

کاربرد توزیع آماری گامای دو متغیره کرولی در تحلیل فرآیندهای هیدرولوژیکی مطالعه موردي: ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت

آنیتا عبدالله نانوایپیشه^۱

چکیده:

روش‌های ریاضی و توزیع‌های آماری، نتایجی دقیق در محاسبات اقلیمی و فرآیندهای هیدرولوژیکی ارائه می‌دهند. آگاهی از توزیع احتمال بارندگی‌ها، زمینه مناسبی برای برنامه‌ریزی منابع آب فراهم می‌آورد. به علت اهمیت بارش در مطالعات اقتصادی، اجتماعی و به خصوص کشاورزی تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج بیشتر تحقیقات مناسب بودن مدل گاما از جمله توزیع گامای دو متغیره را برای داده‌های بارش نشان می‌دهد. توزیع گامای دو متغیره در مدل‌بندی فرآیندهای هیدرولوژیکی کاربرد دارد. در مقاله حاضر با فرض این‌که X و Y از مدل گامای دو متغیره کرولی پیروی می‌کنند، پس از توضیح مختصری در مورد توزیع دقیق توابع $U = X + Y$ ، $P = XY$ ، $Q = X/(X + Y)$ و همچنین گشتاورهای مربوط به آن‌ها، اعتبار این مدل برای داده‌های ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت بررسی شد. نتایج نشان داد که داده‌های بارندگی این منطقه نیز مناسب بودن مدل گامای دو متغیری کرولی را تأثید می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: توزیع گامای دو متغیره کرولی، گشتاورهای توزیع گامای دو متغیره کرولی، مدل توزیع بارش.

۱ مقدمه

بیشتر تحقیقات مناسب بودن مدل گاما از جمله توزیع گامای دو متغیره را برای داده‌های بارش نشان می‌دهد. (برای اطلاعات بیشتر

پیش‌بینی وقوع یا عدم وقوع بارندگی روزانه و مقدار این بارندگی در این زمینه بالاکریشنان^۲ و لای^۳ را ببینید [۱].) این مدل یکی از پرکاربردترین مدل‌ها در تحلیل فرآیندهای هیدرولوژیکی است و مدیریت منابع آب دارد. در نواحی دیم‌کاری، که بارش تنها منبع آب برای کشاورزی است، تغییر در مقدار و توزیع فصلی بارش می‌تواند تاثیر زیادی بر اقتصاد منطقه داشته باشد. تعیین مدل توزیع بارش طی سال و تغییرات زمانی آن در ایران که عمدتاً در ایران دارد اقلیم خشک و نیمه خشک است و در آن آب مهمترین نهاد محدود کننده تولید است می‌تواند بسیار مهم باشد. به علت اهمیت توزیع بارش، تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج

$$f(x,y) = \begin{cases} \alpha\beta \exp(-\beta y)[1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha\beta \exp(-\alpha y)[1 - \exp(-\beta y)] & \text{اگر } 0 \leq \beta x \leq \alpha y \end{cases} \quad (1)$$

که در آن $0 < x < \alpha$ و $0 < y < \beta$ است.

ترکیب متغیرهایی مثل Y است. $P = XY$ ، $U = X + Y$ ، $Q = X/(X + Y)$ به طور ویژه در مطالعه پدیده‌های هیدرولوژیکی

دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است و در آن آب مهمترین نهاد محدود کننده تولید است می‌تواند بسیار مهم باشد. به علت اهمیت توزیع بارش، تحقیقات بسیاری برای برآورد احتمال بارندگی به روش‌های گوناگون صورت گرفته است. در این مطالعات از مدل‌های مختلف احتمالاتی استفاده شده که در بین آن‌ها نتایج

^۱کارشناس ارشد آمار

کد موضوع بندی ریاضی: ۶۲GOV۱۲

^۲Balakrishnan

^۳Lai

$$\beta_x(a, b) = \int_0^{\infty} t^{a-1} \exp(1-t)^{b-1} dt. \quad (4)$$

ویژگی‌های این توابع خاص در اولدهام و همکاران [۸] ارائه شده است.

۲ توزیع گامای دو متغیره کرولی

فرض کرد X و Y متغیرهای تصادفی با تابع چگالی احتمالی به شکل معادله ۱ باشند، در این صورت توزیع حاشیه‌ای آن‌ها به ترتیب به صورت زیر است:

$$f_X(x) = \alpha^2 x \exp(-\alpha x) \quad (5)$$

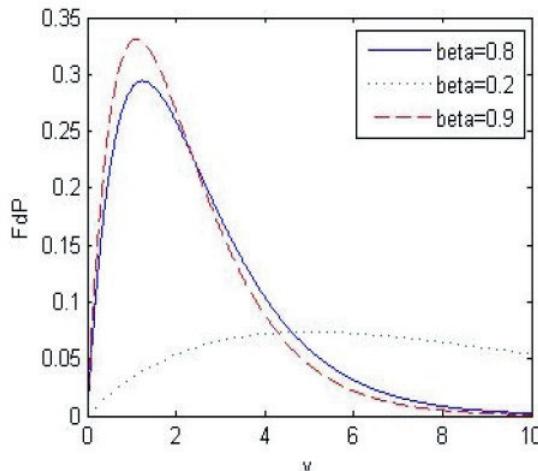
$$f_Y(y) = \beta^2 y \exp(-\beta y) \quad (6)$$

شکل ۱ توابع چگالی احتمال فوق را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم‌افزاری مناسب که در محیط متلب^۴ نوشته شده است نشان می‌دهد.

