

برآورد و پیشگویی بیزی پارامترهای توزیع نمایی یک و دوپارامتری بر اساس نمونه‌های سانسور شده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای

مهرانگیز فلاحتی نایینی^۱

چکیده:

در این مقاله، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای معرفی می‌شوند، سپس بر اساس نمونه سانسور شده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، برآوردگر بیز برای پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری تحت فرض توزیع پیشین گامای وارون و تابع زیان توان دوم خطابه دست آمد و هم‌چنین پیشگویی بیزی زمان‌های شکست آتی بررسی شده است. در ادامه، در مثالی کاربردی برآوردگر بیز و برآوردگرهای غیربیزی هم‌چون بهترین برآوردگر ناریب خطی (BLUE) و برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی تقریبی (AMLE) به دست آورده می‌شوند.

واژه‌های کلیدی: آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای، سانسور مضاعف نوع دوم، برآورد بیز، پیشگویی بیز، بهترین برآوردگر ناریب خطی، برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تقریبی.

که در آن، $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ مقادیر حقيقی و مثبت هستند که پارامتر مدل نامیده می‌شوند و F تابع توزیع مطلقاً پیوسته متناظر با تابع چگالی f است. نرخ خطر عناصر باقی‌مانده بعد از j -امین شکست به صورت $\frac{\alpha_{j+1}f}{1-F}$ به دست می‌آید که در واقع α_{j+1} نشانگر اثر j -امین شکست بر روی $j-n$ عنصر باقی‌مانده در حال کار است.

در فرمول بالا اگر $1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n$ یا $\alpha_1 = \dots = F_n = \dots$ مدل به مدل آماره‌های ترتیبی معمولی تبدیل می‌شود.

تعريف ۱.۱. کمپس [۵]. فرض کنید $1 \leq i < n$, $Y_j^{(i)}$, $1 \leq j \leq n-i+1$, متغیرهای تصادفی مستقل با توزیع F_i باشند که F_1, \dots, F_n اکیداً صعودی و توابعی پیوسته هستند و $F_1^{-1}(1) \leq \dots \leq F_n^{-1}(1)$. در این صورت اگر

$$X_j^{(1)} = Y_j^{(1)}, \quad 1 \leq j \leq n,$$

$$X_*^{(1)} = \min\{X_1^{(1)}, \dots, X_n^{(1)}\},$$

و برای $2 \leq i \leq n$,

$$X_j^{(i)} = F_i^{-1}(F_i(Y_j^{(i)})(1 - F_i(X_*^{(i-1)})) + F_i(X_*^{(i-1)})),$$

$$X_*^{(i)} = \min\{X_j^{(i)}, 1 \leq j \leq n-i+1\},$$

یک زیرمجموعه مهم از آماره‌های ترتیبی تعیین یافته، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای است که برای مدل‌بندی ساختار نوعی سیستم k از n دنباله‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرد. به صورت معمول سیستم k از n سیستمی است که با n عنصر شروع به کار می‌کند و این سیستم تا زمانی که حداقل k یا بیشتر از k عنصر آن کار می‌کند، سالم است و به کار کردن ادامه می‌دهد. در اغلب موارد فرض می‌شود که عناصر این سیستم به صورت مستقل کار می‌کنند اما این فرض در همه سیستم‌ها به صورت کامل صدق نمی‌کند و در برخی مواقع ممکن است شکست و خرابی یک عنصر فشار بیشتر و یا خطری را برای عناصر باقی‌مانده به وجود آورد (در یک کار گروهی با کم شدن یکی از اعضاء برای اتمام کار فشار بیشتری بر افراد باقی‌مانده وارد می‌شود).

سیستم k از n دنباله‌ای اولین بار توسط کمپس [۶] در سال ۱۹۹۵ معرفی شد که در این سیستم بعد از هر شکست، توزیع طول عمر جدیدی بر عناصر باقی‌مانده تطبیق داده می‌شود. بنابراین در آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای توزیع آماره‌ها با تعداد مؤلفه‌های درحال کار مرتبط است و این شرط توسط α_i اعمال می‌شود. در واقع توابع توزیع F_1, \dots, F_n از رابطه‌ی زیر به دست می‌آیند:

$$F_j = 1 - (1 - F)^{\alpha_j},$$

^۱دانشجوی کارشناسی ارشد

به صورت معمول در آزمایش‌های مختلف تمامی زمان‌های شکست قابل دسترس و یا قابل استفاده نیستند. به عنوان مثال ممکن است در یک آزمون طول عمر برای ذخیره هزینه و زمان، آزمون بعد از تعداد مشخصی از شکست‌های مشاهده شده متوقف شود. در چنین مواردی در استنباط آماری نمی‌توان تمام زمان‌های شکست را مشاهده و بنابراین باید انتخاب این زمان‌ها را محدود کرد. در این صورت زمان لازم برای رسیدن به q -امین شکست، یک متغیر تصادفی است.

مدل آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای نیز برای چنین داده‌هایی می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد. فرض کنید $j_1 < j_2 < \dots < j_q$ تا j_q -امین مشاهده رخداد $(x^{(j_1)} \leq \dots \leq x^{(j_q)})$ و باقی داده‌ها در دسترس نباشند، متغیرهای تصادفی متناظر با این مشاهدات را با نماد

$$X_*^{(j_1)} \leq \dots \leq X_*^{(j_q)}, \quad 1 < j_1 < \dots < j_q < n,$$

نشان داده و آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسور شده مضاعف نوع

دوم نامیده می‌شود.

اگر تنها $1 + p$ -امین تا q -امین زمان شکست مشاهده شود و p تا از کوچکترین و $n - q$ تا از بزرگترین زمان‌های شکست سانسور شده باشند، متغیرهای تصادفی متناظر را با

$$X_*^{(p+1)} \leq X_*^{(p+2)} \leq \dots \leq X_*^{(q)},$$

نشان داده و آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسور شده دوگانه نوع دوم نامیده می‌شود. در حالت خاص اگر $p = 0$ ، متغیرهای تصادفی آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسور شده نوع دوم را تشکیل می‌دهند.

در این مقاله بر روی نمونه‌هایی از داده‌های سانسور شده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای با توزیع $Exp(\mu, \sigma_i)$ کار می‌شود که در واقع q_i مشاهده از i -امین نمونه به طوری که پارامتر مکان یکسان μ و پارامترهای مقیاس $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ هستند. به صورت کلی مجموعه داده‌ها را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$\mu = x_i^{(j_{i0})} \leq x_i^{(j_{i1})} \leq \dots \leq x_i^{(j_{iq_i})}, \quad j_{i0} = 0 < j_{i1} < \dots < j_{iq_i} \leq n_i, \quad 1 \leq i \leq s,$$

و آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای متناظر نیز با نماد $X_*^{(j_{ik})}$ که $1 \leq i \leq s, 1 \leq k \leq q_i$ ، نشان داده می‌شود.

آنگاه متغیرهای تصادفی $X_*^{(1)}, \dots, X_*^{(n)}$ ، آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای نامیده می‌شوند.

