

توزیع بیرنهام-ساندرز تعمیم یافته

زینب آقابزاز، محمدحسین علامت ساز^۱

چکیده:

توزیع بیرنهام-ساندرز^۲ (BS) به منظور مدل سازی زمان تخریب موادی که در معرض فرسودگی قرار دارند معرفی شد. اخیراً تعمیم هایی از این توزیع معرفی شده است. با این تعمیم ها، توزیع هایی با درجات مختلف کشیدگی و انواع متفاوت تک مدی و دومی حاصل شده است. در این مقاله تعمیم هایی از توزیع (BS) براساس توزیع های بیضوی تراز^۳ و چوله بیضوی تراز^۴ مورد مطالعه قرار می گیرند که دارای انعطاف پذیری زیاد از نظر کشیدگی و تقارن است و برای برازش بر انواع داده های خسارت تجمعی مناسب است. به این منظور، ابتدا توزیع های بیضوی تراز در حالت یک متغیره معرفی و حالات خاصی از این خانواده توزیع ها بیان می شوند. سپس به معرفی توزیع های چوله بیضوی تراز می پردازیم و در ادامه تعمیم هایی از توزیع (BS)^۵ براساس توزیع های بیضوی تراز و چوله بیضوی تراز معرفی می شوند. ویژگی های خاص این توزیع ها بیان شده و مثال هایی برای کاربرد این تعمیم ها ارائه می شود.

واژه های کلیدی: توزیع های بیضوی تراز، توزیع های چوله-بیضوی تراز، چولگی، کشیدگی، عمر فرسودگی، مدپذیری.

۱ مقدمه

و رشد ترک های موجود در مواد بودند که در نهایت منجر به فروپاشی و تخریب می شدند. دزmond [۱۲] توجیه فیزیکی استفاده از این توزیع را با تعدیل و ساده کردن فرض های اولیه بیرنهام و ساندروز تقویت کرد. به علاوه، او این توزیع را براساس مدل بیولوژیکی کرامر^۶ [۱۱] نیز به دست آورد. تحقیقات اصلی در این مورد توسط بیرنهام و ساندروز [۸،۹] انجام گرفت و بعدها به وسیله دزmond [۱۲]، جانسون و همکاران [۲۱] و مارشال و الکن [۲۷] ادامه یافت. در دهه گذشته تعمیم های مختلفی از توزیع (BS) مطرح شده است. آون و پاجت^۷ [۲۹] توزیع BS سه پارامتری را به دست آوردند. همچنین ولدین و دژونگرووا^۸ [۳۲] خانواده جدیدی از توزیع های عمر فرسودگی را تحت عنوان توزیع ترک به دست آوردند که به عنوان حالتی خاص از آن شامل توزیع BS می شد. با وجودی که متغیر تصادفی BS برحسب متغیر تصادفی

فرسودگی مجموعه خسارات ساختاری ناشی از نوسانات و تغییرات استرس و فشار بر مواد است. مدل های آماری در توصیف فرآیند فرسودگی امکان الگوسازی متغیرهای تصادفی زمان های شکست موادی که در معرض فرسودگی قرار دارند را برای ما فراهم می کند. چندین توزیع آماری برای توصیف داده های طول عمر فرسودگی به کار می روند. اگرچه توافق نظری در رابطه با تأثیرگذاری بیشتر آن ها در تحلیل داده های فرسودگی وجود ندارد. از محبوب ترین توزیع های خسارات تجمعی، توزیع بیرنهام-ساندروز، گاما، گوسین معکوس و لگ نرمال است. بیرنهام و ساندروز در جستجوی یافتن مدلی برای توصیف عمر فرسودگی مواد و ارتباط آن با نوع مواد مورد بررسی بودند. خسارات نتیجه ایجاد