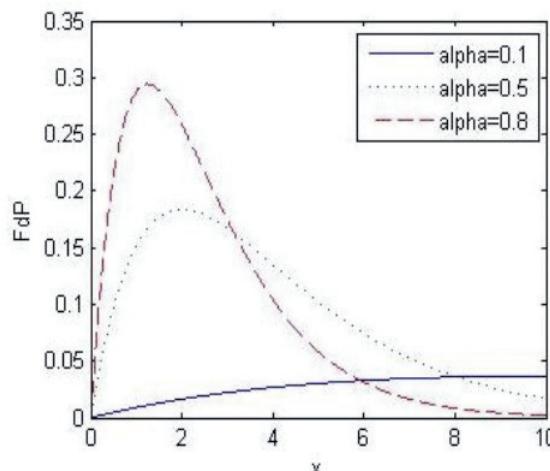
اهمیت دارند [۴, ۵, ۶]. اهداف این مقاله عبارت از مرور ویژگی‌های مدل ۱، بیان توزیع دقیق متغیرهای $P = XY$, $U = X + Y$, $Q = X/(X+Y)$, که توسط آناپائولا و همکاران [۷] ارائه شده‌اند و همچنین بررسی احتمالات متغیرهای بارش داده‌های ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت است. در بخش ۲ امیدریاضی و واریانس، توزیع‌های حاشیه‌ای، ضریب همبستگی، ضریب چولگی و ضریب بر جستگی توزیع گامای دو متغیره کرولی را محاسبه خواهیم کرد. در بخش ۳ و ۴ تابع چگالی احتمال و تابع توزیع تجمعی دقیق متغیرهای U , P و Q را بیان خواهیم کرد و در نهایت در بخش ۵ و ۶ گشتاورهای آن‌ها و کاربردهایی از نتایج به دست آمده را در داده‌های بارندگی ایستگاه هواشناسی فرودگاه رشت ارائه می‌کنیم. محاسبات شامل چندین تابع خاص است مانند تابع بسل اصلاح شده، تابع گامای ناکامل و تابع بتای ناکامل است که به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$K_n(x) = (\sqrt{\pi}x^n)/(2^n \Gamma(n+1/2)) \times \int_1^{\infty} (t^2 - 1)^{n-1/2} \exp(-xt) dt \quad (2)$$

$$\Gamma(a, x) = \int_x^{\infty} t^{a-1} \exp(-t) dt \quad (3)$$



(ب)



(الف)

شکل ۱- تابع چگالی احتمال (الف) $f_x(x)$ و (ب) $f_y(y)$ به ازای $\beta = 0.8, 0.2, 0.9$ و $\alpha = 0.1, 0.5, 0.8$

با استفاده از توزیع‌های X و Y و با استفاده از لم ۱، اميد ریاضی

و کواریانس X و Y به صورت زیر بدست می‌آید:

$$E[X] = \int_0^\infty x \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \int_0^\infty x^2 \alpha^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\alpha}$$

$$E[y] = \int_0^\infty y \beta^2 y e^{-\beta y} dy = \int_0^\infty y^2 \beta^2 e^{-\beta y} dy = \frac{2}{\beta}$$

$$\begin{aligned} E[XY] &= \alpha \beta \int_0^\infty \int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^\infty xy \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy dx \\ &+ \alpha \beta \int_0^\infty \int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^\infty xy \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta x)] dx dy = \frac{5}{\alpha \beta}, \end{aligned}$$

$$Con[x, Y] = E[xy] - E[x]E[Y] = \frac{1}{\alpha \beta}, \quad (10)$$

و به همین ترتیب $Var[Y]$ و $Var[X]$ ، $E[Y^2]$ ، $E[X^2]$ به شکل زیر حاصل می‌شوند:

$$E[X^2] = \int_0^\infty x^2 \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \int_0^\infty x^3 \alpha^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{6}{\alpha^2},$$

$$E[Y^2] = \int_0^\infty y^2 \beta^2 y e^{-\beta y} dy = \int_0^\infty y^3 \beta^2 e^{-\beta y} dy = \frac{6}{\beta^2},$$

$$Var[X] = E[X^2] - E^2[X] = \frac{6}{\alpha^2} - (\frac{2}{\alpha})^2 = \frac{2}{\alpha^2},$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - E^2[Y] = \frac{6}{\beta^2} - (\frac{2}{\beta})^2 = \frac{2}{\beta^2}.$$

به این ترتیب ضریب همبستگی X و Y را به صورت زیر بدست

می‌آید:

$$\rho = \frac{\text{Cov}[x, y]}{\sqrt{VAR[X]}\sqrt{VAR[Y]}} = \frac{\frac{1}{\alpha \beta}}{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}}\sqrt{\frac{2}{\beta^2}}} = \frac{1}{2},$$