با توجه به این تعریف، توزیع شرطی متغیر تصادفی $X_1^{(i)}$ برای $1 \leq i \leq n$ ، بنابر استقلال $X_*^{(i-1)}$ و $Y_1^{(i)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} P(X_1^{(i)} \leq t \mid X_*^{(i-1)} = s) &= P(F_i(Y_1^{(i)}) \leq \frac{F_i(t) - F_i(s)}{1 - F_i(s)}) \\ &= \frac{F_i(t) - F_i(s)}{1 - F_i(s)} = G_i(t \mid s). \end{aligned}$$

این توزیع شرطی، نشان دهنده این است که بعد از i -امین خرابی در سیستم، شکست بعدی از $X_1^{(i)}, \dots, X_{n-i+1}^{(i)}$ با توزیع $G_i(t \mid s)$ به دست می‌آید. بنابر تعریف

$$X_*^{(i)} = \min\{X_j^{(i)}, 1 \leq j \leq n - i + 1\},$$

و همچنین تعریف $G_i(t \mid s)$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} P(X_*^{(r)} > t \mid X_*^{(r-1)} = s) &= (P(X_1^{(r)} > t \mid X_*^{(r-1)} = s))^{n-r+1} \\ &= \left(\frac{1 - F_r(t)}{1 - F_r(s)}\right)^{n-r+1}, \end{aligned}$$

$$P(X_*^{(r)} < t \mid X_*^{(r-1)} = s) = 1 - \left(\frac{1 - F_r(t)}{1 - F_r(s)}\right)^{n-r+1}.$$

با مشتق گیری نسبت به t داریم:

$$\begin{aligned} f_{X_*^{(r)} \mid X_*^{(r-1)}}(t \mid s) &= (n - r + 1) \frac{f_r(t)}{1 - F_r(s)} \\ &\times \left(\frac{1 - F_r(t)}{1 - F_r(s)}\right)^{n-r}. \end{aligned}$$

بنابراین تابع چگالی تؤمن $X_*^{(r)}, \dots, X_*^{(1)}$ با استفاده از خاصیت مارکف به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_{X_*^{(1)}, \dots, X_*^{(r)}}(x_1, \dots, x_r) = \frac{n!}{(n - r)!} \prod_{i=1}^r \left(\frac{1 - F_i(x_i)}{1 - F_i(x_{i-1})}\right)^{n-i} \frac{f_i(x_i)}{1 - F_i(x_{i-1})}.$$

مثال ۲.۱. اگر $F(x_i) = 1 - e^{-x_i}$ ، آنگاه با استفاده از رابطه $F_i(x_i) = 1 - (1 - F(x_i))^{\alpha_i}$ و رابطه‌ی بالا، تابع چگالی تؤمن $X_*^{(1)}, \dots, X_*^{(n)}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_{X_*^{(1)}, \dots, X_*^{(n)}}(x_1, \dots, x_n) = n! \prod_{i=1}^n \alpha_i e^{-(x_i - x_{i-1})(n - i + 1)\alpha_i}.$$

۲ تابع چگالی آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای ۳ برآورد و پیشگویی بیزی

در سال‌های اخیر مطالعات زیادی بر روی روش‌های بیزی با نمونه‌های سانسورشده نوع دوم و همچنین نمونه‌های سانسورشده پیش‌روندۀ نوع دوم بر اساس آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای و یا آماره‌های تعیین‌یافته، توسط جاهین [۴]، احمدی و دوست پرست [۷] و سلطان [۸] انجام گرفته است. شنک و همکاران [۷]

به محاسبه برآورد و پیشگویی‌های بیزی بر اساس نمونه‌های سانسورشده مضاعف نوع دوم از آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای در توزیع نمایی یک و دو پارامتری پرداختند. در این قسمت با استفاده از یافته‌های بخش قبل، برآوردگر بیزی برای پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری به دست می‌آید و همچنین پیشگویی بیزی برای زمان شکست آینده ارائه می‌گردد.

۱.۳ توزیع نمایی یک پارامتری

اگر $\sigma_1 = \sigma_s = \dots = \sigma = \sigma$ و به صورت گام‌ای وارون توزیع شده باشد، آنگاه برآورد بیزی σ و پیشگویی بیزی زمان شکست آینده با فرض وجود نمونه‌هایی از آماره‌های ترتیبی سانسورشده مضاعف نوع دوم به صورت زیر به دست می‌آید.

برآورد پارامتر مقیاس

لم ۱.۳. فرض کنید

$$\mathbf{X}_{*i} = (X_{*i}^{(j_{i1})}, \dots, X_{*i}^{(j_{iq_i})}), i = 1, \dots, s,$$

$$\mathbf{x}_{*i} = (x_{*i}^{(j_{i1})}, \dots, x_{*i}^{(j_{iq_i})}), i = 1, \dots, s,$$

$$\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{*1}, \dots, \mathbf{X}_{*s}),$$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s),$$

$$f_{\mathbf{X}_*}(\mathbf{x}) = \sigma^{-q} \left(\prod_{p=1}^q \prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \times \prod_{p=1}^q \left(\sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} a_k^{(j_{p-1})}(j_p) \exp\left(\frac{-\gamma_k}{\sigma}(x^{j_p} - x^{j_{p-1}})\right) \right),$$

که در آن، $\mathbf{x}_* = (x_{*1}^{(j_1)}, \dots, x_{*s}^{(j_q)})$ $\mathbf{X}_* = (X_{*1}^{(j_1)}, \dots, X_{*s}^{(j_q)})$

و $j_0 = 0$ و $\mu = X_*^{(j_0)} \leq X_*^{(j_1)} \leq \dots \leq X_*^{(j_q)}$

$$a_k^{(j_{p-1})}(j_p) = \prod_{l=j_{p-1}+1 \atop l \neq k}^{j_p} \frac{1}{\gamma_l - \gamma_k},$$

که $j_{p-1} + 1 \leq k \leq j_p, 1 \leq p \leq q$

ب) تابع چگالی شرطی $X_*^{j_r}$ به شرط $\mathbf{x}_* = \mathbf{x}$ برابر است

با:

$$f_{X_*^{(j_r)} | \mathbf{X}_*}(\mathbf{x}^{(j_r)} | \mathbf{x}) = \frac{1}{\sigma} \left(\prod_{k=j_q+1}^{j_r} \gamma_k \right) \sum_{j=j_q+1}^{j_r} a_j^{(j_q)}(j_r) \exp\left(\frac{-\gamma_j}{\sigma}(x^{(j_r)} - x^{(j_q)})\right),$$

که $x^{(j_q)} < x^{(j_r)}$ و $j_q < j_r$

سانسور شده مضاعف نوع دوم

قضیه ۱.۲. فواصل متوالی استانداردشده آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای تحت توزیع نمایی استاندارد، متغیرهای مستقل و هم توزیع با توزیع نمایی استاندارد هستند؛ در واقع

$$W_{*i}^{(1)} = \frac{\gamma_{i1}}{\sigma_i} (X_{*i}^{(1)} - \mu), \quad 1 \leq i \leq s, \\ W_{*i}^{(j)} = \frac{\gamma_{ij}}{\sigma_i} (X_{*i}^{(j)} - X_{*i}^{(j-1)}), \quad 2 \leq j \leq n_i,$$

با $(n_i - j + 1) \gamma_{ij} = \alpha_{ij}$ به صورت نمایی استاندارد توزیع شده‌اند.

□ اثبات. به کمپس [۵] رجوع شود.

با درنظر گرفتن تعداد نمونه‌ها برابر با ۱، قضیه زیر بیان می‌شود:

قضیه ۲.۲. الف) تابع چگالی آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسورشده مضاعف نوع دوم

$$X_*^{(j_1)} \leq \dots \leq X_*^{(j_q)}, \quad 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n,$$

تحت توزیع $Exp(\mu, \sigma)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\mathbf{K} = \{\mathbf{k} = (k_{11}, \dots, k_{sq_s}) | k_{ip} \in \{j_{i,p-1} + 1, \dots, j_{ip}\},$$

$$1 \leq p \leq q_i, 1 \leq i \leq s\},$$

$$\Psi(\mathbf{k}) = \prod_{i=1}^s \prod_{p=1}^{q_i} a_{k_{ip}}^{(j_{i,p-1})}(j_{ip}), \quad Q = \sum_{i=1}^s q_i,$$

$$V_{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^s \sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_{ip}}^p, \quad V_{ik_{ip}}^p = \gamma_{ik} (x_i^{(j_{ip})} - x_i^{(j_{i,p-1})}),$$

$$\pi_{\Sigma}(\sigma) \propto \sigma^{-(b+1)} e^{-\frac{a}{\sigma}}, \quad \sigma > 0, a > 0, b > 0.$$

و برای حالت خاص $k = 0$ و $k = 1$ و $k = 2$ به ترتیب خواهیم داشت:

$$\left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j} a_j(r) = 1, \quad (3)$$

$$\left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j^2} a_j(r) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j}, \quad (4)$$

$$\left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j^3} a_j(r) = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j^2} + \sum_{\substack{l,k=1 \\ l < k}}^r \frac{1}{\gamma_l \gamma_k}. \quad (5)$$

قضیه ۳.۳. اگر فرضیات لم ۱.۳ برقرار باشد، پیشگویی کننده زمان شکست r_i امین آماره ترتیبی دنباله‌ای برابر است با:

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma} \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \frac{1}{\gamma_{ik}}, \quad j_{iq_i} < r_i, \quad (6)$$

که $\hat{\sigma}$ برآورده بیز به دست آمده است.