^۱گروه آمار دانشگاه اصفهان

^۲Birnbaum-Saunders

^۳Elliptically contoured distribution

^۴Skew-elliptically contoured distribution

^۵Generalized Birnbaum-Saunders

^۶Cramer

^۷Owen and Padgett

^۸Volodin and Dzhungurova

۲ توزیع های بیضوی تراز

مدل نرمال یا گوسی در آمار به عنوان مدلی مرجع محسوب می شود و به طور گسترده به کار می رود. از جمله بسیاری از مدل سازی های آماری و خواص بهینه آن ها براساس فرض نرمال بودن صورت می گیرد. لیکن واضح است که پدیده های مختلف همیشه توسط توزیع نرمال قابل توجیه نیستند. برخی از داده ها به وسیله توزیع هایی با دم های سنگین تر و یا سبک تر از نرمال توصیف می شوند. مطالعات وسیع صورت گرفته در زمینه استنباط های آماری نشان می دهد، فرض نرمال بودن همیشه مناسب نیست. به خصوص از آنجایی که برآورد پارامترهای توزیع نرمال براساس روش های ماکزیمم درستنمایی نسبت به مشاهدات دور افتاده حساس اند، استفاده از توزیع نرمال در حالتی که با مشاهدات دور افتاده مواجه باشیم، مشکل ساز خواهد بود. لانگ و همکاران^{۱۶} [۲۳] برای حل این گونه مسائل استفاده از توزیع هایی با کشیدگی بیشتر از نرمال و قابل انعطاف تر از آن را پیشنهاد کردند. از اینرو داشتن ابزارهای استنباطی در برآورد پارامترها یا تابعی از آن ها به خصوص زمانی که با جوامع غیر نرمال روبرو هستیم، لازم و ضروری به نظر می رسد. کلاسی خاص با ویژگی های جالب که مدل غیر نرمال را هم شامل می شود، توزیع های بیضوی تراز و یا به طور ساده تر توزیع های بیضوی هستند. کلاس توزیع های بیضوی، شامل توزیع های چند متغیره ای است که تراز (مقطع) چگالی های آن ها همانند نرمال بیضوی شکل است. این کلاس شامل توزیع هایی با دم سنگین یا سبک تر از نرمال می باشد، یعنی با کشیدگی بیشتر یا کمتر از نرمال. به علاوه مدل نرمال حالت خاصی از این کلاس است. در دهه های اخیر، مبنای اصلی نظریه نرمال براساس توزیع های بیضوی به وجود آمده است. کاربرد این توزیع ها به عنوان تعمیم مدل نرمال براساس استدلال های تجربی یا فیزیکی نیست، بلکه دلایل کاملاً

نرمال استاندارد نیز به دست می آید، دزmond^۹ [۱۲] نشان داد توزیع BS از توزیع های متفاوت با نرمال استاندارد به دست می آید.

دیازگارسیا و لیوا^{۱۰} [۱۳] توزیع BS تعمیم یافته را با ساده تر کردن فرض نرمال بودن به دست آوردند. آن ها توزیع BS تعمیم یافته را براساس توزیع های بیضوی تراز (یا به طور ساده تر توزیع های بیضوی) مطرح کردند. برای جزئیات بیشتر در مورد توزیع های بیضوی تراز به گوپتا و وارگا^{۱۱} [۲۰]، فانگ و همکاران^{۱۲} [۲۷] و فانگ و زانگ^{۱۳} [۱۰] مراجعه کنید. دیازگارسیا و لیوا توزیع های BS را با درجات مختلف کشیدگی و انواع متفاوت تک مدی و دومدی به دست آوردند. استدلال هایی که دیازگارسیا و لیوا در تعمیم این توزیع به کار بردند، کاملاً آماری و براساس قواعد ریاضی استوار بود. اخیراً براساس ایده های دیازگارسیا و لیوا^{۱۴} [۱۴]، ویلکالابرا و لیوا^{۱۵} [۳۱] تعمیم بزرگتری از توزیع BS براساس توزیع های چوله-بیضوی به دست آمده است. براساس این تعمیم، توزیعی با انعطاف پذیری زیاد از نظر کشیدگی و تقارن به دست آمد. دیگر صورت های توزیع BS براساس توزیع های چوله توسط لیوا و همکاران [۲۱] به دست آمد. گویراد و همکاران^{۱۵} [۱۹] صورت غیرمرکزی توزیع BS را مطرح کردند. این توزیع در مدل سازی موقعیت هایی که رشد و گسترش ترک ها میانگین غیر ثابتی طی زمان دارد، به کار می رود.

قسمت های مختلف این مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم به معرفی توزیع های بیضوی تراز می پردازیم. در بخش سه توزیع بیرنهام-ساندرز را معرفی می کنیم و در بخش چهار توابع چگالی آن به ازای تعمیم های مختلف را مورد بررسی قرار می دهیم. در نهایت در بخش پنج مثال هایی برای کاربرد این تعمیم جدید ارائه می کنیم.

^۹Desmond

^{۱۰}Diaz-Garcia and Leiva

^{۱۱}Gupta and Varga

^{۱۲}Fang et al.

^{۱۳}Zhang

^{۱۴}Vilca-Labra

^{۱۵}Guirad et al.

^{۱۶}Lange et al.