و ضریب تغییرات وتابع مولد گشتاور X و Y نیز به صورت زیر خواهد بود:

$$Cv[X] = Cv[Y] = \frac{\sigma}{\mu} = \frac{\sqrt{\frac{2}{\alpha^2}}}{\frac{2}{\alpha}} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$M_X[t] = E[e^{tx}] = \int_0^\infty e^{tx} \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \frac{\alpha^2}{(t - \alpha)^2},$$

به علاوه توزیع شرطی x به شرط $y = y$ به صورت زیر است:

$$f(x|Y=y) = \begin{cases} \alpha(\beta y)^{-1} [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \alpha(\beta y)^{-1} \exp(-\alpha x) [\exp(\beta y) - 1] & \text{اگر } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases}, \quad (V)$$

و به طور مشابه توزیع شرطی $X = x$ به صورت زیر است:

$$f(Y|X=x) = \begin{cases} \beta(\alpha x)^{-1} \exp(-\beta y) [\exp(\alpha x) - 1] & \text{اگر } 0 \leq \alpha x \leq \beta y \\ \beta(\alpha x)^{-1} [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq \beta y \leq \alpha x \end{cases}, \quad (A)$$

لم ۱.۲. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند [۷]. در این صورت برای مقادیر صحیح مثبت $1 \leq n \leq m$ داریم:

$$\begin{aligned} E[X^n Y^m] &= \frac{m!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} \\ &+ \frac{n!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(m+k)! (2^{m+k+1} - 1)}{k! 2^k}. \end{aligned}$$

برهان با استفاده از معادله (۱) داریم:

$$\begin{aligned} E[X^n Y^m] &= \alpha \beta \int_0^\infty \int_{\frac{\alpha x}{\beta}}^\infty x^n y^m \exp(-\beta y) [1 - \exp(-\alpha x)] dy dx \\ &+ \alpha \beta \int_0^\infty \int_{\frac{\beta y}{\alpha}}^\infty x^n y^m \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta x)] dx dy \\ &= \alpha \beta^{-m} \int_0^\infty x^n \Gamma(m+1, \alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] dx \\ &+ \beta \alpha^{-n} \int_0^\infty y^m \Gamma(n+1, \beta y) [1 - \exp(-\beta y)] dy. \end{aligned}$$

از طرفی با استفاده از اتحاد ارائه شده در اولدهام و همکاران [۸]

$$\Gamma(n+1, x) = n! \exp(-x) \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}, \quad (9)$$

و به این ترتیب داریم:

$$\begin{aligned} E[X^n Y^m] &= \alpha \beta^{-m} \int_0^\infty x^n \left[m! \exp(-\alpha x) \sum_{k=0}^m \frac{(\alpha x)^k}{k!} \right] [1 - \exp(-\alpha x)] dx \\ &+ \beta \alpha^{-n} \int_0^\infty y^m \left[n! \exp(-\beta y) \sum_{k=0}^n \frac{(\beta y)^k}{k!} \right] [1 - \exp(-\beta y)] dy \\ &= \alpha \beta^{-m} m! \sum_{k=0}^m \frac{\alpha^k}{k!} \int_0^\infty x^{n+k} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\alpha x)] dx. \end{aligned}$$

در نهایت نتیجه لم، با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به صورت زیر

به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} E[X^n Y^m] &= \frac{m!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^m \frac{(n+k)! (2^{n+k+1} - 1)}{k! 2^k} \\ &+ \frac{n!}{\alpha^n \beta^m 2^{m+1}} \sum_{k=0}^n \frac{(m+k)! (2^{m+k+1} - 1)}{k! 2^k}. \end{aligned}$$

از معادله (۱۳) تابع چگالی احتمال u به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_U(u) = \int_0^\lambda \alpha\beta u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha u q)] du + \int_\lambda^1 \alpha\beta u \exp(-\alpha u q) [1 - \exp(-\beta u + \beta u q)] dq.$$

در نهایت نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به صورت زیر به دست می‌آید:

$$f_U(u) = (\alpha + \beta) \exp(-\alpha u) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta u) - \beta^2 \exp(-\alpha u)}{\beta - \alpha}.$$

لم ۲.۳. با توجه به معادله (۲.۳.۱۶.۱) در مرجع [۹]، در صورتی که $q > 0$ باشد داریم:

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} \exp\left(-px - \frac{q}{x}\right) dx = 2\left(\frac{q}{p}\right)^{\alpha/2} k_\alpha(2\sqrt{pq}). \quad (14)$$

قضیه ۳.۳. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند، برای $0 < P < \infty$ داریم:

$$f_P(p) = 2\alpha\beta[\Gamma(0, \sqrt{\alpha\beta p}) - k_0(2\sqrt{\alpha\beta p})]. \quad (15)$$

۳ تابع چگالی احتمال

قضیه‌های ۱.۳ تا ۳.۳ تابع چگالی احتمال $P = XY$ ، $U = X + Y$ و $V = X - Y$ را زمانی که تابع چگالی توأم X و Y به شکل (۱) باشد، ارائه می‌دهد:

