

کاربرد توزیع آماری گامای دو متغیره کرولی در تحلیل فرآیندهای هیدرولوژیکی مطالعه موردی: ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت

آینتا عبداللهی نانوایشه^۱

چکیده:

روش‌های ریاضی و توزیع‌های آماری، نتایجی دقیق در محاسبات اقلیمی و فرآیندهای هیدرولوژیکی ارائه می‌دهند. آگاهی از توزیع احتمال بارندگی‌ها، زمینه مناسبی برای برنامه‌ریزی منابع آب فراهم می‌آورد. به‌علت اهمیت بارش در مطالعات اقتصادی، اجتماعی و به‌خصوص کشاورزی تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج بیشتر تحقیقات مناسب بودن مدل گاما از جمله توزیع گامای دو متغیره را برای داده‌های بارش نشان می‌دهد. توزیع گامای دو متغیره در مدل‌بندی فرآیندهای هیدرولوژیکی کاربرد دارد. در مقاله حاضر با فرض این که X و Y از مدل گامای دو متغیره کرولی پیروی می‌کنند، پس از توضیح مختصری در مورد توزیع دقیق توابع $U = X + Y$ ، $P = XY$ ، $Q = X/(X + Y)$ و همچنین گشتاورهای مربوط به آن‌ها، اعتبار این مدل برای داده‌های ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت بررسی شد. نتایج نشان داد که داده‌های بارندگی این منطقه نیز مناسب بودن مدل گامای دو متغیره کرولی را تأیید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: توزیع گامای دو متغیره کرولی، گشتاورهای توزیع گامای دو متغیره کرولی، مدل توزیع بارش.

۱ مقدمه

بیشتر تحقیقات مناسب بودن مدل گاما از جمله توزیع گامای دو متغیره را برای داده‌های بارش نشان می‌دهد. (برای اطلاعات بیشتر در این زمینه بالا کریشنان^۲ و لای^۳ را ببینید [۱]). این مدل یکی از پرکاربردترین مدل‌ها در تحلیل فرآیندهای هیدرولوژیکی است که در مقالات موجودند [۲]. در بین همه مدل‌های گامای دو متغیره ارائه شده، یک مدل ساده و انعطاف‌پذیر، مدل کرولی است [۳]، که تابع چگالی احتمال توام X و Y در آن به‌صورت زیر ارائه شده است:

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\beta y)[1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha\beta \exp(-\alpha y)[1 - \exp(-\beta x)] & \text{اگر } 0 \leq \beta x \leq \alpha y \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $x > 0$ ، $y > 0$ ، $\alpha > 0$ و $\beta > 0$ است. ترکیب متغیرهایی مثل $U = X + Y$ ، $P = XY$ ، $Q = X/(X + Y)$ به‌طور ویژه در مطالعه پدیده‌های هیدرولوژیکی

پیش‌بینی وقوع یا عدم وقوع بارندگی روزانه و مقدار این بارندگی در مقیاس روزانه و سالانه اهمیت بسیاری در برنامه‌ریزی آبیاری و مدیریت منابع آب دارد. در نواحی دیم‌کاری، که بارش تنها منبع آب برای کشاورزی است، تغییر در مقدار و توزیع فصلی بارش می‌تواند تاثیر زیادی بر اقتصاد منطقه داشته باشد. تعیین مدل توزیع بارش طی سال و تغییرات زمانی آن در ایران که عمدتاً دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است و در آن آب مهمترین نهاد محدود کننده تولید است می‌تواند بسیار مهم باشد. به‌علت اهمیت توزیع بارش، تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج

^۱ کارشناس ارشد آمار

کد موضوع بندی ریاضی: ۶۲P۱۲، ۶۲GOV

^۲Balakrishnan

^۳Lai

$$\beta_x(a, b) = \int_0^\infty t^{a-1} \exp(1-t)^{b-1} dt. \quad (۴)$$

اهمیت دارند [۴، ۵، ۶]. اهداف این مقاله عبارت از مرور ویژگی‌های مدل ۱، بیان توزیع دقیق متغیرهای $P = XY$ ، $U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ ، که توسط آنپائولا و همکاران [۷] ارائه شده‌اند و همچنین بررسی احتمالات متغیرهای بارش داده‌های ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت است. در بخش ۲ امیدریاضی و واریانس، توزیع‌های حاشیه‌ای، ضریب همبستگی، ضریب چولگی و ضریب برجستگی توزیع گامای دو متغیره کرولی را محاسبه خواهیم کرد. در بخش ۳ و ۴ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی دقیق متغیرهای U ، P و Q را بیان خواهیم کرد و در نهایت در بخش ۵ و ۶ گشتاورهای آن‌ها و کاربردهایی از نتایج به دست آمده را در داده‌های بارندگی ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت ارائه می‌کنیم. محاسبات شامل چندین تابع خاص است مانند تابع بسل اصلاح شده، تابع گامای ناکامل و تابع بتای ناکامل است که به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

