)، نایر و پریس[۸] (۲۰۰۹)، گوپتا و کرمانی[۹] (۱۹۹۰) و شیکد[۱۰] و شانتیکومار[۱۱] (۲۰۰۷) مراجعه کرد.

توزیع تعادلی در رابطه (۱) را توزیع تعادلی مرتبه اوّل می‌نامند. به عنوان تعمیمی از این توزیع، فاگیولی و پلری[۱۲] (۱۹۹۳) مفهوم توزیع تعادلی مرتبه n را به ازای $n = 1, 2, ...$ به صورت زیر تعریف کرده‌اند. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع توزیع مطلقاً پیوسته $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ با شرط $E(X^n) < \infty$ باشد. تابع قابلیّت اعتماد توزیع تعادلی مرتبه n بر اساس رابطه بازگشتی زیر تعریف می‌شود:

$$S^{(n)}(x) = \frac{1}{\mu^{(n-1)}} \int_x^\infty S^{(n-1)}(u)\, du, \qquad (۲)$$

که در آن

$$\mu^{(n)} = \int_0^\infty S^{(n)}(u)\, du,$$

$$S^{(0)}(x) = \frac{f(x)}{f(0)}. \qquad (۳)$$

پاکس و ناوارو[۱۳] (۲۰۰۷) نشان داده‌اند که $S^{(0)}(x)$ یک تابع قابلیت اعتماد است اگر و فقط اگر $f(x)$ پیوسته و نزولی باشد. لازم به ذکر است که $S^{(1)}(x) = \bar{F}(x)$ تابع قابلیت اعتماد X و $S^{(2)}(x)$ تابع قابلیت اعتماد توزیع تعادلی مرتبه اوّل است.

از جمله کاربردهای توزیع‌های تعادلی در نظریّه قابلیت اعتماد می‌توان به ترتیب‌بندی‌های جزئی و مفاهیم سالخوردگی اشاره کرد که توسط فاگیولی و پلری (۱۹۹۳) ارائه شده است. همچنینناندا[۱۴] و همکاران (۱۹۹۶) ویژگی‌های گشتاوری توزیع تعادلی مرتبه n را مورد مطالعه قرار داده اند. گوپتا (۲۰۰۷) روابط میان توزیع تعادلی و توزیع پایه را بررسی کرده است. به علاوه نتایج مشابهی مرتبط با توزیع تعادلی مرتبه n و توزیع پایه توسط نایر و پریس (۲۰۰۹) ارائه شده است. آنها همچنین ویژگی های مختلف قابلیت اعتماد را برای $S^{(n)}(x)$ و $\bar{F}(x)$ بررسی کرده‌اند که باعث ساده‌تر شدن مقایسه بین توزیع ها شده است.

در مقایسه با حالت پیوسته، بررسی‌های کمتری روی توزیع‌های تعادلی گسسته انجام شده است. گوپتا (۱۹۷۹) توزیع‌های تعادلی گسسته را با مطالعه روی خواص آن ها و مقایسه با توزیع پایه آغاز کرده است. فاگیولی و پلری (۱۹۹۳) رابطه بازگشتی توزیع تعادلی از مرتبه n را در حالت گسسته پس از کار قبلی خود در حالت پیوسته نتیجه گرفتند. بخشی از نظریّه توزیع‌های تعادلی گسسته نیز توسط ویلمت[۱۵] و همکاران (۲۰۰۵) پایه ریزی شده است. وی رابطه بین توزیع‌های پایه و نسخه تعادلی از مرتبه n آن را به دست آورده است. همچنین مفاهیم قابلیت اعتماد مانند تابع نرخ شکست، میانگین عمر باقیمانده و برخی از دیگر ویژگی‌های سالخوردگی توزیع های تعادلی گسسته از مرتبه n و رابطه این توزیع های تعادلی با توزیع پایه در نایر و همکاران (۲۰۱۲) مورد مطالعه قرار گرفته است.

در مقاله حاضر مفهوم توزیع‌های تعادلی را معرّفی کرده و خواص مهم آن را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. در بخش ۲، نتایجی مرتبط با توزیع تعادلی طول عمر سیستم های متوالی ارائه شده است. بخش ۳ به مشخّص سازی توزیع تعمیم یافته پارتو بر مبنای توزیع‌های تعادلی اختصاص یافته است. در بخش ۴ توزیع‌های تعادلی از نقطه نظر مفاهیم سالخوردگی و ترتیب های تصادفی مورد بررسی قرار گرفته است. در بخش ۵ نیز توزیع های تعادلی گسسته معرّفی شده اند.