قضیه ۱.۳. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند در این صورت داریم:

$$f(x, p) = \begin{cases} \alpha\beta x^{-1} \exp(-\beta px^{-1}) [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq x \leq \delta \\ \alpha\beta x^{-1} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta px^{-1})] & \text{اگر } \delta < x \end{cases}, \quad (16)$$

که در آن $\delta = \sqrt{\frac{\beta p}{\alpha}}$. به این ترتیب تابع چگالی احتمال P به شکل زیر خواهد بود:

$$f_P(p) = \alpha\beta \int_0^\delta x^{-1} \exp(-\beta px^{-1}) [1 - \exp(-\alpha x)] dx + \alpha\beta \int_\delta^{+\infty} x^{-1} \exp(-\alpha x) [1 - \exp(-\beta px^{-1})] dx. \quad (12)$$

با جایگزینی $k = \alpha x$ و $t = \frac{\beta p}{x}$ انتگرال $f_P(p)$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_P(p) = \alpha\beta \int_{\sqrt{\alpha\beta p}}^{+\infty} t^{-1} \exp(-t) dt - \alpha\beta \int_0^{+\infty} x^{-1} \exp\left(-\alpha x - \frac{\beta p}{x}\right) dx + \alpha\beta \int_\delta^{+\infty} k^{-1} \exp(-k) dk.$$

در نهایت نتیجه با ترکیب رابطه (۴) و با استفاده از لم ۲.۳ به دست

□

می‌آید.

$$M_Y[t] = E[e^{tY}] = \int_0^\infty e^{tY} \beta^2 Y e^{-\beta Y} dY = \frac{\beta^2}{(t - \beta)^2}.$$

فلذا ضریب چولگی و ضریب برجستگی X به ترتیب γ_1 و γ_2 به صورت زیر است:

$$\gamma_1[X] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(X - \mu_x)^3}{\sigma^3} = \frac{1}{\sigma^3} \int_0^\infty (X - \mu_x)^3 \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[X] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(X - \mu_x)^4}{\sigma^4} - 3 = \frac{1}{\sigma^4} \int_0^\infty (X - \mu_x)^4 \alpha^2 x e^{-\alpha x} dx - 3 = 3,$$

به طریق مشابه، ضریب چولگی و ضریب برجستگی Y ، γ_1 و γ_2 به شکل زیر خواهد بود:

$$\gamma_1[Y] = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{E(y - \mu_y)^3}{\sigma^3} = \frac{2}{\sqrt{2}},$$

$$\gamma_2[Y] = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{E(y - \mu_y)^4}{\sigma^4} - 3 = 3.$$

۳ تابع چگالی احتمال

قضیه‌های ۱.۳ تا ۳.۳ تابع چگالی احتمال $P = XY$ ، $U = X + Y$ و $V = X - Y$ را زمانی که تابع چگالی توأم X و Y به شکل (۱) باشد، ارائه می‌دهد:

قضیه ۱.۳. اگر X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله (۱) باشند در این صورت داریم:

$$f_U(u) = (\alpha + \beta) \exp(-\alpha u) + \frac{\alpha^2 \exp(-\beta u) - \beta^2 \exp(-\alpha u)}{\beta - \alpha},$$

که در آن $u \geq 0$ و $\lambda = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم $Q = X/(X + Y)$ و $U = X + Y$ به صورت زیر است:

$$f(u, q) = \begin{cases} \alpha\beta u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha u q)] & \text{اگر } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta u \exp(-\alpha u q) [1 - \exp(-\beta u + \beta u q)] & \text{اگر } \lambda \leq q \leq 1 \end{cases}, \quad (13)$$

که در آن $0 < u < 1$ و $0 \leq q \leq 1$.

قضیه ۴.۳. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم مطابق معادله (۱۳) تابع چگالی احتمال Q به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f_Q(q) = \begin{cases} \alpha\beta \int_0^\infty u \exp[-\beta u(1-q)] [1 - \exp(-\alpha u q)] du & \text{اگر } 0 \leq q \leq \lambda \\ \alpha\beta \int_0^\infty u \exp(-\alpha u q) [1 - \exp(-\beta u + \beta u q)] du & \text{اگر } 0 \leq q \leq 1 \end{cases}$$

و نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید. \square

شکل ۲ تابع چگالی احتمال فرم‌های (۱۲)، (۱۵)، (۱۷)، (۱۹)

را با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β با استفاده از یک برنامه نرم‌افزاری مناسب که در محیط متلب نوشته شده است نشان می‌دهد.