فرض کنید نمونه‌ها دارای پارامترهای مقیاس متفاوت

هرستند و چگالی پیشین $\Sigma_1, \dots, \Sigma_s$ به صورت زیر است:

$$\pi_{\Sigma_i}(\sigma_i) \propto \sigma_i^{-(b_i+1)} \exp\left(-\frac{a_i}{\sigma_i}\right),$$

$$\pi_{\Sigma}(\boldsymbol{\sigma}) = \prod_{i=1}^s \pi_{\Sigma_i}(\sigma_i), \quad \boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_s),$$

و علاوه بر تعاریف موجود در لم ۱.۳ داشته باشیم:

$$\mathbf{K}_i = \{\mathbf{k} = (k_{i1}, \dots, k_{iq_i}) | k_{ip} \in \{j_{i,p-1} + 1, \dots, j_{ip}\},$$

$$1 \leq p \leq q_i\},$$

$$V_{i\mathbf{k}} = \sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_{ip}}^p,$$

$$\Psi_i(\mathbf{k}) = \prod_{p=1}^{q_i} a_{k_{ip}}^{(j_i, p-1)}(j_{ip}),$$

$$c_i = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}_i} \Psi_i(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(q_i + b_i)}{(V_{i\mathbf{k}} + a_i)^{q_i + b_i}},$$

در این صورت برآورده بیز و k -امین گشتاور پسین σ_i برای

به ترتیب برابر است با:

$$\hat{\sigma}_i = c_i^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}_i} \Psi_i(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(q_i + b_i - 1)}{(V_{i\mathbf{k}} + a_i)^{q_i + b_i - 1}},$$

در این صورت چگالی پسین Σ به شرط x با فرض $Q + b > 0$

برابر است با:

$$\pi_{\Sigma|\mathbf{X}}(\sigma|\mathbf{x}) = c^{-1} \sigma^{-(Q+b+1)} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) e^{-\frac{V_{\mathbf{k}} + a}{\sigma}},$$

که در آن، مقدار ثابت c از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$c = \Gamma(Q + b) \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) (V_{\mathbf{k}} + a)^{-(Q+b)}.$$

بنابراین با استفاده از فرضیات لم پیشین، برآورده بیز تحت تابع زیان توان دوم خطأ و k -امین گشتاور پسین σ برای $Q + b - 1 > 0$ به ترتیب برابرند با:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma} &= E(\Sigma|\mathbf{X} = \mathbf{x}) \\ &= c^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(Q + b - 1)}{(V_{\mathbf{k}} + a)^{Q+b-1}}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \widehat{\sigma^k} &= E(\Sigma^k |\mathbf{X} = \mathbf{x}) \\ &= c^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(Q + b - k)}{(V_{\mathbf{k}} + a)^{Q+b-k}}. \end{aligned} \quad (2)$$

و واریانس پسین برآورده بیز σ تحت تابع زیان توان دوم خطأ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned} Var(\hat{\sigma}|\mathbf{X} = \mathbf{x}) &= E(\Sigma^2|\mathbf{X} = \mathbf{x}) - E^2(\Sigma|\mathbf{X} = \mathbf{x}) \\ &= (\widehat{\sigma^2} - \hat{\sigma}^2). \end{aligned}$$

پیشگویی زمان شکست آینده

در نظر بگیرید

$$x_i^{(j_{i1})} \leq x_i^{(j_{i2})} \leq \dots \leq x_i^{(j_{iq_i})}, \quad i = 1, \dots, s,$$

زمان‌های شکست مشاهده شده و $\sum_{i=1}^s q_i$ نمونه‌ی مرتب شده‌ای از مشاهدات آینده i -امین نمونه باشد.

لم ۲.۳. فرض کنید $r, r \geq 2$ و برای $d, j \in \{1, \dots, r\}$ و برای $r \in \mathbb{N}$

$$a_j(r) = a_j^{(0)}(r) = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^r \frac{1}{\gamma_l - \gamma_j}, \quad r \geq 2, \quad a_j(1) = 1.$$

در این صورت برای $l_r = 0$ و $k = l_0 \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j^{k+1}} a_j(r) &= \\ \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^{l_1} \dots \sum_{l_{r-1}=0}^{l_{r-2}} &\left(\gamma_1^{l_{r-1}} \dots \gamma_{r-1}^{l_1} \gamma_r^{k-l_1} \right)^{-1}, \end{aligned}$$

و بنابراین برآوردهای بیز σ و μ تحت تابع زیان توان دوم خطابرابر با مقادیر زیر است:

$$\hat{\sigma} = E(\Sigma | \mathbf{X} = \mathbf{x}) =$$

$$\frac{1}{(Q+b-2)} \left\{ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \left((H_{\mathbf{k}}(M_0))^{-(Q+b-2)} - (H_{\mathbf{k}}(0))^{-(Q+b-2)} \right) \right. \\ \left. / \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \left((H_{\mathbf{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\mathbf{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \right) \right\}$$

و

$$\hat{\mu} = E(\Delta | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \left\{ M_0 \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) (H_{\mathbf{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} \right/ \\ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \left((H_{\mathbf{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\mathbf{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \right) \right\} \\ - \hat{\sigma} \left(c + \sum_{i=1}^s \gamma_{i1} \right)^{-1}.$$

$$\widehat{\sigma}_i^k = c_i^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}_i} \Psi_i(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(q_i + b_i - k)}{(V_{ik} + a_i)^{q_i + b_i - k}}.$$

به این ترتیب با همان روش قضیه قبل ثابت می‌شود که پیشگویی کننده زمان شکست r_i این آماره ترتیبی دنباله‌ای برابر است با:

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma}_i \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \frac{1}{\gamma_{ik}}, \quad j_{iq_i} < r_i.$$

۲.۳ توزیع نمایی دو پارامتری

اگر $\sigma_1 = \dots = \sigma_s = \sigma$ و پارامترهای مکان و مقیاس μ و σ دارای چگالی پیشین توأم زیر باشند:

$$\pi_{(\Sigma, \Delta)}(\sigma, \mu) \propto \sigma^{-(b+1)} \exp\left(-\frac{a - c\mu}{\sigma}\right) I_{[0, M]}(\mu),$$

و علاوه بر شرایط لم ۱.۳ داشته باشیم:

$$I_{[\mu, \infty)}(z) I_{[0, M]}(\mu) = I_{\{\mu \leq z\}} I_{\{\mu \leq M\}} = I_{\{\mu \leq M_0\}} = I_{[0, M_0]}(\mu),$$

\square چگالی پسین و برآوردهای بیز به راحتی محاسبه می‌شود.

پیشگویی زمان شکست آینده

فرض کنید

$$V_{\mathbf{k}}(t, \mu) = \gamma_{ij}(t - x_i^{(j_{iq_i})}) + H_{\mathbf{k}}(\mu), \quad t \in [x_i^{(r_i)}, \infty).$$

در این صورت چگالی پسین پیشگویی کننده $X_{*i}^{(r_i)}$ به شرط \mathbf{X} برابر:

$$f_{X_{*i}^{(r_i)} | \mathbf{X}}(x_i^{(r_i)} | \mathbf{x}) = c^{-1} \left(\prod_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \gamma_{ik} \right) \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} a_l^{j_{iq_i}}(r_i) \\ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(Q+b)}{c + \sum_{i=1}^s \gamma_{i1}} \left((V_{\mathbf{k}}(x_i^{(r_i)}, M_0))^{-(Q+b)} \right. \\ \left. - (V_{\mathbf{k}}(x_i^{(r_i)}, 0))^{-(Q+b)} \right),$$

است و از آنجایی که پیشگویی کننده $X_{*i}^{(r_i)}$ برابر با میانگین $X_{*i}^{(r_i)}$ است، با انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء مقدار زیر

به دست می‌آید:

$$\hat{X}_{*i}^{(r_i)} = x_i^{(j_{iq_i})} + \hat{\sigma} \sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \frac{1}{\gamma_{ik}}, \quad j_{iq_i} < r_i.$$