۲ توزیع تعادلی طول عمر سیستم متوالی

فرض کنید X یک متغیر تصادفی با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(x)$ و تابع چگالی $f(x)$ باشد. می‌توان نشان داد که رابطه زیر بین $S^{(n)}(x)$ و $\bar{F}(x)$ برقرار است:

$$S^{(n)}(x) = \frac{r^{(n-1)}(x)}{r^{(n-1)}(0)} \bar{F}(x), \qquad (۴)$$

که در آن $r^{(n)}(x) = E\left[(X-x)^n \,|X > x\right]$ n–اُمین گشتاور عمر باقیمانده X است (نایر و پریس، ۲۰۰۹).

لازم به ذکر است که تابع نرخ شکست و تابع میانگین عمر

[۱۲] Pellery & Fagiouli

[۱۳] Navarro & Pakes

[۱۴] Nanda

[۱۵] Willmot

باقیمانده متناظر با $S^{(n)}(x)$ به ترتیب عبارت از

$$h^{(n)}(x) = -\frac{d}{dx}\log S^{(n)}(x),$$

و

$$m^{(n)}(x) = \frac{\int_x^\infty S^{(n)}(u)du}{S^{(n)}(x)},$$

است. بنابراین برای هر $n = 2, 3, 4, ..$ داریم

$$h^{(n)}(x) = \left[m^{(n-1)}(x)\right]^{-1}. \qquad (۵)$$

رابطه کلّی بین $h^{(n)}(x)$ و $m^{(n)}(x)$ به صورت زیر است:

$$h^{(n)}(x) = \frac{1 + \frac{d}{dx}m^{(n)}(x)}{m^{(n)}(x)}. \qquad (۶)$$

ساده ترین نوع ساختار سیستم ها در مهندسی قابلیّت اعتماد، سیستم متوالی است که به سیستمی اطلاق می‌شود که فعّال بودن آن مستلزم فعّال بودن تمام اجزای آن باشد. بسیاری از مدارهای الکتریکی دارای چنین ساختاری می‌باشند. یک سیستم متوالی با m جزء مستقل و یکسان را در نظر بگیرید. اگر $X_m, ..., X_2, X_1$ طول عمر اجزای سیستم با تابع توزیع مشترک $F(x)$ باشند، آن گاه طول عمر سیستم برابر است با اولّین آماره ترتیبی؛ یعنی $X_{1:m} = \min(X_1, X_2, ..., X_m)$.

برای آشنایی با ویژگی‌های سالخوردگی سیستم های مهندسی می‌توان به اسدی (۱۳۹۲) مراجعه کرد.

در ادامه برخی از ویژگی‌های توزیع تعادلی $X_{1:m}$ با تابع قابلیت اعتماد $\bar{F}_{1:m}(x)$ را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. با توجّه به این که $\bar{F}_{1:m}(x) = [\bar{F}(x)]^m$، تابع قابلیت اعتماد متناظر با توزیع تعادلی $X_{1:m}$ به صورت زیر است:

$$S_{1:m}^{(2)}(x) = \frac{\int_x^\infty \bar{F}^m(u)du}{E[X_{1:m}]}.$$

قضیه ۱.۲. رابطه بین تابع نرخ شکست توزیع تعادلی مرتبه دوم $X_{1:m}$ و تابع نرخ شکست $h(x)$ به صورت زیر است:

$$mh(x) = -\frac{d}{dx}\log h_{1:m}^{(2)}(x) + h_{1:m}^{(2)}(x). \qquad (۷)$$

اثبات. با به کار بردن رابطه (۶) برای اولّین آماره ترتیبی داریم:

$$h_{1:m}^{(1)}(x) = \frac{1 + \frac{d}{dx}m_{1:m}^{(1)}(x)}{m_{1:m}^{(1)}(x)}.$$

حال با استفاده از رابطه (۵) می‌توان نوشت:

$$h_{1:m}^{(1)}(x) = -\frac{d}{dx}h_{1:m}^{(2)}(x).\frac{1}{h_{1:m}^{(2)}(x)}, +h_{1:m}^{(2)}(x)$$

و با توجه به اینکه $mh(x) = h_{1:m}(x)$ نتیجه مورد نظر اثبات می‌شود.