(۱) باشد، رابطه زیر برای $\eta = \frac{\beta}{\alpha}$ برقرار خواهد بود:

$$f_Z(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha Z)^2} & \text{اگر } Z \leq \eta \\ \frac{\beta}{\alpha Z^2} - \frac{\alpha\beta}{(\beta+\alpha Z)^2} & \text{اگر } \eta < Z \end{cases}. \quad (۱۷)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱)، تابع چگالی احتمال توأم X و Y به صورت زیر به دست می‌آید:

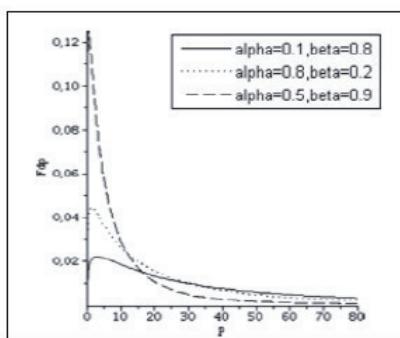
$$f(x, z) = \begin{cases} \alpha\beta x z^{-2} \exp\left(\frac{-\beta}{z}x\right) [1 - \exp(-\alpha x)] & \text{اگر } 0 \leq z \leq \eta \\ \alpha\beta x z^{-2} \exp(-\alpha x) \left[1 - \exp\left(\frac{-\beta}{z}x\right)\right] & \text{اگر } \eta < z \end{cases}. \quad (۱۸)$$

به این ترتیب نتیجه تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید. \square

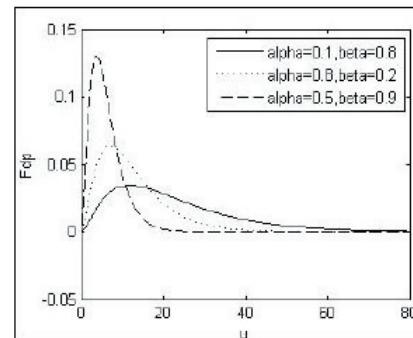
قضیه ۵.۳. در صورتی که X و Y دارای توزیع توأم طبق معادله

(۱) باشد، رابطه زیر برای $0 < q < 1$ و $\lambda = \frac{\beta}{\alpha+\beta}$ برقرار خواهد بود:

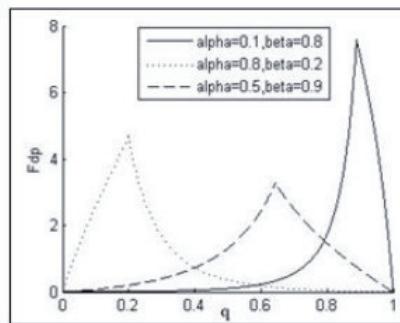
$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q)+\alpha q]^2} & \text{اگر } q \leq \lambda \\ \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\beta(1-q)+\alpha q]^2} & \text{اگر } \lambda < q \end{cases}. \quad (۱۹)$$



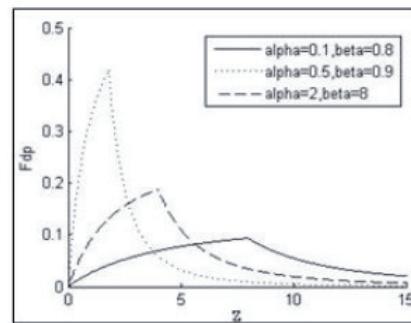
(ب)



(الف)



(د)



(ج)

شکل ۲- تابع چگالی احتمال (الف) $f_U(u)$ ، (ب) $f_P(p)$ ، (ج) $f_Z(z)$ ، (د) $f_Q(q)$ با در نظر گرفتن مقادیر مشخص از α و β .

۴ تابع توزیع تجمعی

قضیه‌های ۱.۴ و ۲.۴ تابع توزیع تجمعی $U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را زمانی که X و Y دارای تابع چگالی توازن رابطه (۱) باشند نشان می‌دهد.

به این ترتیب نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده

به دست می‌آید. \square

قضیه ۱.۴. اگر X و Y دارای توزیع توازن مطابق معادله (۱) باشند داریم:

۵ گشتاورها

در این بخش گشتاورهای متغیرهای $P = XY$ و $U = X + Y$

را زمانی که X و Y از توزیع (۱) پیروی می‌کنند،

بیان می‌کنیم.

قضیه ۱.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توازن مطابق معادله

(۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} E[u^n] &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(n-j)!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{j+1}} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(j+k)! (2^{j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right] \\ &+ \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{j!}{\alpha^j \beta^{n-j} 2^{n-j+1}} \left[\sum_{k=0}^j \frac{(n-j+k)! (2^{n-j+k+1} - 1)}{k! 2^k} \right]. \end{aligned}$$

اثبات. نتیجه این تئوری با استفاده از لم ۱.۲ و با استفاده از ویژگی

زیر به دست می‌آید:

$$E[u^n] = E[(x+y)]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}]. \quad (25)$$

\square

قضیه ۲.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توازن طبق معادله

(۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$E[p^n] = E[(x+y)]^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} E[X^j Y^{n-j}]. \quad (26)$$