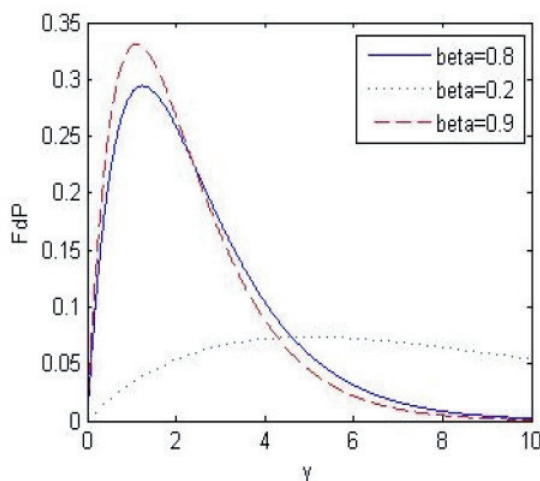
$$f_X(x) = \alpha^2 x \exp(-\alpha x) \quad (۵)$$

$$f_Y(y) = \beta^2 y \exp(-\beta y) \quad (۶)$$

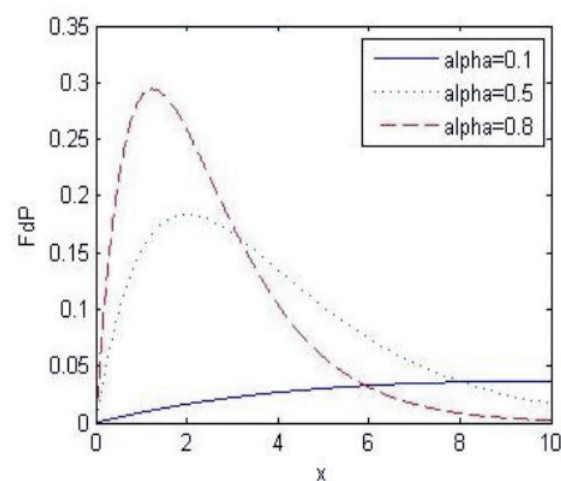
شکل ۱ توابع چگالی احتمال فوق را را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم‌افزاری مناسب که در محیط متلب^۴ نوشته شده است نشان می‌دهد.

$$K_n(x) = (\sqrt{\pi} x^n) / (2^n \Gamma(n + 1/2)) \times \int_1^\infty (t^2 - 1)^{n-1/2} \exp(-xt) dt \quad (۲)$$

$$\Gamma(a, x) = \int_x^\infty t^{a-1} \exp(-t) dt \quad (۳)$$



(ب)



(الف)

شکل ۱- تابع چگالی احتمال (الف) $f_X(x)$ به ازای $\alpha = 0.1, 0.5, 0.8$ و (ب) $f_Y(y)$ به ازای $\beta = 0.8, 0.2, 0.9$

با استفاده از توزیع های X و Y و با استفاده از لم ۱، امید ریاضی و کواریانس X و Y به صورت زیر به دست می آیند:

$$E[X] = \int_0^{\infty} x \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} x^2 \alpha^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha}$$

$$E[y] = \int_0^{\infty} y \beta^2 y e^{-\beta y} dy = \int_0^{\infty} y^2 \beta^2 e^{-\beta y} dy = \frac{2}{\beta}$$

$$E[XY] = \alpha \beta \int_0^{\infty} \int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^{\infty} xy \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy dx + \alpha \beta \int_0^{\infty} \int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^{\infty} xy \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta x)] dx dy = \frac{5}{\alpha \beta},$$

$$Con[x, Y] = E[xy] - E[x]E[Y] = \frac{1}{\alpha \beta}, \quad (۱۰)$$

و به همین ترتیب $E[X^2]$ ، $E[Y^2]$ و $Var[X]$ و $Var[Y]$ به شکل زیر حاصل می شوند:

$$E[X^2] = \int_0^{\infty} x^2 \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} x^3 \alpha^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{6}{\alpha^2},$$

$$E[Y^2] = \int_0^{\infty} y^2 \beta^2 y e^{-\beta y} dy = \int_0^{\infty} y^3 \beta^2 e^{-\beta y} dy = \frac{6}{\beta^2},$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{6}{\alpha^2} - \left(\frac{2}{\alpha}\right)^2 = \frac{2}{\alpha^2},$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{6}{\beta^2} - \left(\frac{2}{\beta}\right)^2 = \frac{2}{\beta^2}.$$