$\square$

۳ مشخّص سازی

مشخّص سازی[۱۶] یکی از جذّاب ترین مباحث نظری آمار و احتمالات است که در چند دهه اخیر توجّه بسیاری از پژوهشگران را به خود جلب کرده است. هدف از طرح یک مسأله مشخّص سازی آن است که با استفاده از خواص و ویژگی های منحصربفرد هر توزیع، آن را به طور کامل معیّن کنیم.

مشخّص سازی از جنبه های عملی نیز حائز اهمیّت است. یکی از مهم ترین کاربردهای مشخّص سازی، گسترش آزمون های نیکویی برازش است. به طور مثال استقلال فاصله های[۱۷] آماره های ترتیبی بر اساس نمونه تصادفی از یک توزیع پیوسته، توزیع نمایی را نتیجه می دهد. لذا می توان از آن برای ساختن یک آزمون نیکویی برازش سود جست. در متون آماری آزمون های نیکویی برازش بسیاری از این قبیل برای توزیع های مختلف بر اساس نتایج مشخّص سازی پیشنهاد شده اند. چند مرجع اساسی در زمینه مشخّص سازی وجود دارند که از آن جمله می توان به کاگان[۱۸] و همکاران (۱۹۷۳) و گالامبوس[۱۹] و کوتز[۲۰] (۱۹۷۸) اشاره کرد.

یکی از خانواده توزیع‌های مهم و کاربردی در نظریّه توزیع‌ها، توزیع تعمیم یافته پارتو [۲۱] (GPD) با تابع قابلیت اعتماد زیر است:

[۱۶] characterization

[۱۷] spacings

[۱۸] Kagan

[۱۹] Galambos

[۲۰] Kotz

[۲۱] Generalized Pareto distributions

[۲۲] Johnson

(جانسون [۲۲] و همکاران، ۱۹۹۴)

$$\bar{F}(x) = \left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-(1+\frac{1}{a})}, x > 0, \qquad (۸)$$

که در آن $a > -1$ و $b > 0$. این خانواده از توزیع‌ها شامل توزیع نمایی (وقتی $a \to 0$) با نرخ شکست ثابت، توزیع پارتو (وقتی $a > 0$) با نرخ شکست صعودی و توزیع بتا (وقتی $-1 < a < 0$) با نرخ شکست نزولی است. لذا توزیع GPD مدلی انعطاف پذیر برای برازش به انواع مختلفی از داده‌هاست. این توزیع به نحو مطلوبی در بسیاری از مسائل آماری مرتبط با حوزه های مالی، بیمه، آب شناسی و سایر رشته ها به کار می رود. توزیع GPD ویژگی‌های جالب بسیاری دارد که از آن جمله می‌توان به خطّی بودن میانگین عمر باقیمانده آن اشاره کرد. رابطه بین تابع قابلیت اعتماد، تابع نرخ شکست و تابع میانگین عمر باقیمانده توزیع GPD و توزیع تعادلی مرتبه n آن توسط نایر و پریس (۲۰۰۹) ارائه شده است.

قضیه ۱.۳. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با تابع قابلیت اعتماد مطلقاً پیوسته $\bar{F}(x)$ باشد و $E(X^n) < \infty$. در این صورت X دارای توزیع GPD است اگر و تنها اگر یکی از ویژگی‌های زیر برای هر $x > 0$ و دو مقدار متوالی $n = i, i+1$ برقرار باشد:

(الف) برای یک c ثابت،

$$S^{(n)}(x) = (1+cx)^{n-1}\bar{F}(x).$$

(ب) $m^{(n)}(x) = C_n m^{(1)}(x)$

(ج) $h^{(n)}(x) = K_n h^{(1)}(x)$

(د) $r^{(n)}(x) = A_n[r^{(1)}(x)]^n$

که در آن $r^{(n)}(x) = E[(X-x)^n|X > x]$ و C_n، K_n و A_n مقادیر ثابت و مثبت هستند.

برای اثبات، می‌توان به نایر و پریس (۲۰۰۹) مراجعه کرد. در ادامه به بررسی رابطه توزیع تعادلی اوّلین آماره ترتیبی و توزیع پایه از خانواده GPD می‌پردازیم.