اثبات. نتیجه این تئوری با استفاده از لم ۱.۲ به دست می‌آید. \square

قضیه ۳.۵. در صورتی که X و Y دارای توزیع توازن مطابق معادله

(۱) باشند، برای همه مقادیر صحیح مثبت $n \geq 1$ داریم:

$$\begin{aligned} E[Q^n] &= \frac{\alpha}{\beta} \beta(n+1, -1) + \frac{\beta}{\alpha} H(n) \\ &- \frac{\alpha}{(\alpha-\beta)^{n+1}} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-\beta)^{n-k+1} J(k), \end{aligned} \quad (27)$$

$$F_U(u) = \begin{cases} \frac{\beta^3 \exp(-\alpha u) - \alpha^3 \exp(-\beta u)}{\alpha \beta (\beta - \alpha)} - \frac{(\alpha + \beta) \exp(-\alpha u)}{\alpha} + 1 & \text{اگر } u > 0 \\ 0 & \text{در غیر اینصورت} \end{cases}. \quad (21)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۲) تابع توزیع تجمعی $U = X + Y$ به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} F_U(u) &= \int_0^u (\alpha + \beta) \exp(-\alpha t) \\ &+ \frac{\alpha^2 \exp(-\beta t) - \beta^2 \exp(-\alpha t)}{\beta - \alpha} dt, \end{aligned} \quad (22)$$

و نتیجه این تئوری با استفاده از انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید. \square

قضیه ۲.۴. اگر X و Y دارای توزیع توازن مطابق معادله (۱) باشند

در این صورت برای $0 < q < 1$ داریم:

$$f_Q(q) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } q \leq 0 \\ \frac{\alpha \beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1-q) + \alpha q]} + \frac{\alpha}{\beta} \left[\frac{\alpha q - \beta}{(\alpha - \beta)(1-q)} \right] & \text{اگر } q \leq \lambda \\ \frac{\alpha \beta}{(\alpha - \beta)[\beta(1-q) + \alpha q]} - \frac{\beta}{\alpha q} - \frac{\beta^2}{\alpha(\alpha - \beta)} + 1 & \text{اگر } \lambda < q \\ 1 & \text{اگر } 1 \leq q \end{cases} \quad (23)$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۹)، تابع توزیع تجمعی $Q = X/(X + Y)$ به صورت زیر بوده

$$F_Q(q) = \int_0^q \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1-t)^2} - \frac{\alpha \beta}{[\beta(1-t) + \alpha t]^2} \right\} dt, \quad (24)$$

و برای $1 < q < \lambda$ به شکل زیر بیان می‌شود:

حساب می‌کنیم و آن را X_1 می‌نامیم. تعداد روزهای بارندگی غیرمتوالی را حساب کرده و آن را Y_1 می‌نامیم. با این نحوه عملکرد به $n=101$ دوره آب و هوایی می‌رسیم. می‌خواهیم توزیع متغیرهای تصادفی $U = X + Y$ را بدست آوریم. فرض کنید صورت $(X, Y) \sim Gamma(2, \beta)$ و $X \sim Gamma(2, \alpha)$ یک نمونه به صورت $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ از (X, Y) داشته باشد. در این صورت برآوردگر درستنمایی ماکسیمم برای α و β به صورت زیر است:

$$\hat{\alpha} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n x_i} = \frac{2 \times 101}{243} = 0.831,$$

$$\hat{\beta} = \frac{2n}{\sum_{i=1}^n y_i} = \frac{2 \times 101}{487} = 0.414.$$

لذا برآوردهای $\hat{\alpha}$ و $\hat{\beta}$ به صورت $\hat{\alpha} = 0.831$ و $\hat{\beta} = 0.414$ هستند و بنابراین مدل (۱) به صورت زیر اصلاح می‌شود

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} 0.344 \exp(-0.414y) [1 - \exp(-0.831x)] & \text{اگر } 0 \leq 0.831x \leq 0.414y, \\ 0.344 \exp(-0.831x) [1 - \exp(-0.414y)] & \text{اگر } 0 \leq 0.414y \leq 0.831x. \end{cases}$$

و همچنین با توجه به روابط (۵)، (۶) و (۱۲) داریم:

$$f_X(x) = (0.831)^2 x \exp(-0.831x),$$

$$f_Y(y) = (0.414)^2 y \exp(-0.414y),$$

$$f_U(u) = (1.245) \exp(-0.831u) + \frac{(0.831)^2 \exp(-0.414u) - (0.414)^2 \exp(-0.831u)}{0.414 - 0.831}.$$

در شکل ۳ تابع چگالی احتمال مناسب برای X و Y و U به ترتیب نشان داده شده است. این شکل مناسب بودن مدل را برای متغیرهای تصادفی X و Y ، که به ترتیب نشان دهنده تعداد روزهای بارندگی

X_j تعداد روزهای بارندگی متوالی و Y_j تعداد روزهای غیرمتوالی متوالی و $U = X + Y$ ، که نشان دهنده دوره‌های آب و هوایی است، نشان دهد.

$$H(n) = \begin{cases} \frac{1-n^{-1}}{n-1}, & \text{اگر } n \neq 1 \\ -ln, & \text{اگر } n = 1 \end{cases},$$

$$J(k) = \begin{cases} \frac{\alpha^{k-1} - \beta^{k-1}}{K-1}, & \text{اگر } k \neq 1 \\ ln\alpha - ln\beta, & \text{اگر } k = 1 \end{cases}.$$