به این ترتیب ضریب همبستگی X و Y را به صورت زیر به دست می آیند:

$$\rho = \frac{Cov[x, y]}{\sqrt{VAR[X]} \sqrt{VAR[Y]}} = \frac{\frac{1}{\alpha \beta}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}} \sqrt{\frac{2}{\beta^2}}} = \frac{1}{2},$$

و ضریب تغییرات و تابع مولد گشتاور X و Y نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$Cv[X] = Cv[Y] = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}}}{\frac{2}{\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$M_X[t] = E[e^{tx}] = \int_0^{\infty} e^{tx} \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^2}{(t - \alpha)^2},$$

به علاوه توزیع شرطی x به شرط $Y = y$ به صورت زیر است:

$$f(x|Y=y) = \begin{cases} \alpha(\beta y)^{-1} [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha(\beta y)^{-1} \exp(-\alpha x) [\exp(\beta y) - 1] & \text{اگر } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases}, \quad (۷)$$

و به طور مشابه توزیع شرطی Y به شرط $X = x$ به صورت زیر است:

$$f(Y|X=x) = \begin{cases} \beta(\alpha x)^{-1} \exp(-\beta y) [\exp(\alpha x) - 1] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \beta(\alpha x)^{-1} [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases} \quad (۸)$$

لم ۱.۲. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند [۷]، در این صورت برای مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ و $m \geq 1$ داریم:

$$E[X^n Y^m] = \frac{m!}{\alpha^n \beta^m 2^{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} + \frac{n!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(m+k)! (2^{m+k+1} - 1)}{k! 2^k}.$$

برهان با استفاده از معادله (۱) داریم:

$$E[X^n Y^m] = \alpha \beta \int_0^{\infty} \int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^{\infty} x^n y^m \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy dx + \alpha \beta \int_0^{\infty} \int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^{\infty} x^n y^m \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta x)] dx dy = \alpha \beta^{-m} \int_0^{\infty} x^n \Gamma(m+1, \alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \beta \alpha^{-n} \int_0^{\infty} y^m \Gamma(n+1, \beta y) [1 - \exp(-\beta y)] dy.$$

از طرفی با استفاده از اتحاد ارائه شده در اولدهام و همکاران [۸]

$$\Gamma(n+1, x) = n! \exp(-x) \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad (۹)$$

و به این ترتیب داریم:

$$E[X^n Y^m] = \alpha \beta^{-m} \int_0^{\infty} x^n \left[n! \exp(-\alpha x) \sum_{k=0}^n \frac{(\alpha x)^k}{k!} \right] [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \beta \alpha^{-n} \int_0^{\infty} y^m \left[m! \exp(-\beta y) \sum_{k=0}^m \frac{(\beta y)^k}{k!} \right] [1 - \exp(-\beta y)] dy = \alpha \beta^{-m} m! \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!} \int_0^{\infty} x^{n+k} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] dx.$$

در نهایت نتیجه لم، با استفاده از انتگرال گیری ساده به صورت زیر به دست می آید:

$$E[X^n Y^m] = \frac{m!}{\alpha^n \beta^m 2^{n+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} + \frac{n!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(m+k)! (2^{m+k+1} - 1)}{k! 2^k}.$$

از معادله (۱۳) تابع چگالی احتمال u به صورت زیر بیان می شود:

$$f_U(u) = \int_0^\lambda \alpha \beta u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha uq)] dq + \int_\lambda^1 \alpha \beta u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)] dq.$$

در نهایت نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال گیری ساده به صورت زیر به دست می آید:

$$f_U(u) = (\alpha + \beta) \exp(-\alpha u) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta u) - \beta^2 \exp(-\alpha u)}{\beta - \alpha}.$$

لم ۲.۳. با توجه به معادله (۲.۳.۱۶.۱) در مرجع [۹]، در صورتی که $q > 0$ باشد داریم:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-px - \frac{q}{x}\right) dx = 2 \left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2} k_\alpha(2\sqrt{pq}). \quad (۱۴)$$

قضیه ۳.۳. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، برای $0 < P < \infty$ داریم:

$$f_P(p) = 2\alpha\beta[\Gamma(0, \sqrt{\alpha\beta p}) - k_0(2\sqrt{\alpha\beta p})]. \quad (۱۵)$$