نتیجه ۲.۳. اگر X دارای توزیع GPD با تابع قابلیت اعتماد (۸) باشد، آنگاه $X_{1:m}$ نیز دارای توزیع GPD با پارامترهای $a' > -1$ و $b' > 0$ است به طوری که

$$a' = \frac{a}{m(a+1)-a}$$

و

$$b' = \frac{b}{m(a+1)-a}.$$

قضیه ۳.۳. متغیر تصادفی نامنفی X دارای توزیع GPD است اگر و فقط اگر

$$S^{(n)}_{1:m} = (1+cx)^{n-1}\,\bar{F}^m(x), \qquad (۹)$$

که در آن c مقدار ثابتی است.

اثبات. ابتدا فرض کنید X دارای توزیع GPD باشد. با به کار بردن معادله (۲) داریم:

$$S^{(n)}_{1:m}(x) = \frac{n!(-\frac{b}{a})^{n-1}(1+\frac{a}{b}x)^{n-1-m-\frac{m}{a}}}{\mu^*_{(n)}[1-(1+\frac{1}{a})m]...[n-1-(1+\frac{1}{a})m]}$$

که در آن

$$\mu^*_{(n)} = n!\mu^*_1\mu^*_2...\mu^*_{n-1}$$

و

$$\mu^*_i = E[X^{(i)}_{1:m}].$$

حال با انجام کمی محاسبات جبری خواهیم داشت:

$$S^{(n)}_{1:m}(x) = \left(1+\frac{a}{b}x\right)^{n-1}\bar{F}^m(x).$$

برای اثبات عکس قضیه، فرض کنید (۹) برقرار باشد. در این صورت

$$\frac{S^{(n)}_{1:m}}{S^{(n-1)}_{1:m}(x)} = (1+cx),$$

و با استفاده از معادله (۲) خواهیم داشت

$$\int_x^\infty S^{(n-1)}_{1:m}(x) = (1+cx)\mu_{n-1}S^{(n-1)}_{1:m}(x).$$

با مشتق گیری از دو طرف این معادله نسبت به x داریم:

$$\frac{\frac{d}{dx}S^{(n-1)}_{1:m}(x)}{S^{(n-1)}_{1:m}(x)} = \frac{-(c\mu_{n-1}+1)}{\mu_{n-1}(cx+1)}.$$

حال با گرفتن لگاریتم از دو طرف معادله اخیر خواهیم داشت

$$S^{(n-1)}_{1:m}(x) = K(1+cx)^{-1-\frac{1}{c\mu_{n-1}}}.$$

اگر $x \to 0$ آنگاه $K = 1$. اکنون با جایگذاری $n = 2$ داریم

$$S_{1:m}(x) = (1+cx)^{-1-\frac{1}{c}}.$$

لذا نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود. □

قضیه ۴.۳. اگر X دارای توزیع GPD باشد، آنگاه
(الف) $m^{(n)}_{1:m}(x) = C_{n,m} m^{(1)}_{1:m}(x)$
(ب) $h^{(n)}_{1:m}(x) = K_{n,m} m^{(1)}_{1:m}(x)$
(ج) $r^{(n)}_{1:m}(x) = A_{n,m} r^{(1)}_{1:m}(x)$
که در آن

$$r^{(n)}_{1:m} = E[(X_{1:m} - x)^n | X > x],$$

و مقادیر ثابت $C_{n,m}$، $K_{n,m}$ و $A_{n,m}$ در اثبات آمده اند.

اثبات. برای اثبات قسمت (الف) توجّه کنید که با استفاده از رابطه

$$m^{(n)}_{1:m}(x) = C_{n,m} \frac{\int_x^\infty S^{(n)}_{1:m}(t)dt}{S^{(n)}_{1:m}(x)}$$