اگر نمونه‌ها دارای پارامترهای مقیاس متفاوت $\sigma_1, \dots, \sigma_s$ و چگالی پیشین توأم σ و μ برای $\sigma_1, \dots, \sigma_s > 0$ به صورت زیر باشد:

$$\pi_{(\Sigma, \Delta)}(\sigma, \mu) \propto \prod_{i=1}^s \left(\sigma_i^{-(b_i+1)} \exp\left(-\frac{a_i - c_i \mu}{\sigma_i}\right) \right), \quad \left((H_{\mathbf{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\mathbf{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \right).$$

$$z = \min\{x_1^{(j_{11})}, \dots, x_s^{(j_{s1})}\},$$

$$M_0 = \min\{z, M\},$$

$$x_i^{(j_{i0})} = 0, \quad 1 \leq i \leq s,$$

$$V_{ik}^p = \gamma_{ik}(x_i^{(j_{ip})} - x_i^{(j_{i,p-1})}),$$

$$V_{\mathbf{k}} = \sum_{i=1}^s \sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_{ip}}^p,$$

$$c \neq -\sum_{i=1}^s \gamma_{i1},$$

$$H_{\mathbf{k}}(t) = V_{\mathbf{k}} + a - t(c + \sum_{i=1}^s \gamma_{i1}),$$

$$H_{\mathbf{k}}(M_0) > 0, \quad \mathbf{k} \in K,$$

آنگاه چگالی پسین توأم (Σ, Δ) به شرط $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{*1}, \dots, \mathbf{X}_{*s})$ برای $Q+b-1 > 0$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\pi_{(\Sigma, \Delta) | \mathbf{X}}((\sigma, \mu) | \mathbf{x}) = c^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}}$$

$$\sigma^{-(Q+b-1)} \exp\left(-\frac{H_{\mathbf{k}}(\mu)}{\sigma}\right) I_{[0, M_0]}(\mu),$$

که $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_s)$ و مقدار ثابت c نیز برابر است با:

$$c = \frac{\Gamma(Q+b-1)}{c + \sum_{i=1}^s \gamma_{i1}} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k})$$

$$\left((H_{\mathbf{k}}(M_0))^{-(Q+b-1)} - (H_{\mathbf{k}}(0))^{-(Q+b-1)} \right).$$

آنگاه با فرض این که $V_{i,\mathbf{k}} = H_{i,\mathbf{k}}(t) = V_{i,\mathbf{k}} + a_i - t(c_i + \gamma_{i1})$ و $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{*1}, \dots, \mathbf{X}_{*s})$ به شرط (Σ, Δ) پسین $\sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_{ip}}^p$ برابر:

$$\begin{aligned} E(X_{*i}^{(j_{ik})}) &= \mu + \sigma_i \sum_{j=1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}} =: \mu + \sigma_i S_1(i, k), \\ Var(X_{*i}^{(j_{ik})}) &= \sigma_i^2 \sum_{j=1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}^2} =: \sigma_i^2 S_2(i, k), \\ Cov(X_{*i}^{(j_{ik})}, X_{*i}^{(j_{il})}) &= Var(X_{*i}^{(j_{ik})}) =: \sigma_i^2 S_2(i, k). \end{aligned}$$

تعریف زیر را در نظر بگیرید.

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_i &= (X_{*i}^{(j_{i1})}, \dots, X_{*i}^{(j_{ir_i})})^t, \quad 1 \leq i \leq s, \\ \mathbf{X} &= (\mathbf{X}_1^t, \dots, \mathbf{X}_s^t)^t, \\ \mathbf{1}_{r_i} &= (1, \dots, 1)^t \in \Re^{r_i}, \quad i = 1, \dots, s, \\ \mathbf{1} &= (1, \dots, 1)^t \in \Re^{\sum_{i=1}^s r_i}, \\ \mathbf{X}_{iv} &= \mathbf{X}_i - v \mathbf{1}_{r_i}, \quad v \in \Re, \\ \mathbf{X}_v &= X - v \mathbf{1}, \quad v \in \Re, \\ \boldsymbol{\alpha}_i &= (S_1(i, 1), \dots, S_1(i, r_i))^t, \quad 1 \leq i \leq s, \\ \boldsymbol{\alpha} &= (\alpha_1^t, \dots, \alpha_s^t)^t \in \Re^{\sum_{i=1}^s r_i}, \\ B_i &= (S_2(i, k, l))_{1 \leq k, l \leq r_i}, \quad 1 \leq i \leq s, \\ B &= \text{diag}(B_1, \dots, B_s), \in \Re^{\sum_{i=1}^s r_i \times \sum_{i=1}^s r_i}. \end{aligned}$$

قضیه ۲.۴. با فرض وجود نمونه سانسورشده مضاعف نوع دوم از توزیع نمایی یک پارامتری، اگر $\sigma = \sigma_1 = \dots = \sigma_s$ ، آنگاه بهترین برآوردهای ناریب خطی σ برابر:

$$\sigma^* = \frac{\boldsymbol{\alpha}^t B^{-1} \mathbf{X}_\mu}{\boldsymbol{\alpha}^t B^{-1} \boldsymbol{\alpha}},$$

است و بنابراین واریانس این برآوردهای نزدیک با مقدار زیر خواهد

$$Var(\sigma^*) = \frac{\sigma^2}{\boldsymbol{\alpha}^t B^{-1} \boldsymbol{\alpha}}.$$

به طور ساده‌تر می‌توان گفت بهترین برآوردهای ناریب خطی σ

برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1^2(i, k)}{s_2(i, k)} \right)^{-1} \sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1(i, k)}{s_2(i, k)} \\ &(X_{*i}^{(j_{ik})} - X_{*i}^{(j_{i,k-1})}), \quad X_{*i}^{(j_{i0})} = \mu \end{aligned}$$

که در آن،

$$\begin{aligned} s_1(i, k) &= S_1(i, k) - S_1(i, k-1) \\ &= \sum_{j=1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}} - \sum_{j=1}^{j_{i,k-1}} \frac{1}{\gamma_{ij}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \pi_{(\Sigma, \Delta) | \mathbf{X}}((\boldsymbol{\sigma}, \mu) | \mathbf{x}) &\propto \\ \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \left(\prod_{i=1}^s \sigma_i^{-(q_i+b_i+1)} \exp \left(-\frac{H_{i,\mathbf{k}}(\mu)}{\sigma_i} \right) \right) I_{[0, M_0]}(\mu), \end{aligned}$$

است. یا می‌توان گفت

$$\begin{aligned} \pi_{(\Sigma, \Delta) | \mathbf{X}}((\boldsymbol{\sigma}, \mu) | \mathbf{x}) &= \\ c^{-1} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \left(\prod_{i=1}^s \sigma_i^{-(q_i+b_i+1)} \exp \left(-\frac{H_{i,\mathbf{k}}(\mu)}{\sigma_i} \right) \right) I_{[0, M_0]}(\mu), \end{aligned}$$

که c برابر است با:

$$c = \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \int_0^{M_0} \prod_{i=1}^s \frac{\Gamma(q_i + b_i)}{(H_{i,\mathbf{k}}(\mu))^{q_i + b_i}} d\mu.$$

انگرال بالا مقدار روشن و صریحی ندارد و بایستی به روش‌های عددی محاسبه گردد و بنابراین برآوردهای بیز σ_i و μ برابر با میانگین توزیع پسین به دست آمده هستند.

۴ بهترین برآوردهای ناریب خطی (*BLUE*)

در این بخش، بهترین برآوردهای ناریب خطی برای پارامترهای توزیع نمایی یک و دو پارامتری با فرض پارامترهای مقیاس یکسان به دست آمده است.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $B \in \Re^{n \times n}$ یک ماتریس معین مثبت

متقارن، $A \in \Re^{n \times (k+1)}$ یک ماتریس طرح با رتبه $k+1$ و $\mathbf{X} \in \Re^n$ دو بردار تصادفی باشند. در این صورت اگر

$$\mathbf{X} = A\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\sigma},$$

یک مدل خطی با شرایط $Cov(\mathbf{X}) = Cov(\Delta) = E(\mathbf{X}) = A\boldsymbol{\beta}$ و $E(\Delta) = 0$ باشد، آنگاه بهترین برآوردهای ناریب خطی $\boldsymbol{\beta}$ برابر:

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (A^t B^{-1} A)^{-1} A^t B^{-1} \mathbf{X}$$

است.