قضیه های ۱.۳ تا ۳.۳ تابع چگالی احتمال $P = XY$ ، $U = X + Y$ ، اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم X و $Z = X/Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را زمانی که تابع چگالی توأم X و Y به شکل (۱) باشد، ارائه می دهد:

$$f(x, p) = \begin{cases} \alpha\beta x^{-1} \exp(-\beta p x^{-1}) [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq x \leq \delta \\ \alpha\beta x^{-1} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta p x^{-1})] & \text{اگر } \delta < x \end{cases}, \quad (۱۶)$$

که در آن $\delta = \sqrt{\frac{\beta p}{\alpha}}$. به این ترتیب تابع چگالی احتمال P به شکل زیر خواهد بود:

$$f_P(p) = \alpha\beta \int_0^\delta x^{-1} \exp(-\beta p x^{-1}) [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \alpha\beta \int_\delta^\infty x^{-1} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta p x^{-1})] dx.$$

با جایگزینی $t = \frac{\beta p}{x}$ و $k = \alpha x$ انتگرال $f_P(p)$ به صورت زیر بیان می شود:

$$f_P(p) = \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta p}}^\infty t^{-1} \exp(-t) dt - \alpha\beta \int_0^\infty x^{-1} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta p}{x}\right) dx + \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta p}}^\infty k^{-1} \exp(-k) dk.$$

در نهایت نتیجه با ترکیب رابطه (۴) و با استفاده از لم ۲.۳ به دست

□

$$M_Y[t] = E[e^{tY}] = \int_0^\infty e^{tY} \beta^2 Y e^{-\beta Y} dY = \frac{\beta^2}{(t - \beta)^2}.$$

فلذا ضریب چولگی و ضریب برجستگی X به ترتیب $\gamma_1[X]$ و $\gamma_2[X]$ به صورت زیر است:

$$\gamma_1[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X - \mu_x)^3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_0^\infty (X - \mu_x)^3 \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X - \mu_x)^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\sigma^4} \int_0^\infty (X - \mu_x)^4 \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx - 3 = 3,$$

به طریق مشابه، ضریب چولگی و ضریب برجستگی Y ، $\gamma_1[Y]$ و $\gamma_2[Y]$ به شکل زیر خواهد بود:

$$\gamma_1[Y] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(y - \mu_y)^3}{\sigma^3} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[Y] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(y - \mu_y)^4}{\sigma^4} - 3 = 3.$$

۳ تابع چگالی احتمال

قضیه های ۱.۳ تا ۳.۳ تابع چگالی احتمال $P = XY$ ، $U = X + Y$ ، اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم X و $Z = X/Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را زمانی که تابع چگالی توأم X و Y به شکل (۱) باشد، ارائه می دهد:

قضیه ۱.۳. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند در این صورت داریم:

$$f_U(u) = (\alpha + \beta) \exp(-\alpha u) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta u) - \beta^2 \exp(-\alpha u)}{\beta - \alpha}, \quad (۱۲)$$

که در آن $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ و $u \geq 0$

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم $U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ به صورت زیر است:

$$f(u, q) = \begin{cases} \alpha\beta u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha uq)] & \text{اگر } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)] & \text{اگر } \lambda \leq q \leq 1 \end{cases}, \quad (۱۳)$$

که در آن $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ و $0 \leq q \leq 1$ و $u > 0$

□

می آید.

□

قضیه ۴.۳. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله اثبات. با استفاده از معادله (۱۳) تابع چگالی احتمال Q به صورت (۱) باشند، رابطه زیر برای $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ برقرار خواهد بود: زیر بیان می شود:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha Z)^2} & \text{اگر } Z \leq \eta \\ \frac{\beta}{\alpha Z^2} - \frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha Z)^2} & \text{اگر } \eta < Z \end{cases} \quad (17)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم X و Y (۲۰)،

$$f_Q(q) = \begin{cases} \alpha\beta \int_0^\infty u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha uq)] du & \text{اگر } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta \int_0^\infty u \exp(-\alpha uq) [1 - \exp(-\beta u + \beta uq)] du & \text{اگر } 0 \leq q \leq 1 \end{cases}$$

$Z = X/Y$ به صورت زیر به دست می آید:

$$f(x, z) = \begin{cases} \alpha\beta x z^{-2} \exp\left(\frac{-\beta}{z}x\right) [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq z \leq \eta \\ \alpha\beta x z^{-2} \exp(-\alpha x) [1 - \exp\left(\frac{-\beta}{z}x\right)] & \text{اگر } \eta < z \end{cases} \quad (18)$$