می‌توان نوشت:

$$m^{(n)}_{1:m}(x) = C_{n,m}\ m^{(1)}_{1:m}(x),$$

که در آن

$$C_{n,m} = \frac{[-(1+\frac{1}{a})m + 1]}{[-(1+\frac{1}{a})m + n]}.$$

قسمت (ب) نیز با استفاده از رابطه (۵) واضح است. برای اثبات قسمت (ج) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} r^{(n)}_{1:m}(x) &= E[(X_{1:m} - x)^n | X_{1:m} > x] \\ &= m(1+\frac{1}{a})(\frac{a}{b}) \\ &\times \frac{\int_x^\infty (t-x)^n (1+\frac{a}{b}t)^{-(1+\frac{1}{a})m-1} dt}{(\bar{F}(x))^m} \\ &= m(1+\frac{1}{a})(\frac{a}{b})(1+\frac{a}{b}x)^{-m(1+\frac{1}{a})} \\ &\times \int_0^\infty y^n (1+\frac{a}{b}(x+y))^{-m(1+\frac{1}{a})-1} dy \\ &= m(1+\frac{1}{a})(\frac{b}{a})^n \\ &\times (1+\frac{a}{b}x)^n \beta(n+1, m(1+\frac{1}{a}) - n). \end{aligned}$$

به این ترتیب از آنجایی‌که

$$r_{1:m}(x) = \frac{b}{a}.\frac{1}{m(1+\frac{1}{a})}(1+\frac{a}{b}x),$$

اثبات کامل می‌شود. □

نتیجه ۵.۳. در توزیع نمایی $m^{(n)}_{1:m}(x)$ با $m^{(1)}_{1:m}(x)$ برابر است.

نتیجه ۶.۳. نرخ شکست (میانگین عمر باقیمانده) توزیع تعادلی مرتبه n برای اوّلین آماره ترتیبی در توزیع پارتو بر حسب n نزولی (صعودی) و در مدل بتا بر حسب n صعودی (نزولی) است.

۴ ویژگی‌های سالخوردگی و ترتیب‌بندی توزیع های تعادلی

طول عمر (زمان شکست) اجزاء یا سیستم های مهندسی در بسیاری از حوزه ها مانند قابلیّت اعتماد، مطالعه کیفیت محصولات یک کارخانه و ... مورد بررسی قرار می گیرند. در مبحث مدل بندی تصادفی، این طول عمرها را با متغیرهای تصادفی و خواص احتمالاتی آنها را با توزیع های آماری بیان می کنند. خواص مختلف داده های طول عمر را می توان بر اساس مفاهیم سالخوردگی توصیف کرد. در متون قابلیّت اعتماد، معمولاً سالخوردگی را نرخ از کار افتادگی در طول زمان در نظر می گیرند. از جمله مهمترین مفاهیم سالخوردگی می توان به تابع نرخ شکست و تابع میانگین باقیمانده عمر اشاره کرد. مراجع اساسی در این زمینه اسدی (۱۳۹۲) و بارلو[۲۳] و پروشان[۲۴] (۱۹۷۵) هستند.

در بسیاری از شاخه های علم آمار مقایسه توزیع های احتمال یا متغیرهای تصادفی دارای اهمیت زیادی است. ترتیب بندی های تصادفی از مهم ترین ابزارها در این راستا و همچنین در مطالعه مفاهیم سالخوردگی هستند. نتایج شناخته شده در زمینه ترتیب های تصادفی توسط شیکد و شانتیکومار (۲۰۰۷) جمع آوری شده است.

با توجّه به اهمّیت ویژگی‌های سالخوردگی و ترتیب بندی های تصادفی ، در این بخش برخی نتایج مرتبط با توزیع های تعادلی در این زمینه را بیان می کنیم.

قضیه ۱.۴. شرط لازم و کافی برای اینکه توزیع تعادلی مرتبه n توزیعی $IMRL$ [۲۵] ($DMRL$ [۲۶]) باشد آن است که برای هر x، رابطهٔ

[۲۳] Barlow

[۲۴] Proschan

[۲۵] increasing life mean residual

[۲۶] decreasing life mean residual

زیر برقرار باشد:

$$h^{(n)}(x) \geq (\leq) h^{(n+1)}(x). \qquad (۱۰)$$

اثبات این قضیه با توجه به دو معادله (٤) و (٥) واضح است.