آماري و يا رياضي دارد. به اين معني كه:

از نماد $X \sim EC(\mu, \eta; g)$ استفاده مي شود و چگالي X به صورت

$$f_X(x) = c \frac{1}{\sqrt{\eta}} g\left(\frac{[x - \mu]^2}{\eta}\right); \quad x \in \mathbb{R}, \mu \in \mathbb{R}, \eta > 0, \quad (2)$$

الف) نظريه حاصل تحت توزيع نرمال حالت خاصي از نظريه به دست آمده تحت توزيع هاي بيضوي است،

است كه در آن c ضريب نرمال ساز است به طوري كه

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(z^2) dz = \frac{1}{c}$$

g به پارامتر ديگري وابسته است كه شكل توزيع را تعيين

مي كند. پارامتر شكل با ν نشان داده مي شود و در حقيقت ميزان

كشيدگي توزيع را كنترل مي كند. اگر $X \sim EC(\mu, \eta; g)$ آن گاه

$$Y = a + bX \sim EC(a + b\mu, b^2\eta; g)$$

و $b \neq 0$ است. به عبارت ديگر توزيع هر تركيب خطي از متغير

تصادفي با توزيع متقارن در $\mathbb{R}$ نيز داراي توزيع متقارن در $\mathbb{R}$ است،

به ويژه $Z = \frac{X - \mu}{\sqrt{\eta}}$ داراي توزيع متقارن در R است و به صورت

$$Z(0, 1; g) \text{ و يا به صورت ساده تر به صورت } Z \sim (g) \text{ نشان داده}$$

مي شود. در اين حالت چگالي Z به صورت زير است

$$f_Z(z) = cg(z^2) \quad (3)$$

سه زير خانواده بيضوي، توزيع هاي كاتز- نوع KT، پيرسون نوع

VII (PVII) و لجستيك تعميم يافته نوع هستند. براي جزئيات

بيشتر به بالاكريشنان [5] مراجعه كنيد. كوشي، لاپلاس، لجستيك،

نرمال، نمايي تواني PE و t حالات خاصي از اين زيركلاس متقارن

بر هستند. در جدول ۱ برخي از اين نتايج خلاصه شده است. اين

جدول در بخش هاي بعد براي تعميم توزيع BS استفاده مي شود.

در شكل ۱ مشاهده مي شود كه توزيع KT متقارن است و بسته

به مقدار q تك مدی يا دو مدی است. همچنين مشاهده مي كنيم كه

كشيدگي توزيع KT بسته به پارامتر s ، ممكن است بيشتري يا كمتر

از توزيع نرمال باشد. در قسمت (ب) نيز مي بينيم كه توزيع PVII

متقارن است و كشيدگي بيشتري از نرمال دارد. در شكل ۲ قسمت

(الف) مقايسه دم چند توزيع متقارن استاندارد صورت گرفته است

و در قسمت (ب) انتهاي دم آنها بزرگنمايي شده است.

ب) بسياري از خواص توزيع نرمال را مي توان به حالي از توزيع هاي بيضوي تعميم داد و

پ) برخي از آماره ها كه در نظريه استنباط نرمال بودن به دست

مي آيد، مثلاً t و F ، تحت خانواده هايي از توزيع هاي بيضوي

نيز پايه هستند و به اين ترتيب همه تحليل هاي آماري كه

با فرض نرمال بودن انجام مي شود را مي توان به كلاس

توزيع هاي بيضوي تعميم داد.

بيشتر کاربردهاي مدل هاي بيضوي در زمينه ي مدل هاي رگرسيون

خطي و غيرخطي و مدل هاي سري زماني است. براي جزئيات

بيشتر به آرلانو^{۱۷} [۱]، ليوا [۲۴]، ساوالي و همكاران^{۱۸} [۳۰]،

اوسوريد و همكاران^{۱۹} [۲۸] و بارس [۷] مراجعه كنيد.

۱.۲ معرفي توزيع هاي بيضوي تراز يك متغيره :

توزيع هاي متقارن در $\mathbb{R}$

متغير تصادفي X داراي توزيع متقارن بر $\mathbb{R}$ است اگر تابع مشخصه

آن به شكل زير باشد

$$\psi_X(t) = \exp(it\mu)\phi(t^2\eta^2) \quad (1)$$

كه در آن $\phi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\mu \in \mathbb{R}$ پارامترهاي مكان و $\eta \in \mathbb{R}$

پارامترهاي مقياس است. مي توان متغير تصادفي X با توزيع بيضوي

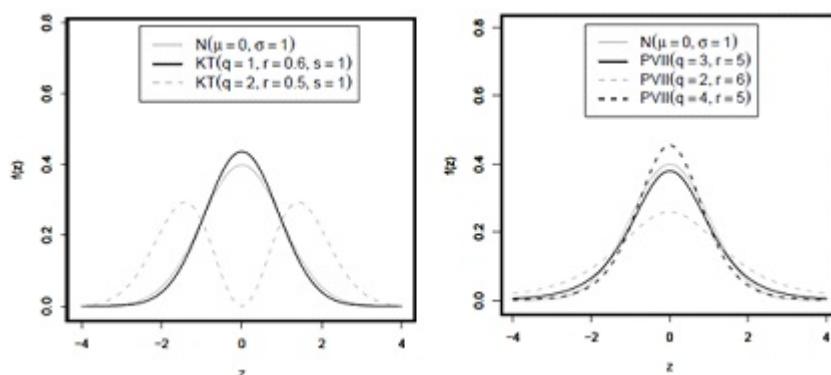
را به وسيله پارامترهاي مكان (μ) و مقياس (η) و هسته تابع چگالي