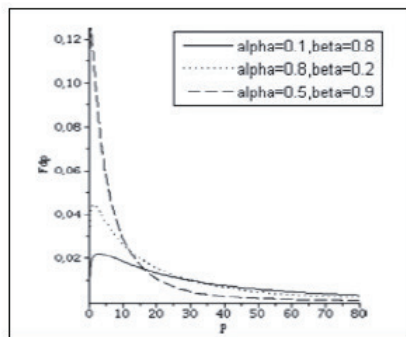
و نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال گیری ساده به دست می آید. □

به این ترتیب نتیجه تئوری با استفاده از انتگرال گیری ساده به دست می آید. □

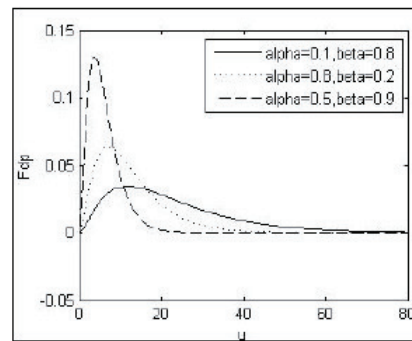
قضیه ۵.۳. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، رابطه زیر برای $0 < q < 1$ و $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ برقرار خواهد بود:

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q)+\alpha q]^2} & \text{اگر } q \leq \lambda \\ \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q)+\alpha q]^2} & \text{اگر } \lambda < q \end{cases} \quad (19)$$

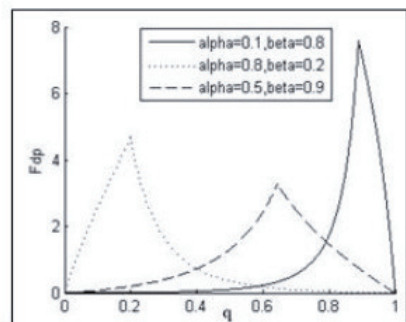
شکل ۲ تابع چگالی احتمال فرم های (۱۲)، (۱۵)، (۱۷)، (۱۹) را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم افزاری مناسب که در محیط متلب نوشته شده است نشان می دهد.



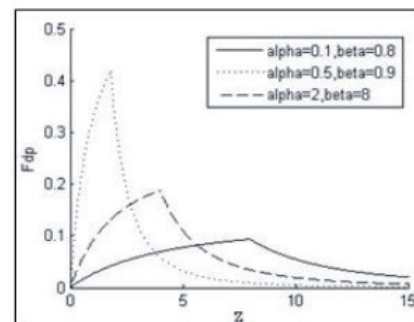
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۲- تابع چگالی احتمال (الف) $f_U(u)$ ، (ب) $f_P(p)$ ، (ج) $f_Z(z)$ ، (د) $f_Q(q)$ با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β .

۴ تابع توزیع تجمعی

قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۴ تابع توزیع تجمعی $U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را زمانی که X و Y دارای تابع چگالی توأم رابطه (۱) باشند نشان می‌دهد.

قضیه ۱.۴. اگر X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند داریم:

$$F_U(u) = \begin{cases} \frac{\beta^3 \exp(-\alpha u) - \alpha^3 \exp(-\beta u) - (\alpha + \beta) \exp(-\alpha u)}{\alpha \beta (\beta - \alpha)} + 1 & \text{اگر } u > 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases} \quad (21)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۲) تابع توزیع تجمعی $U = X + Y$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$F_U(u) = \int_0^u (\alpha + \beta) \exp(-\alpha t) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta t) - \beta^2 \exp(-\alpha t)}{\beta - \alpha} dt, \quad (22)$$

و نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید. □

قضیه ۲.۴. اگر X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند در این صورت برای $0 < q < 1$ داریم:

$$f_Q(q) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } q \leq 0 \\ \frac{\alpha \beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1 - q) + \alpha q]} + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\alpha q - \beta}{(\alpha - \beta)(1 - q)} \right] & \text{اگر } q \leq \lambda \\ \frac{\alpha \beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1 - q) + \alpha q]} - \frac{\beta}{\alpha q} - \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)} + 1 & \text{اگر } \lambda < q \\ 1 & \text{اگر } 1 \leq q \end{cases} \quad (23)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۹)، تابع توزیع تجمعی $Q = X/(X + Y)$ برای $0 < q < \lambda$ به صورت زیر بوده

$$F_Q(q) = \int_0^q \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1 - t)^2} - \frac{\alpha \beta}{[\beta(1 - t) + \alpha t]^2} \right\} dt, \quad (24)$$