قضیه ٢.٤. توزیع تعادلی طول عمر سیستم متوالی $IMRL$ است اگر و فقط اگر برای هر x، داشته باشیم

$$h^{(1)}_{1:m}(x) \geq h^{(2)}_{1:m}(x). \qquad (۱۱)$$

اثبات. از روابط (٥) و (٦) نتیجه می‌شود که رابطه (۱۱) برقرار است اگر و فقط اگر، داشته باشیم

$$-\frac{d}{dx}\log(h^{(2)}_{1:m}(x)) \geq 0.$$

با استفاده از (٥)، رابطه اخیر معادل با آن است که

$$\frac{d}{dx}\log(m^{(1)}_{1:m}(x)) \geq 0$$

و بدین ترتیب نتیجه مورد نظر به راحتی حاصل می‌شود. □

در پایان این بخش ضمن یادآوری برخی مفاهیم ترتیب‌بندی، نتایجی را برای توزیع تعادلی اوّلین آماره ترتیبی ارائه می‌کنیم.

تعریف ٣.٤. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی به ترتیب با توابع توزیع $F(x)$ و $G(x)$، توابع قابلیت اعتماد $\bar{F}(x)$ و $\bar{G}(x)$ و توابع چگالی احتمال $f(x)$ و $g(x)$ باشند.

- X را از نظر ترتیب‌بندی تصادفی معمولی کوچکتر از Y $(X \leq_{st} Y)$ گویند هرگاه برای هر x، $\bar{F}(x) \leq \bar{G}(x)$.
- X را از نظر ترتیب بندی نرخ شکست کوچکتر از Y $(X \leq_{hr} Y)$ گویند هرگاه $\bar{G}(x)/\bar{F}(x)$ تابعی صعودی از x باشد.
- X را از نظر ترتیب بندی نرخ شکست معکوس کوچکتر از Y $(X \leq_{rhr} Y)$ گویند هرگاه $G(x)/F(x)$ تابعی صعودی از x باشد.
- X را از نظر ترتیب بندی نسبت درستنمایی کوچکتر از Y $(X \leq_{lr} Y)$ گویند هرگاه $g(x)/f(x)$ تابعی صعودی از x باشد.
- X را از نظر ترتیب بندی میانگین عمر باقیمانده کوچکتر از Y $(X \leq_{mrl} Y)$ گویند هرگاه برای هر t، $m_X(t) \leq m_Y(t)$، که در آن $m_X(t)$ و $m_Y(t)$ به ترتیب توابع میانگین عمر باقیمانده X و Y هستند.

روابط زیر بین ترتیب های فوق برقرار است:

$$lr \Rightarrow hr \Rightarrow st,$$

$$lr \Rightarrow rhr \Rightarrow st,$$

$$hr \Rightarrow mrl.$$

قضیه ٤.٤. اگر $X \leq_{hr} Y$ آنگاه

$$X^{(2)}_{1:m} \leq_{lr} Y^{(2)}_{1:m},$$

که در آن $X^{(2)}_{1:m}$ و $Y^{(2)}_{1:m}$ به ترتیب متغیرهای تصادفی متناظر با توزیع‌های تعادلی اوّلین آماره های ترتیبی هستند.

اثبات. فرض کنید $f^{(2)}_{1:m}(x)$ و $g^{(2)}_{1:m}(x)$ به ترتیب توابع چگالی احتمال توزیع تعادلی اوّلین آماره های ترتیبی متناظر با X و Y باشند. به راحتی ملاحظه می شود که

$$\frac{g^{(2)}_{1:m}(x)}{f^{(2)}_{1:m}(x)} = \frac{\frac{\bar{G}_{1:m}(x)}{E[Y_{1:m}]}}{\frac{\bar{F}_{1:m}(x)}{E[X_{1:m}]}},$$

تابعی صعودی از x است و در نتیجه اثبات کامل است. □

نتیجه ٥.٤. اگر $X \leq_{hr} Y$ آنگاه

$$X^{(2)}_{1:m} \leq_{*} Y^{(2)}_{1:m},$$

که در آن $\leq_*$ هریک از ترتیب‌های تصادفی معمولی، نرخ شکست، نرخ شکست معکوس و میانگین عمر باقیمانده است.

قضیه ٦.٤. فرض کنید به ازای هر $n = 1, 2, ...$، $E[X^{(n)}_{k:m}] = E[Y^{(n)}_{k:m}]$. در این صورت اگر $X \leq_{st} Y$ آنگاه $X^{(n)}_{k:m} \leq_{st} Y^{(n)}_{k:m}$.