اگر $X_{*i}^{(j_{ik})}$ j_k -امین آماره ترتیبی دنباله‌ای از i -امین نمونه با

۵ برآوردگر ماقسیم درستنما (MLE)

هدف این قسمت به دست آوردن برآورد ماقسیم درستنما برای نمونه سانسور شده مضاعف نوع دوم است، به این ترتیب طریقه محاسبه این برآوردگر را برای حالت ساده آماره های ترتیبی دنباله ای، یعنی $\alpha = 1$ (آماره های ترتیبی معمولی) بررسی می کنیم. فرض کنید نمونه تصادفی سانسور شده مضاعف نوع دوم به صورت زیر باشد:

$$Y_1 = X^{(j_1)}, Y_2 = X^{(j_2)}, \dots, Y_q = X^{(j_q)}.$$

در این صورت، با در نظر گرفتن توزیع نمایی یک پارامتری باتابع چگالی وتابع توزیع

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-x/\sigma},$$

$$F(x) = 1 - e^{-x/\sigma},$$

تابع درستنما بر اساس نمونه سانسور شده مضاعف، به صورت زیر است:

$$L = \text{const} \times \sigma^{-q} \left[1 - e^{-\frac{y_1}{\sigma}} \right]^{j_1-1} \\ e^{\left[\sum_{i=1}^q \frac{y_i + (n-j_q)y_q}{\sigma} \right]} \times \prod_{i=1}^{q-1} \left[e^{-\frac{y_i}{\sigma}} - e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}} \right]^{j_{i+1}-j_i-1}.$$

با برابر صفر قرار دادن مشتق لگاریتم این تابع براساس σ داریم:

$$q\sigma + (j_1 - 1)y_1 \frac{e^{-\frac{y_1}{\sigma}}}{[1 - e^{-\frac{y_1}{\sigma}}]} - \sum_{i=1}^q y_i - (n - j_q)y_q \\ - \sum_{i=1}^{q-1} [j_{i+1} - j_i - 1] \left\{ \frac{-y_{i+1}e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}} + y_i e^{-\frac{y_i}{\sigma}}}{-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}} + e^{-\frac{y_i}{\sigma}}} \right\} = 0.$$

با توجه به این که این معادله، معادله یکنوا بر حسب σ است، برآورد ماقسیم درستنما یکتایی را نتیجه می دهد اما به دلیل این که جواب صریحی از این معادله به دست نمی آید با تقریبی بر روی این تابع برآورد ماقسیم درستنما تقریبی را محاسبه می کنیم.

برای تقریب زدن از روش بالاکریشنان که در مرجع [۲] معرفی شده است، استفاده می کنیم:

$$\frac{-y_{i+1}e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}} + y_i e^{-\frac{y_i}{\sigma}}}{-e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}} + e^{-\frac{y_i}{\sigma}}} \approx \gamma_i + \delta_i \frac{y_i}{\sigma} + (1 - \delta_i) \frac{y_{i+1}}{\sigma},$$

که در آن،

$$p_i^* = \frac{j_i}{n+1}, \quad q_i^* = 1 - p_i^*,$$

$$\delta_i = \frac{q_i^*}{q_i^* - q_{i+1}^*} - \frac{q_i^* q_{i+1}^*}{(q_i^* - q_{i+1}^*)^2} \log\left(\frac{q_i^*}{q_{i+1}^*}\right),$$

$$\gamma_i = \frac{q_{i+1}^* \log q_{i+1}^* - q_i^* \log q_i^*}{q_i^* - q_{i+1}^*} + \delta_i \log q_i^* + (1 - \delta_i) \log q_{i+1}^*,$$

$$s_2(i, k) = S_2(i, k) - S_2(i, k-1) \\ = \sum_{j=j_{i,k-1}+1}^{j_{ik}} \frac{1}{\gamma_{ij}^2}, \\ j_{i0} = 0, i = 1, \dots, s \text{ و } S_1(i, 0) = S_2(i, 0) = 0$$

قضیه ۳.۴. با فرض وجود نمونه سانسور شده مضاعف نوع دوم از توزیع نمایی دو پارامتری، اگر $\sigma_s = \dots = \sigma = \sigma_1 = \dots = \sigma_q$ ، آنگاه بهترین برآوردگر ناریب خطی μ و σ به ترتیب برابر

$$\mu^* = \left(\frac{\alpha^t B^{-1} \alpha \mathbf{1} \mathbf{1}^t B^{-1} - \alpha^t B^{-1} \mathbf{1} \alpha^t B^{-1}}{(\alpha^t B^{-1} \alpha)(\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1}) - (\alpha^t B^{-1} \mathbf{1})^2} \right) \mathbf{X},$$

$$\sigma^* = \left(\frac{\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1} \alpha^t B^{-1} - \mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1} \alpha^t B^{-1}}{(\alpha^t B^{-1} \alpha)(\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1}) - (\alpha^t B^{-1} \mathbf{1})^2} \right) \mathbf{X}.$$

هستند که واریانس و کواریانس این دو برآوردگر برابر با مقادیر زیر است:

$$Var(\mu^*) = \frac{\sigma^2 (\alpha^t B^{-1} \alpha)}{(\alpha^t B^{-1} \alpha)(\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1}) - (\alpha^t B^{-1} \mathbf{1})^2},$$

$$Var(\sigma^*) = \frac{\sigma^2 (\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1})}{(\alpha^t B^{-1} \alpha)(\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1}) - (\alpha^t B^{-1} \mathbf{1})^2},$$

$$Cov(\mu^*, \sigma^*) = \frac{-\sigma^2 (\alpha^t B^{-1} \mathbf{1})}{(\alpha^t B^{-1} \alpha)(\mathbf{1}^t B^{-1} \mathbf{1}) - (\alpha^t B^{-1} \mathbf{1})^2}.$$

بهترین برآوردگر ناریب خطی σ و μ به صورت ساده تر برابر:

$$\sigma^* = \frac{1}{K} \left[\left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{s_2(i, 1)} \right) \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1(i, k)}{s_2(i, k)} \right. \right. \\ \left. \left. (X_{*i}^{(j_{ik})} - X_{*i}^{(j_{i, k-1})}) \right) - \right]$$

$$\left(\sum_{i=1}^s \frac{s_1(i, 1)}{s_2(i, 1)} \right) \left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{s_2(i, 1)} X_{*i}^{(j_1)} \right),$$

$$\mu^* = \frac{1}{\sum_{i=1}^s \frac{1}{s_2(i, 1)}} \left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{s_2(i, 1)} X_{*i}^{(j_1)} \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^s \frac{s_1(i, 1)}{s_2(i, 1)} \sigma^* \right),$$

است که در آن،

$$K = \left(\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1(i, k)}{s_2(i, k)} \right) \left(\sum_{i=1}^s \frac{1}{s_2(i, 1)} \right) \\ - \left(\sum_{i=1}^s \frac{s_1(i, 1)}{s_2(i, 1)} \right)^2 > 0.$$

بنابراین برای واریانس این دو برآوردگر نیز مقادیر زیر به دست می آید:

$$Var(\sigma^*) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^s \frac{1}{s_2(i, 1)}}{K},$$

$$Var(\mu^*) = \sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^s \sum_{k=1}^{r_i} \frac{s_1(i, k)}{s_2(i, k)}}{K},$$

$$Cov(\mu^*, \sigma^*) = -\sigma^2 \frac{\sum_{i=1}^s \frac{s_1(i, 1)}{s_2(i, 1)}}{K}.$$

و بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی σ برابر خواهد شد با:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^q y_i + \sum_{i=0}^{q-1} [j_{i+1} - j_i - 1] \delta_i y_i + (1 - \delta_i) y_{i+1} + (n - j_q) y_q \right\} / \left\{ q - \sum_{i=0}^{q-1} [j_{i+1} - j_i - 1] \gamma_i \right\}.$$