و برای $\lambda < q < 1$ به شکل زیر بیان می‌شود:

۵ گشتاورها

در این بخش گشتاورهای متغیرهای $U = X + Y$ ، $P = XY$ و $Q = X/(X + Y)$ را زمانی که X و Y از توزیع (۱) پیروی می‌کنند، بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$E[u^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{j+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(j+k)! (2^{j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right] + \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{n-j+1}} \left[\sum_{k=0}^j \frac{(n-j+k)! (2^{n-j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right].$$

اثبات. نتیجه این تئوری با استفاده از لم ۱.۲ و با استفاده از ویژگی زیر به دست می‌آید:

$$E[u^n] = E[(x + y)^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}]. \quad (25)$$

□

قضیه ۲.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$E[p^n] = E[(x + y)^n] = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}]. \quad (26)$$

اثبات. نتیجه این تئوری با استفاده از لم ۱.۲ به دست می‌آید. □

قضیه ۳.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$E[Q^n] = \frac{\alpha}{\beta} \beta(n+1, -1) + \frac{\beta}{\alpha} H(n) - \frac{\alpha}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k+1} J(k), \quad (27)$$

و

حساب می‌کنیم و آن را X_1 می‌نامیم. تعداد روزهای بارندگی غیرمتوالی را حساب کرده و آن را Y_1 می‌نامیم. با این نحوه عملکرد به $n=101$ دوره آب و هوایی می‌رسیم. می‌خواهیم توزیع متغیرهای تصادفی $U = X + Y$ را به دست آوریم. فرض کنید $X \sim \text{Gamma}(2, \alpha)$ و $Y \sim \text{Gamma}(2, \beta)$ یک نمونه به صورت $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ از (X, Y) ارائه دهد. در این صورت برآوردگر درست‌نمایی ماکسیمم برای α و β به صورت زیر است:

$$\hat{\alpha} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2 \times 101}{243} = 0.831,$$

$$\hat{\beta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{2 \times 101}{487} = 0.414.$$

لذا برآوردهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به صورت $\hat{\alpha} = 0.831$ و $\hat{\beta} = 0.414$ هستند و بنابراین مدل (۱) به صورت زیر اصلاح می‌شود

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0.344 \exp(-0.414y) [1 - \exp(-0.831x)] & \text{اگر } 0 \leq 0.831x \leq 0.414y, \\ 0.344 \exp(-0.831x) [1 - \exp(-0.414y)] & \text{اگر } 0 \leq 0.414y \leq 0.831x. \end{cases}$$

و همچنین با توجه به روابط (۵)، (۶) و (۱۲) داریم:

$$f_X(x) = (0.831)^2 x \exp(-0.831x),$$

$$f_Y(y) = (0.414)^2 y \exp(-0.414y),$$

$$f_U(u) = (1.245) \exp(-0.831u) + \frac{(0.831)^2 \exp(-0.414u) - (0.414)^2 \exp(-0.831u)}{0.414 - 0.831}.$$

در شکل ۳ تابع چگالی احتمال مناسب برای X و Y و به ترتیب نشان داده شده است. این شکل مناسب بودن مدل را برای متغیرهای تصادفی X و Y ، که به ترتیب نشان دهنده تعداد روزهای بارندگی متوالی و Y تعداد روزهای غیربارندگی متوالی هستند و همچنین $U = X + Y$ ، که نشان دهنده دوره‌های آب و هوایی است، نشان می‌دهد.

$$H(n) = \begin{cases} \frac{1-n^{-1}}{n-1}, & \text{اگر } n \neq 1 \\ -\ln, & \text{اگر } n = 1 \end{cases},$$

$$J(k) = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{K-1}, & \text{اگر } k \neq 1 \\ \ln \alpha - \ln \beta, & \text{اگر } k = 1 \end{cases}.$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۹) داریم:

$$E[Q^n] = \int_0^\lambda \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} \right\} q^n dq + \int_\lambda^1 \left\{ \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} \right\} q^n dq. \quad (28)$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\lambda \frac{q^n}{(1-q)^2} dq + \frac{\beta}{\alpha} \int_\lambda^1 q^{n-2} dq - \alpha\beta \int_0^1 \frac{q^n}{\alpha q + \beta(1-q)^2} dq$$

توجه کنید که دو انتگرال اول در معادله (۲۸) با استفاده از معادله (۵) و انتگرال‌گیری ساده حل می‌شوند. با جایگزین کردن $t = \alpha q + \beta(1-q)$ داریم:

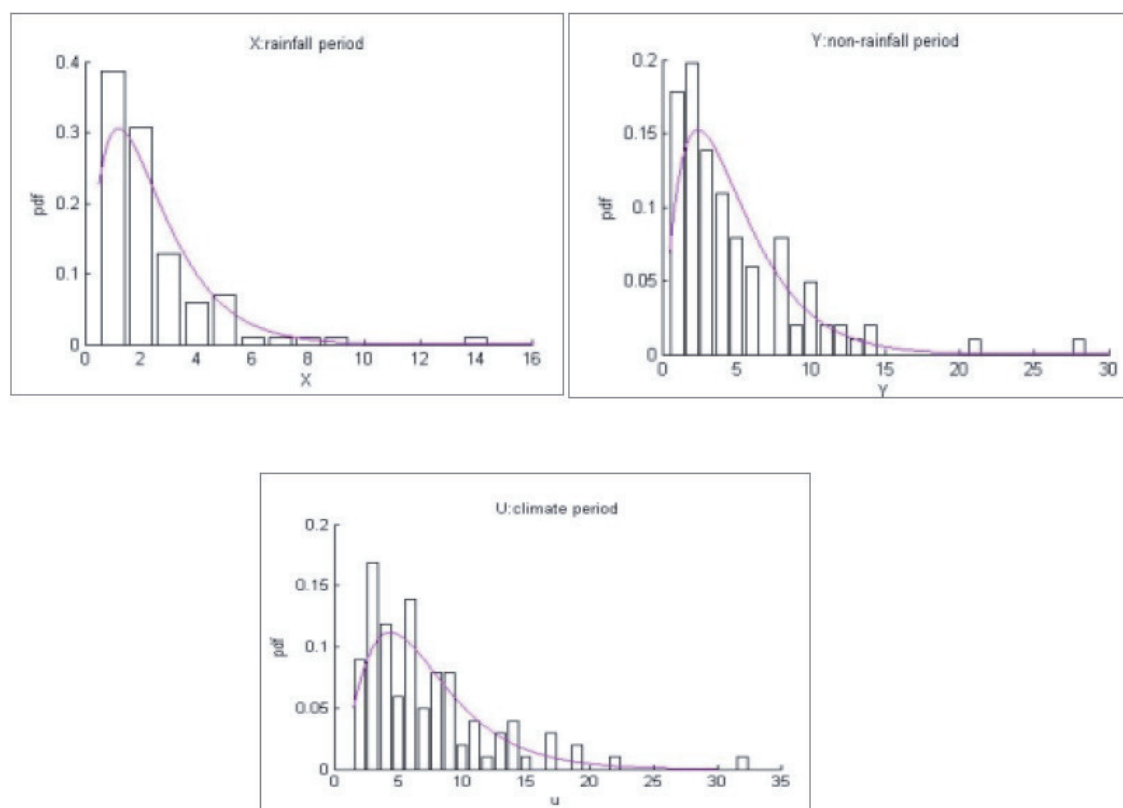
$$\alpha\beta \int_0^1 \frac{q^n}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} dq = \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \int_\beta^\alpha (t - \beta)^n t^{-2} dt.$$

در نهایت نتیجه قضیه با استفاده از بسط چندجمله‌ای $(t - \beta)^n$ و انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید. $\square$