اثبات. قضیه را برای حالت $n = 2$ یعنی توزیع تعادلی مرتبه ۱ ثابت می‌کنیم. اثبات برای مراتب بالاتر از معادله (۲) واضح است. فرض کنید $X \leq_{st} Y$. در این صورت برای هر x داریم $F(x) \geq G(x)$. در نتیجه با استفاده از نظریّه توزیعی آماره های ترتیبی داریم

$$\begin{aligned} P(X_{k:m} > x) &= \int_{F(x)}^{1} k\binom{m}{k} t^{k-1}(1-t)^{m-k}dt \\ &\leq \int_{G(x)}^{1} k\binom{m}{k} t^{k-1}(1-t)^{m-k}dt \\ &= P(Y_{k:m} > x). \end{aligned}$$

بنابراین اگر $E[X^{(2)}_{k:m}] = E[Y^{(2)}_{k:m}]$، آن گاه

$$\int_x^\infty \frac{P(X_{k:m} > t)dt}{E[X_{k:m}]} \leq \int_x^\infty \frac{P(Y_{k:m} > t)dt}{E[Y_{k:m}]},$$

و در نتیجه

$$X^{(2)}_{k:m} \leq_{st} Y^{(2)}_{k:m}.$$

□

۵ توزیع های تعادلی گسسته

فرض کنید X یک متغیر تصادفی گسسته با تکیه گاه $0, 1, 2, ...$، تابع جرم احتمال $f(x)$ و تابع قابلیت اعتماد

$$S(x) = \bar{F}(X) = P(X > x)$$

باشد. در این شرایط تابع نرخ شکست و تابع میانگین عمر باقیمانده X به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$h(x) = \frac{f(x)}{S(x-1)},$$

$$m(x) = [S(x)]^{-1} \sum_{t=x}^{\infty} S(t). \qquad (۱۲)$$

تابع جرم احتمال توزیع تعادلی از مرتبه n، $n = 1, 2, ...$، بر مبنای رابطه بازگشتی زیر تعریف می شود:

$$g^{(n)}(x) = \frac{S^{(n-1)}(x)}{\mu^{(n-1)}}, \quad x = 0, 1, ..., \qquad (۱۳)$$

که در آن $\mu^{(n-1)} = \sum_{x=0}^{\infty} S^{(n-1)}(x) < \infty$ ،$S^{(0)}(x) = S(x)$، $\mu^{(0)} = \mu$ و $S^{(n-1)}(x)$ تابع قابلیت اعتماد توزیع تعادلی مرتبه $n-1$ است.

قضیه ۱.۵. رابطه میان تابع قابلیت اعتماد توزیع پایه و توزیع تعادلی از مرتبه n برای متغیر تصادفی گسسته X به صورت زیر است:

$$S^{(n)}(x) = [\mu^{(n)}]^{-1} S(x+n) \times E[(X-x-1)^{(n)} | X > x+1],$$

که در آن $\mu^{(n)} = E(X^{(n)})$ و

$$X^{(n)} = X(X-1)\cdots(X-n+1).$$

برای اثبات این قضیه می توان به نایر و پریس (۲۰۰۹) مراجعه نمود.

نتیجه ۲.۵. از تعریف $g^{(n)}(x)$ می‌توان رابطه زیر را برای نرخ شکست و میانگین عمر باقیمانده توزیع تعادلی از مرتبه n نتیجه گرفت:

$$h^{(n)}(x) = \frac{g^{(n)}(x)}{S^{(n)}(x-1)} = [m^{(n-1)}(x)]^{-1}.$$

در پایان نتیجه جالبی را برای توزیع تعادلی اوّلین آماره ترتیبی از توزیع هندسی ارائه می‌کنیم. فرض کنید X دارای توزیع هندسی $Ge(p)$ با تابع جرم احتمال

$$f(x) = pq^x, \quad x = 0, 1, 2, ...$$

باشد که در آن $q = 1 - p$. همچنین فرض کنید $X^{(n)}$ یک متغیر تصادفی باشد که توزیع آن با توزیع تعادلی X یکسان است. نکته جالب توجّه آن است که اگر X دارای توزیع هندسی $Ge(p)$ باشد آن گاه $X^{(n)}$ نیز دارای توزیع $Ge(p)$ است. لذا برای هر $n = 1, 2, ...$ داریم $h^{(n)}(x) = h(x)$ و $m^{(n)}(x) = m(x)$. به عبارت دیگر، تمام ویژگی های احتمالاتی توزیع تعادلی از توزیع هندسی با توزیع پایه یکسان خواهد بود.