اثبات. با استفاده از معادله (۱۹) داریم:

$$E[Q^n] = \int_0^\lambda \left\{ \frac{\alpha}{\beta(1-q)^2} - \frac{\alpha\beta}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} \right\} q^n dq + \int_\lambda^1 \left\{ \frac{\beta}{\alpha q^2} - \frac{\alpha\beta}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} \right\} q^n dq = \frac{\alpha}{\beta} \int_0^\lambda \frac{q^n}{(1-q)^2} dq + \frac{\beta}{\alpha} \int_\lambda^1 q^{n-2} dq - \alpha\beta \int_0^1 \frac{q^n}{\alpha q + \beta(1-q)^2} dq. \quad (۲۸)$$

توجه کنید که دو انتگرال اول در معادله (۲۸) با استفاده از معادله (۵) و انتگرال‌گیری ساده حل می‌شوند. با جایگزین کردن $t = \alpha q + \beta(1-q)$ داریم:

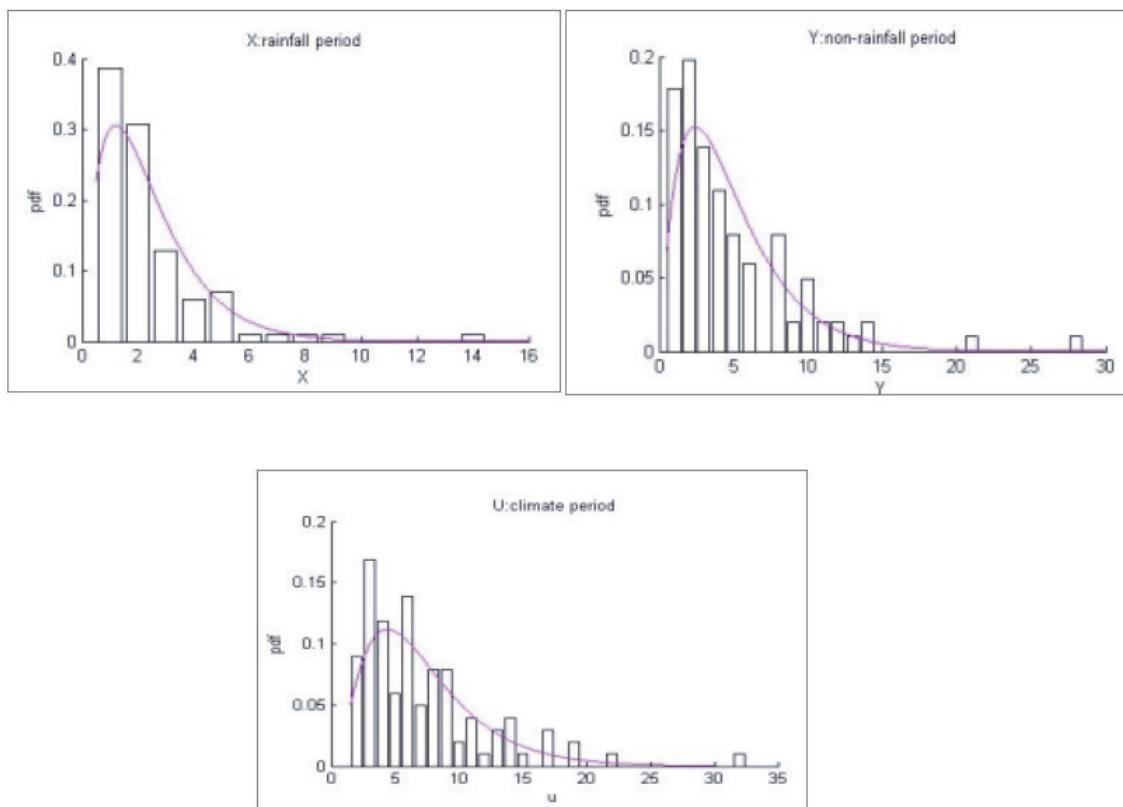
$$\alpha\beta \int_0^1 \frac{q^n}{[\alpha q + \beta(1-q)]^2} dq = \frac{\alpha\beta}{(\alpha - \beta)^{n+1}} \int_\beta^\alpha (t - \beta)^n t^{-2} dt.$$

در نهایت نتیجه قضیه با استفاده از بسط چندجمله‌ای $(t - \beta)^n$ و انتگرال‌گیری ساده به دست می‌آید. \square