۶ کاربرد

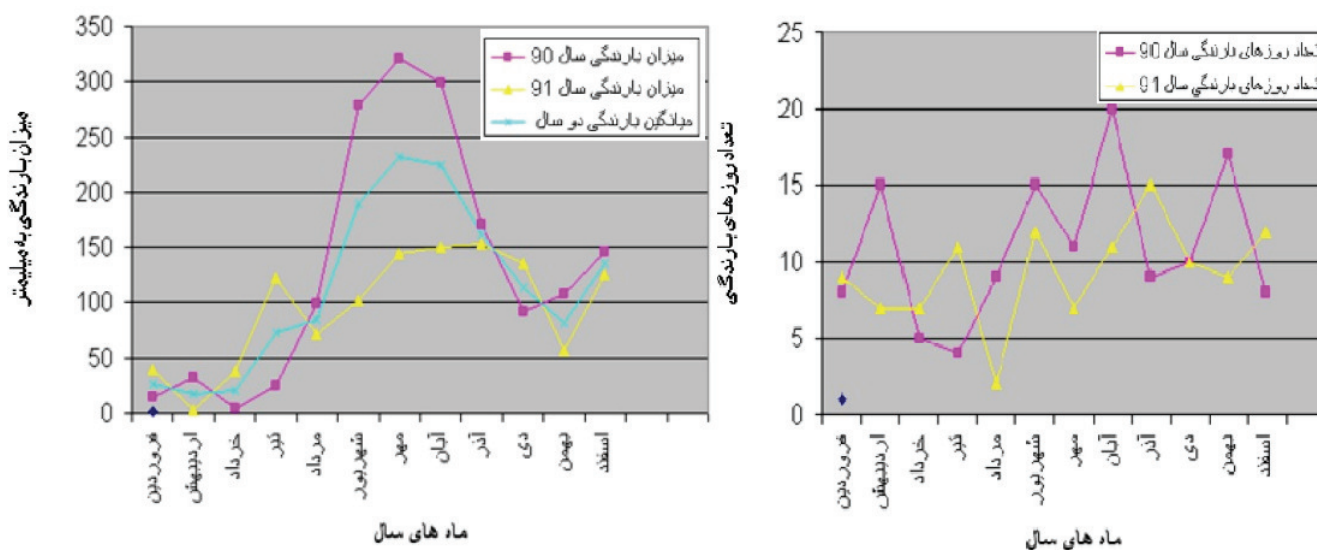
داده‌های این مطالعه از ثبت اطلاعات بارندگی ۷۳۰ روزه ایستگاه فرودگاه رشت، از فروردین ماه سال ۹۰ تا اسفند ماه سال ۹۱، جمع‌آوری شده‌اند. جفت‌های (X_j, Y_j) ، $j = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی هستند.

X_j تعداد روزهای بارندگی متوالی و Y_j تعداد روزهای غیر بارندگی متوالی شهرستان رشت است. فرض کنید که در اولین روز از ۷۳۰ روز باران بیارد، تعداد روزهای متوالی بارندگی را



شکل ۳- توزیع مناسب برای X و Y و U با در نظر گرفتن مدل کرولی.

در شکل های زیر میزان بارندگی ماهانه سال های 90 و 91 و میانگین شده است. همان طور که ملاحظه می کنید ماکسیمم متوسط بارندگی بارندگی این دو سال و همچنین تعداد روزهای بارندگی نشان داده در ماه مهر و تقریباً به مقدار 230 میلی متر می باشد.



شکل ۴- میزان بارندگی ماهانه سال های 90 و 91 و میزان بارندگی این دو سال و همچنین تعداد روزهای بارندگی.

۷ نتیجه گیری

دقیق گشتاورهای متغیرهای تصادفی $P = U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را محاسبه کنیم.

۲. بررسی داده‌های بارندگی روزانه رشت در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۳. با مطالعه متوسط میزان بارندگی روزانه به این نتیجه رسیدیم که ماکسیمم میزان بارندگی در ماه مهر و تقریباً به مقدار ۲۳۰ میلی متر است.

مهمترین نتایج حاصل از بررسی مدل ارائه شده و همچنین بررسی داده‌های بارندگی روزانه در ایستگاه فرودگاه رشت در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. با در نظر گرفتن این که X و Y از مدل گامای دو متغیره کرولی پیروی می‌کند و با استفاده از توابع خاص توانستیم ویژگی‌های مدل گامای دو متغیره کرولی و همچنین توزیع

مراجع

- [1] Balakrishnan, N. and Lai, CD. (2009). *continuous bivariate distributions*, vol 120, Springer-verlag.
- [2] Nadarajah, S. (2007). A bivariate gamma model for drought Water Resour Res, **43**, 749-759.
- [3] Crovelli, RA. (1973). A bivariate precipitation model Amer Meteor Soc **1**, 130-134.
- [4] Gupta, AK. and Nadarajah, S. (2006). Sums, products and ratios for McKay's bivariate gamma Distributions. *Math Comput Model*, **1**, 185-193 .
- [5] Nadarajah, S. (2005). Products and ratios for a bivariate gamma distribution. *J Appl Math comput*, **24**, 581-595.
- [6] Nadarajah, S. (2009). A bivariate gamma distribution with gamma and beta marginal with application to drought data. *J Appl Stat* **36**, 277-301.
- [7] Paula, A.C., Silva, M. Araujo Rodrigues, J., Monterio Chaves, L. and Jaques de Souza, D. (2013). Sums, Products and Ratio for Crovelli's Bivariate Gamma Distribution.
- [8] 1. Oldham, K., Myland, J. and Spanier, J. (2009). *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator*. Springer- Verlag.
- [9] 1. Prudnikov, AP., Brychkov, YA. and Marichev, OI. (1998). *Integrals and series*, vol 1, Gordon and Breach, Amsterdam