مثال اول

نمونه شبیه‌سازی شده در این مثال که در مرجع [۳] آمده است، مربوط به زمان‌های شکست مشاهده شده از سیستمی است که طول عمر مؤلفه‌های آن دارای توزیع نمایی یک پارامتری با $\sigma = 20$ هستند. در این نمونه 10 زمان شکست به صورت مضاعف سانسور شده‌اند. همچنین بایستی یادآور شد که در این سیستم $\alpha = 1$ در نظر گرفته شده است؛ در واقع می‌توان گفت بعد از اولین شکست در این سیستم، توزیع طول عمرهای باقی‌مانده تغییر نمی‌کند و بنابراین مدلی که پیش‌رو داریم مدلی از آماره‌های ترتیبی معمولی است. نمونه مورد نظر به قرار زیر است:

$$x_1 = 0.961, x_2 = 0.990, x_3 = 1.565, x_4 = 2.031$$

$$x_5 = 2.204, x_6 = 2.340, x_7 = 3.642, x_8 = 6.008$$

$$x_9 = 6.538, x_{10} = 7.145, x_{11} = -, x_{12} = -,$$

$$x_{13} = -, x_{14} = 11.937, x_{15} = 15.433, x_{16} = 18.234,$$

$$x_{17} = 18.307, x_{18} = 22.096, x_{19} = -, x_{20} = -,$$

$$x_{21} = -, x_{22} = 28.799, x_{23} = 30.692, x_{24} = 30.737,$$

$$x_{25} = 33.702, x_{26} = 34.245, x_{27} = -, x_{28} = -,$$

$$x_{29} = -, x_{30} = -,$$

σ^* بهترین برآوردگر ناریب خطی σ برابر با 19.9426 و برآوردگر ماکسیمم درستنمایی تقریبی σ نیز برابر با مقدار 19.9712 است. تایج محاسبه برآوردگر بیز و همچنین خطای استاندارد پسین برای a و b ‌های متفاوت در جدول (۱) آمده است که

$se(\hat{\sigma}) = \sqrt{Var(\hat{\sigma} | \mathbf{X} = \mathbf{x})} = \sqrt{(\widehat{\sigma^2} - \hat{\sigma}^2)}$. همان‌گونه که مشاهده می‌شود برای حالت 1 و $a = 1$ و $b = 2$ ، کمترین مقدار را می‌گیرد. نزدیکترین مقدار را به مقدار واقعی دارد اما خطای استاندارد پسین در حالت $a = 0$ و $b = 1$ ، کمترین مقدار را می‌گیرد.

با در نظر گرفتن توزیع نمایی دو پارامتری با تابع چگالی و تابع توزیع

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}, \quad x \geq \mu, \sigma > 0,$$

$$F(x) = 1 - e^{-\frac{(x-\mu)}{\sigma}}, \quad x \geq \mu, \sigma > 0,$$

تابع درستنمایی بر اساس نمونه سانسور شده مضاعف، به صورت زیر است:

$$L = const \times \sigma^{-q} [1 - e^{-\frac{y_1 - \mu}{\sigma}}]^{j_1 - 1} \\ e^{\frac{\mu}{\sigma}(n - j_1 + 1)} e^{-\frac{[\sum_{i=1}^q y_i + (n - j_q) y_q]}{\sigma}} \\ \times \prod_{i=1}^{q-1} \left[e^{-\frac{y_i}{\sigma}} - e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}} \right]^{j_{i+1} - j_i - 1}.$$

مشخص است که اگر $j_1 = 1$ ، تابع بالا تابعی یکنوا در μ است و بنابراین برآورد ماکسیمم درستنمایی μ برابر:

$$\bar{\mu} = y_1 = x^{(j_1)} = x^{(1)},$$

است و اگر $j_1 > 1$ ، طبق معادله‌ی درستنمایی زیر

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma} \left[(n - j_1 + 1) - (j_1 - 1) \frac{e^{-\frac{(y_1 - \mu)}{\sigma}}}{1 - e^{-\frac{(y_1 - \mu)}{\sigma}}} \right] = 0,$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی μ برابر:

$$\bar{\mu} = y_1 + \bar{\sigma} \log \left[\frac{n - j_1 + 1}{n} \right].$$

خواهد بود. معادله‌ی درستنمایی برای σ نیز به صورت زیر است:

$$\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = \frac{-1}{\sigma^2} \left[q\sigma + (n - j_1 + 1)y_1 - \left\{ \sum_{i=1}^q y_i + (n - j_q) y_q \right\} \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^{q-1} (j_{i+1} - j_i - 1) \left\{ \frac{y_i e^{-\frac{y_i}{\sigma}} - y_{i+1} e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}}{e^{-\frac{y_i}{\sigma}} - e^{-\frac{y_{i+1}}{\sigma}}} \right\} \right] = 0.$$

مانند بخش قبل با توجه به این که این معادله، معادله‌ای یکنوا بر اساس σ است، برآورد ماکسیمم درستنمایی یکتایی را نتیجه می‌دهد اما به دلیل این که جواب صریحی از این معادله به دست نمی‌آید، با به کارگیری تقریب بالاکریشنان بر روی این معادله، برآورد ماکسیمم درستنمایی تقریبی را محاسبه می‌کنیم و به این ترتیب برآورد ماکسیمم درستنمایی σ برابر:

$$\bar{\sigma} = \left\{ \sum_{i=1}^q y_i + (n - j_q) y_q + \sum_{i=1}^{q-1} (j_{i+1} - j_i - 1)(\delta_i y_i + (1 - \delta_i) y_{i+1}) - (n - j_1 + 1) y_1 \right\} / \left\{ q - \sum_{i=1}^{q-1} (j_{i+1} - j_i - 1) \gamma_i \right\}.$$

مثال دوم

۷ شبیه‌سازی

در این قسمت نمونه‌ای شامل 30 زمان شکست شبیه‌سازی شده است. این نمونه‌ی شبیه‌سازی شده مربوط به زمان‌های شکست مشاهده شده از یک سیستم 2 از 5 دنباله‌ای هستند و طول عمر مؤلفه‌های این سیستم دارای توزیع نمایی یک پارامتری با $\sigma = 100$ است.

این مثال شامل پنج نمونه شبیه‌سازی شده است که این نمونه‌ها هر نمونه شامل پنج مشاهده است که برخی از این مشاهدات سانسور شده‌اند و به صورت کلی در هر نمونه زمان شکست پنجم مشاهده نمی‌شود زیرا سیستم بعد از شکست چهارم خود به خود از کار می‌افتد.

همچنین در این سیستم n -امین شکست بر توزیع طول عمر i - مؤلفه باقی‌مانده تأثیر می‌گذارد، به این ترتیب که مجموعه پارامترهای α برابر مقادیر زیر است:

پیوست

$$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 1.2, \alpha_3 = 1.4, \alpha_4 = 1.6, \alpha_5 = 1.8.$$

اثبات قضیه‌ها

۲.۲ قضیه‌ی

در این مثال ابتدا مقادیر $\hat{\sigma}$ و $se(\hat{\sigma})$ را محاسبه و سپس با توجه به این که در نمونه آخر تنها سه زمان شکست مشاهده شده است، زمان شکست چهارم پیشگویی می‌شود. نمونه مورد نظر به قرار زیر است:

اثبات. با توجه به قضیه ۱.۲، برای $1 \leq l \leq r$ داریم:

$$X_*^{(l)} = \mu + \sum_{k=1}^l \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)} = \mu + \sum_{k=1}^l U_*^{(k)}.$$

و با در نظر گرفتن $1 = q$ داریم:

$$\begin{aligned} f_{X_*^{(j_1)}}(x^{j_1}) &= f_{\mu + \sum_{k=1}^{j_1} U_*^{(k)}}(x^{j_1}) \\ &= f_{\sum_{k=1}^{j_1} U_*^{(k)}}(x^{j_1} - \mu), \end{aligned}$$