ویژگی منحصربفرد دیگری از توزیع هندسی (در بین توزیع های گسسته) آن است که سیستم متوالی شامل m مؤلفه با طول عمرهای مستقل و یکسان هندسی، دارای طول عمر هندسی خواهد بود. لذا نتیجه زیر به راحتی حاصل می شود.

قضیه ۳.۵. اگر X دارای توزیع هندسی باشد، آن گاه

$$S^{(n)}_{1:m}(x) = S_{1:m}(x),$$

$$h^{(n)}_{1:m}(x) = h_{1:m}(x),$$

$$m^{(n)}_{1:m}(x) = m_{1:m}(x).$$

۶ بحث و نتیجه گیری

در مقاله حاضر مفهوم توزیع تعادلی در دو حالت پیوسته و گسسته ارائه و به مهم ترین ویژگی های آن با تکیه بر مفاهیم قابلیت اعتماد اشاره شده است. همچنین چند نتیجه مشخّص سازی از توزیع تعمیم یافته پارتو بر اساس توزیع های تعادلی بیان شده است. هدف اصلی این مقاله ارائه روابط بین توزیع پایه و توزیع تعادلی از نقطه نظر مفاهیم سالخوردگی و ترتیب های تصادفی بوده است. ضمن این که اغلب نتایج برای طول عمر یک سیستم متوالی به دست آمده است.

مراجع

[۱] اسدی، م. (۱۳۹۲). آشنایی با نظریه قابلیت اعتماد. مرکز نشر دانشگاهی.

[2] Barlow, R.E. and Proschan, F. (1975). *Statistical Theory of Reliability and Life Testing*. Holt, Rinehart: Winston, New York.

[3] Cox, D.R. (1962). *Renewal Theory*. Methuen and Co, London.

[4] Deshpande, J.V. and Kochar, S. C. and Singh, H. (1986). Aspects of positive aging. *Journal of Applied Probability* **23,** 748-758.

[5] Fagiuoli, E. and Pellerey, F. (1993). New partial orderings and applications. *Naval Research Logistics* **40,**829-842.

[6] Galambos, J. and Kotz, S. (1978). Characterizations of Probabaility Distributions *Lecture Notes in Mathematics*. Vol 675, Springer, Berlin.

[7] Gupta, R.C. (1979). On the characterization of survival distributions in reliability by properties of their renewal densities. *Communications in Statistics: Theory and Methods* **98,**685-697.

[8] Gupta, R.C. (2007). Role of equilibrium in reliability studies. *Probability in the Engineering and Informational Sciences* **21,**315-334.

[9] Gupta, R.C. and Kirmani, S.N.U.A. (1990). Role of weighted distributions in stochastic modelling. *Communications in Statistics: Theory and Methods* **19,**3147-3162.

[10] Johnson, N.L., Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1994). *Continuous Univariate Distributions*. Vol 1, 2nd edition, Wiley, New York.

[11] Kagan, A.M., Linnik, Yu.V. and Rao, C.R. (1973). *Characterization Problems in Mathematical Statistics*. Wiley, New York.

[12] Nair, N.U. and Preeth, M. (2009). On some properties of equilibrium distributions of order n. *Statistical Methods and Aplications* **18(4),** 453-464 .

[13] Nair, N.U., Sankaran, P.G. and Preeth, M. (2012). Reliability aspects of discrete equilibrium distributions. *Communications in Statistics: Theory and Methods* **41,** 500-512.

[14] Nanda, A.K., Jain, K. and Singh, H. (1996). Properties of moments for s-order equilibrium distributions. *Journal of Applied Probabability* **33,** 1108-1111.

[15] Pakes, A.G. and Navarro, J. (2007). Distributional characterizations through scaling relations. *Australia and New Zealand Journal of Statistics* **49,** 115-135.

[16] Shaked, M. and Shanthikumar, J.G. (2007). *Stochastic Orders*. Springer, New York.

[17] Willmot, G.E., Drekic, S. and Cai, J. (2005). Equilibrium component distributions and stoploss moments. *Scandinavian Actuarian Journal* **1,** 6-24.