۶ کاربرد

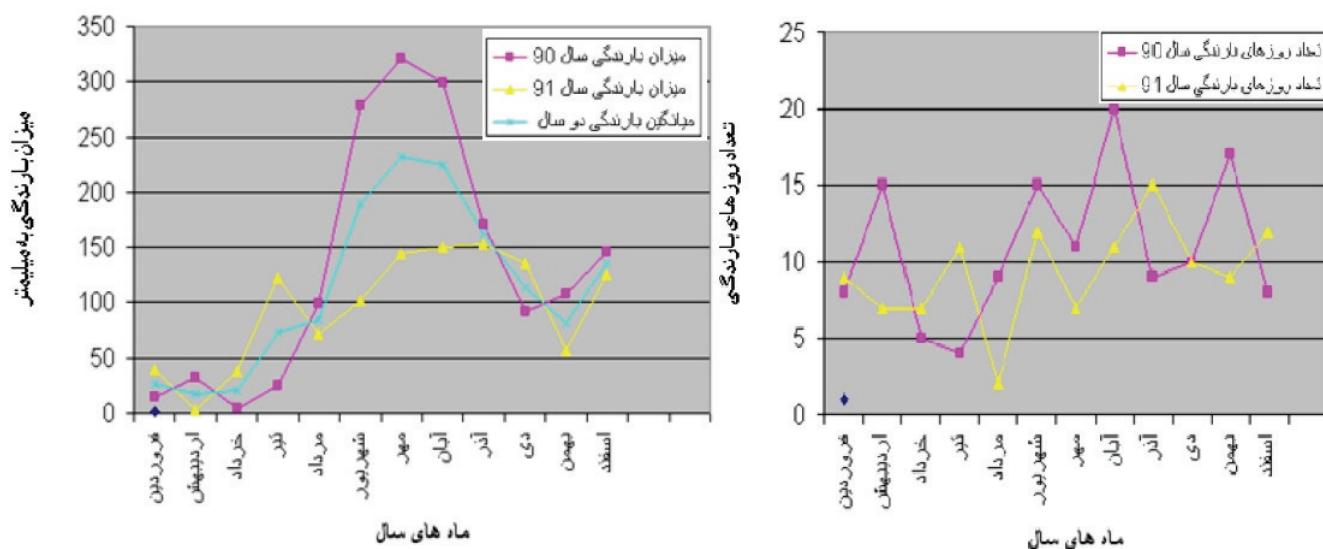
داده‌های این مطالعه از ثبت اطلاعات بارندگی ۷۳۰ روزه ایستگاه فروندگاه رشت، از فروردین ماه سال ۹۰ تا اسفند ماه سال ۹۱ جمع‌آوری شده‌اند. جفت‌های (X_j, Y_j) ، $j = 1, \dots, n$ متغیرهای تصادفی هستند.

X_j تعداد روزهای بارندگی متوالی و Y_j تعداد روزهای غیرمتوالی متوالی هستند و همچنین بارندگی متوالی شهرستان رشت است. فرض کنید که در اولین روز از ۷۳۰ روز باران بیارد، تعداد روزهای بارندگی را



شکل ۳- توزیع مناسب برای X و Y و U با در نظر گرفتن مدل کرولی.

در شکل های زیر میزان بارندگی ماهانه سال های ۹۰ و ۹۱ و میانگین شده است. همان طور که ملاحظه می کنید ماکسیمم متوسط بارندگی بارندگی این دو سال و همچنین تعداد روزهای بارندگی نشان داده در ماه مهر و تقریباً به مقدار ۲۳۰ میلی متر می باشد.



شکل ۴- میزان بارندگی ماهانه سال های ۹۰ و ۹۱ و میزان بارندگی این دو سال و همچنین تعداد روزهای بارندگی.

۷ نتیجه‌گیری

دقیق گشتاورهای متغیرهای تصادفی $P = U = X + Y$ و $Q = X/(X + Y)$ را محاسبه کنیم.

۲. بررسی داده‌های بارندگی روزانه رشت مناسب بودن مدل گامای دو متغیره را برای داده‌های بارندگی نشان می‌دهد.

۳. با مطالعه متوسط میزان بارندگی روزانه به این نتیجه رسیدیم که ماکسیمم میزان بارندگی در ماه مهر و تقریباً به مقدار 230 میلی‌متر است.

مهمترین نتایج حاصل از بررسی مدل ارائه شده و همچنین بررسی داده‌های بارندگی روزانه در ایستگاه فرودگاه رشت در سال‌های ۱۳۹۰ و ۱۳۹۱ را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

۱. با در نظر گرفتن این‌که X و Y از مدل گامای دو متغیره کروی پیروی می‌کند و با استفاده از توابع خاص توانستیم ویژگی‌های مدل گامای دو متغیره کروی و همچنین توزیع

مراجع

- [1] Balakrishnan, N. and Lai, CD. (2009). *continuos bivariate distributions*, vol 120, Springer-verlag.
- [2] Nadarajah, S. (2007). A bivariate gamma model for drought Water Resour Res, **43**, 749-759.
- [3] Crovelli, RA. (1973). A bivariate precipitation model Amer Meteor Soc **1**, 130-134.
- [4] Gupta, AK. and Nadarajah, S. (2006). Sums, products and ratios for Mckay's bivariate gamma Distributions. *Math Comput Model*, **1**, 185-193 .
- [5] Nadarajah, S. (2005). Products and ratios for a bivariate gamma distribution. *J Appl Math comput*, **24**, 581-595.
- [6] Nadarajah, S. (2009). A bivariate gamma distribution with gamma and beta marginal with application to drought data. *J Appl Stat* **36**, 277-301.
- [7] Paula, A.C., Silva, M. Araujo Rodrigues, J., Monterio Chaves, L. and Jaques de Souza, D. (2013). Sums, Products and Ratio for Crovelli's Bivariate Gamma Distribution.
- [8] 1. Oldham, K., Myland. J, and Spanier, J. (2009). *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator*. Springer- Verlag.
- [9] 1. Prudnikov, AP., Brychkov, YA. and Marichev, OI. (1998). *Integrals and series*, vol 1, Gordon and Breach, Amsterdam