بنابراین تابع چگالی توأم آماره‌های ترتیبی دنباله‌ای سانسور شده مضاعف نوع دوم تحت توزیع نمایی به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_{X_*}(x) = \prod_{p=1}^q f_{\sum_{k=j_{p-1}}^{j_p} U_*^{(k)}}(x^{(j_p)} - x^{(j_{p-1})}).$$

$$x_1^{(1)} = -, x_1^{(2)} = -, x_1^{(3)} = 15.085,$$

$$x_1^{(4)} = 65.409,$$

$$x_2^{(1)} = 36.982, x_2^{(2)} = 48.055, x_2^{(3)} = -,$$

$$x_2^{(4)} = 197.405,$$

$$x_3^{(1)} = 29.657, x_3^{(2)} = 56.983,$$

$$x_3^{(3)} = 59.664, x_3^{(4)} = 75.441,$$

$$x_4^{(1)} = 4.738, x_4^{(2)} = 33.625,$$

$$x_4^{(3)} = 48.066, x_4^{(4)} = 89.756$$

$$x_5^{(1)} = 19.128, x_5^{(2)} = 58.242, x_5^{(3)} = 73.406.$$

نتیجه محاسبه‌ها در جدول (۲) آمده است که با توجه به نتایج این جدول مشاهده می‌شود که در حالت $a = 0$ و $b = 2$ ، مقدار $\hat{\sigma}$ از و هم توزیع نمایی استاندارد به صورت ارلنگ تعمیم یافته توزیع شده‌اند، بنابراین تابع توزیع و تابع چگالی

$$\begin{aligned} \text{بنابراین داریم:} \\ c &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \left(\prod_{i=1}^s \prod_{p=1}^{q_i} a_{k_ip}^{(j_{i,p}-1)}(j_{ip}) \right) \\ &\times \int_0^\infty \sigma^{-(Q+b+1)} e^{-\frac{a}{\sigma}} e^{-\frac{\sum_{i=1}^s \sum_{p=1}^{q_i} V_{ik_ip}^p}{\sigma}} d\sigma \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \int_0^\infty \sigma^{-(Q+b+1)} e^{-\frac{V_{\mathbf{k}}+a}{\sigma}} d\sigma \\ &= \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(Q+b)}{(V_{\mathbf{k}}+a)^{Q+b}}. \end{aligned}$$

سرانجام چگالی پسین Σ به شرط \mathbf{X} برابر:

$$\pi_{\Sigma|\mathbf{X}}(\sigma|\mathbf{x}) = c^{-1} \sigma^{-(Q+b+1)} \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) e^{-\frac{V_{\mathbf{k}}+a}{\sigma}}.$$

است. \square

۳.۲ لم

اثبات. فرض کنید $X_1, \dots, X_r \stackrel{iid}{\sim} Exp(0, 1)$ در این صورت $Y = \sum_{j=1}^r Y_j = \sum_{j=1}^r \frac{1}{\gamma_j} X_j$ دارای توزیع ارلنگ تعمیم یافته با چگالی زیر است:

$$f_Y(t) = \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \sum_{j=1}^r a_j(r) e^{-\gamma_j t}, \quad t \geq 0.$$

با توجه به چگالی بالا، k -امین گشتاور Y برابر:

$$E(Y^k) = \left(\prod_{j=1}^r \gamma_j \right) \sum_{j=1}^r a_j(r) \frac{\Gamma(k+1)}{\gamma_j^{k+1}} \quad (\forall)$$

است. اکنون تنها کافی است نشان دهیم:

$$E(Y^k) = k! \sum_{l_1=0}^k \sum_{l_2=0}^{l_1} \dots \sum_{l_{r-1}=0}^{l_{r-2}} \left(\gamma_1^{l_{r-1}} \dots \gamma_{r-1}^{l_1-l_2} \gamma_r^{k-l_1} \right)^{-1}. \quad (\lambda)$$

برای اثبات از استقراء استفاده می‌کنیم. با توجه به این نکته که $r = 2$ و $E(Y_i^k) = k!/\gamma_i^k$ مستقل هستند، برای داریم:

$$E((Y_1 + Y_2)^k) = k! \sum_{l_1=0}^k \left(\gamma_1^{l_1} \gamma_2^{k-l_1} \right)^{-1}.$$

اکنون بنابر اصل استقراء با فرض برقراری رابطه‌ی (λ) برای نمونه‌ی r -تایی، اثبات می‌شود که نمونه‌ی $1+r$ -تایی نیز در این رابطه صدق می‌کند:

$$\begin{aligned} E(Y^k) &= E \left(\sum_{j=1}^{r+1} Y_j \right)^k = E \left(\sum_{j=1}^r Y_j + Y_{r+1} \right)^k \\ &= k! \sum_{l_0=0}^k \sum_{l_1=0}^{l_0} \dots \sum_{l_{r-1}=0}^{l_{r-2}} \left(\gamma_1^{l_{r-1}} \dots \gamma_{r-1}^{l_1-l_2} \gamma_r^{l_0-l_1} \gamma_{r+1}^{k-l_0} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

$$\text{به ترتیب عبارت از:} \quad \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} U_*^{(k)} = \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}$$

$$\begin{aligned} F \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}(t) &= 1 - \left(\prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \\ &\sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{1}{\gamma_k} a_k^{(j_{p-1})}(j_p) e^{-\frac{\gamma_k}{\sigma} t}, \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} f \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}(t) &= \left(\prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \sigma^{-1} \\ &\sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} a_k^{(j_{p-1})}(j_p) e^{-\frac{\gamma_k}{\sigma} t}, \quad t \geq 0, \end{aligned}$$

هستند. بنابراین با قرار دادن این رابطه در معادله‌ی قبلی داریم:

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{X}_*}(\mathbf{x}) \prod_{p=1}^q f \sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \frac{\sigma}{\gamma_k} W_*^{(k)}(x^{(j_p)} - x^{(j_{p-1})}) &= \\ \sigma^{-q} \left(\prod_{p=1}^q \prod_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} \gamma_k \right) \prod_{p=1}^q \left(\sum_{k=j_{p-1}+1}^{j_p} a_k^{(j_{p-1})}(j_p) \right. \\ \left. \exp \left(\frac{-\gamma_k}{\sigma} (x^{(j_p)} - x^{(j_{p-1})}) \right) \right). \end{aligned}$$

۳.۱ لم

اثبات. می‌دانیم که

$$\begin{aligned} \pi_{\Sigma|\mathbf{X}}(\sigma|\mathbf{x}) &= \frac{\prod_{i=1}^s f_{\mathbf{X}_{*i}|\Sigma}(\mathbf{x}_i|\sigma) \times \pi_\Sigma(\sigma)}{\int_0^\infty \prod_{i=1}^s f_{\mathbf{X}_{*i}|\Sigma}(\mathbf{x}_i|\sigma) \times \pi_\Sigma(\sigma) d\sigma} \\ &= c^{-1} \sigma^{-(Q+b+1)} e^{-\frac{a}{\sigma}} \prod_{i=1}^s \prod_{p=1}^{q_i} \\ &\times \sum_{k=j_{i,p-1}+1}^{j_{ip}} a_k^{(j_{i,p-1})}(j_{ip}) e^{-\frac{V_{ik}^p}{\sigma}}, \end{aligned}$$

که در آن،

$$c = \int_0^\infty \sigma^{-(Q+b+1)} e^{-\frac{a}{\sigma}}$$

$$\prod_{i=1}^s \prod_{p=1}^{q_i} \sum_{k=j_{i,p-1}+1}^{j_{ip}} a_k^{(j_{i,p-1})}(j_{ip}) e^{-\frac{V_{ik}^p}{\sigma}} d\sigma.$$

اما از آنجایی که

$$\prod_{i=1}^s \prod_{p=1}^{q_i} \sum_{k=1}^{z_{ip}} x_{ipk} = \sum_{\mathbf{k}=(k_{11}, \dots, k_{sq_s}), \atop k_{i,\varphi} \in (1, \dots, z_{\nu,\varphi}), \atop 1 \leq \varphi \leq q_\nu, 1 \leq \nu \leq s} \prod_{i=1}^s \prod_{p=1}^{q_i} x_{ipk_{ip}},$$

اکنون با انتقال اندیس‌های $l_1 \rightarrow l_0$ و ... و $l_r \rightarrow l_{r-1}$ استقراء کامل با قرار دادن رابطه‌ی (۹) در فرمول $\hat{X}_{*i}^{(r_i)}$ و با ساده کردن معادله‌ی و رابطه‌ی (۸) اثبات می‌شود. اینک با برابر قرار دادن (۷) و (۸) و آن بر طبق دو معادله (۳) و (۴)، پیش‌گویی‌کننده $\hat{X}_{*i}^{(r_i)}$ برابر تقسیم دو طرف بر $k!$ اثبات کامل می‌شود.

قضیه‌ی ۴.۳

است.

اثبات. به دلیل استقلال شرطی $\mathbf{X}_{*1}, \dots, \mathbf{X}_{*s}$ به شرط σ داریم:

قضیه‌ی ۴.۲

اثبات. با در نظر گرفتن مدل خطی $\mathbf{X}_\mu = \alpha\sigma + \Delta$,

با شرایط زیر

$$E(\mathbf{X}_\mu) = \sigma\alpha,$$

$$Cov(\mathbf{X}_\mu) = Cov(\Delta) = \sigma^2 B,$$

$$k = 0, n = \sum_{i=1}^s r_i,$$

که α ماتریس طرح، σ پارامتر مورد نظر و Δ بردار تصادفی است و جایگذاری این مقادیر در قضیه ۱.۴ اثبات کامل می‌شود.

قضیه‌ی ۴.۳

اثبات. اگر مدل خطی

$$\mathbf{X} = (\alpha, \mathbf{1}) \begin{pmatrix} \sigma \\ \mu \end{pmatrix} + \Delta,$$

با شرایط

$$E(\mathbf{X}) = (\alpha, \mathbf{1}) \begin{pmatrix} \sigma \\ \mu \end{pmatrix},$$

$$Cov(\mathbf{X}) = Cov() = \sigma^2 B,$$

$$k = 1, n = \sum_{i=1}^s r_i,$$

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \mu \end{pmatrix} \text{که } (\alpha, \mathbf{1}) \text{ ماتریس طرح،}$$

تصادفی است را در نظر بگیریم آنگاه با جایگذاری این مقادیر در قضیه ۱.۴ نتیجه دلخواه به دست می‌آید.

بنابراین تابع چگالی پیش‌گویی‌کننده $X_{*i}^{(r_i)}$ به شرط $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} & f_{X_{*i}^{(r_i)} | \mathbf{X}}(x_i^{(r_i)} | \mathbf{x}) \\ &= \int_0^\infty f_{(X_{*i}^{(r_i)}, \Sigma) | \mathbf{X}}((x_i^{(r_i)}, \sigma) | \mathbf{x}) d\sigma \\ &= \int_0^\infty f_{X_{*i}^{(r_i)} | (\mathbf{X}_{*i}, \Sigma)}(x_i^{(r_i)} | \mathbf{x}_i, \sigma) \\ &\quad \times \pi_{\Sigma | \mathbf{X}}(\sigma | \mathbf{x}) d\sigma \\ &= c^{-1} \left(\prod_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \gamma_{ik} \right) \left(\sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} a_k^{(j_{iq_i})}(r_i) \right. \\ &\quad \left. \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \frac{\Gamma(Q+b+1)}{(V_{i\mathbf{k}}^{(k)}(x_i^{(r_i)}))^{Q+b+1}} \right), \end{aligned}$$

که در آن،

$V_{i\mathbf{k}}^{(k)}(x_i^{(r_i)}) = \gamma_{ik}(x^{(r_i)} - x^{(j_{iq_i})}) + V_{\mathbf{k}} + a$. پیش‌گویی‌کننده $X_{*i}^{(r_i)}$ برابر با میانگین $\hat{X}_{*i}^{(r_i)}$ از $\mathbf{X}_{*i}^{(r_i)}$ به شرط $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ است و بنابراین

$$\begin{aligned} \hat{X}_{*i}^{(r_i)} &= E(X_{*i}^{(r_i)} | \mathbf{X} = \mathbf{x}) = \int_{x_i^{(j_{iq_i})}}^\infty t f_{X_{*i}^{(r_i)} | \mathbf{X}}(t | \mathbf{x}) dt = \\ & c^{-1} \left(\prod_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} \gamma_{ik} \right) \left(\sum_{k=j_{iq_i}+1}^{r_i} a_k^{(j_{iq_i})}(r_i) \right. \\ &\quad \left. \sum_{\mathbf{k} \in \mathbf{K}} \Psi(\mathbf{k}) \int_{x_i^{(j_{iq_i})}}^\infty t \frac{\Gamma(Q+b+1)}{(V_{i\mathbf{k}}^k(t))^{Q+b+1}} dt \right), \end{aligned}$$

و با استفاده از انتگرال‌گیری جزء‌به‌جزء داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{x_i^{(j_{iq_i})}}^\infty t (V_{i\mathbf{k}}^k(t))^{-(Q+b+1)} dt = \\ & \frac{(V_{\mathbf{k}} + a)^{-(Q+b)}}{(Q+b)} \left[\frac{x_i^{(j_{iq_i})}}{\gamma_{ik}} + \frac{V_{\mathbf{k}} + a}{\gamma_{ik}^2(Q+b-1)} \right]. \end{aligned} \quad (۹)$$

جدول ۱: نتایج برآورد بیزی پارامتر مدل با استفاده از چگالی پیشین گامای وارون برای a و b -های متفاوت

a	b	$\hat{\sigma}$	$se(\hat{\sigma})$
0	-1	21.6139	4.5067
1	0	20.7881	4.2466
0	0	20.7485	4.2368
1	1	19.9873	4.0007
0	1	19.9488	3.9933
1	2	19.2458	3.7776
0	2	19.2088	3.7717

جدول ۲: نتایج برآورد بیزی پارامتر مدل و پیشگویی زمان شکست چهارم از نمونه پنجم با استفاده از چگالی پیشین گامای وارون برای a و b -های متفاوت

a	b	$\hat{\sigma}$	$se(\hat{\sigma})$	$\hat{X}_{*5}^{(4)}$
0	-1	120.6417	30.2652	111.1065
1	0	113.9492	27.7374	109.0151
0	0	113.8932	27.7239	108.9976
1	1	107.9084	25.5312	107.1274
0	1	107.8554	25.5188	107.1108
1	2	102.4721	23.6022	105.4285
0	2	102.4217	23.5908	105.4128

جدول ۳: نتایج برآورد بیزی پارامتر مدل با استفاده از چگالی پیشین گامای وارون برای a و b های متفاوت

$k = 150$	a	b	$\bar{\sigma}$	$\bar{se}(\hat{\sigma})$
	1	0	31.5958	6.4565
	0	0	31.5557	6.4484
	1	1	30.3779	6.0825
	0	1	30.3393	6.0748
	1	2	29.2502	5.74326
	0	2	28.9091	5.7359
$k = 1000$	a	b	$\bar{\sigma}$	$\bar{se}(\hat{\sigma})$
	1	0	31.2674	6.3894
	0	0	31.2273	6.3812
	1	1	30.0622	6.0193
	0	1	30.0236	6.0116
	1	2	28.9462	5.6835
	0	2	28.9091	5.6762
$k = 1500$	a	b	$\bar{\sigma}$	$\bar{se}(\hat{\sigma})$
	1	0	31.3598	6.4081
	0	0	31.3197	6.3999
	1	1	30.1511	6.0369
	0	1	30.1125	6.0292
	1	2	29.0319	5.7001
	0	2	28.9948	5.6929

مراجع

- [1] Ahmadi, J. and Doostparast, M. (2008). Statistical inference based on k -records. *Mashhad Research Journal of Mathematical Sciences*. **1**(1), 67–82.
- [2] Balakrishnan, N. (1990). On the maximum likelihood estimation of the location and scale parameters of exponential distribution based on multiply Type-II censored samples. *Applied Statistics*. **17**, 55–61.
- [3] Balasubramanian, K. and Balakrishnan, N. (1992). Estimation for one-and two-parameter exponential distributions under multiple Type-II censoring. *Statistische Hefte*. **33**, 203-216.
- [4] Jaheen, Z.F. (2005). Estimation based on generalized order statistics from the Burr model. *Communications in Statistics - Theory and Methods*. **34**, 785–794.
- [5] Kamps, U. (1995a). A concept of generalized order statistics. *Statistical Planning and Inference*, **48**, 1-23.
- [6] Kamps, U. (1995b). *A Concept of Generalized Order Statistics*. Teubner. Stuttgart.
- [7] Schenk, N., Burkschat, M., Cramer, E. and Kamps, U. (2011). Bayesian estimation and prediction with multiply Type-II censored samples of sequential order statistics from one- and two-parameter exponential distributions. *Statistical Planning and Inference*. **141**, 1575–1587.
- [8] Sultan, K.S. (2008). Bayesian estimates based on record values from the inverse Weibull life time model. *Quality Technology and Quantitative Management*. **5**, 363–374.