احتمال آنها (g) نيز تعريف كرد. در اين صورت براي نمايش آن

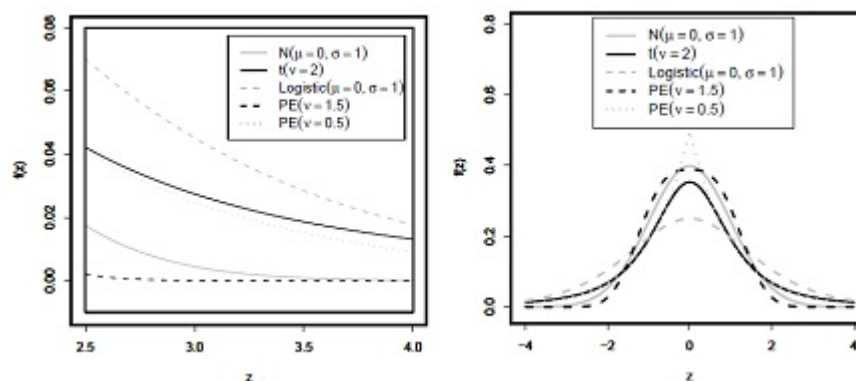
^{۱۷}Arellano

^{۱۸}Savalli et al.

^{۱۹}Osoria



شکل ۱: نمودارهای pdf توزیع های $KT(\bar{A})$ و $PVII$ (ب) برای مقادیر نشان داده شده پارامترها



شکل ۲: نمودارهای pdf توزیع های تعیین شده $(\bar{A})$ و بزرگنمایی دم راست pdf آن ها

جدول ۱: هسته (g) و ثابت نرمال ساز (c) برای توزیع های نشان داده شده

توزیع	نماد	C	$g(z^2), z \in \mathbb{R}$
نوع کاتر	$KT(q, r, s)$	$\frac{sr^{[2q-1]/[2s]}}{\Gamma(\frac{2q-1}{2s})}$	$z^{2[q-1]} \exp(-rz^{2s}); q > 1/2, r > 0, s > 0$
$LIII$	$LIII(q)$	$\frac{\Gamma(2q)}{[\Gamma(q)]^2}$	$\frac{[\exp(z)]^q}{[1+\exp(z)]^{2q}}; q > 0$
لجستیک	$Logestic(0, 1)$	1	$\frac{[\exp(z)]}{[1+\exp(z)]^2}$
نرمال	$N(0, 1)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	$\exp(-\frac{1}{2}Z^2)$
نمایی توانی	$PE(\nu)$	$\frac{\nu}{[2\nu]^{1/2}\Gamma(\frac{1}{2\nu})}$	$\exp(-\frac{1}{2\nu} Z ^{2\nu}); \nu > 0$
پیرسون نوع VII	$PVII(q, r)$	$\frac{\Gamma(q)}{\sqrt{r\pi}\Gamma(q-1/2)}$	$[1 + \frac{z^2}{r}]^{-q}; q > 1/2, r > 0$
t -استیودنت	t_ν	$\frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\nu+2)\sqrt{\nu\pi}}$	$[1 + \frac{z^2}{\nu}]^{-[\nu+1]/2}; \nu > 0$

تبدیلات هسته

نسبت زیر در تعمیم توزیع بیرنهام-ساندرز به کار می رود

$$\omega_g(u) = \frac{g'(u)}{g(u)}; \quad u > 0. \quad (4)$$

که در آن $g'(\cdot)$ ، مشتق $g(u)$ است که در معادله (۳) داده شده است. جدول ۲ نسبت $\omega_g(u)$ و مشتق $\omega'_g(u) = d\omega_g(u)/du$ ، $u > 0$ را برای توزیع های لاپلاس، لجستیک، نرمال، PE و t -استیودنت نشان می دهد.

۲.۲ توزیع های چوله-بیضوی

مطالعات نشان می دهد توزیع های متقارن در مدل سازی انواع داده ها مناسب نیستند. بنابراین، این موضوع انگیزه ای در ساخت توزیع هایی با خواص بهتر است. به ویژه در زمینه های بیولوژیکی، اقتصاد، فیزیک، جامعه شناسی و ... ساختار خطا ممکن است نرمال نباشد. چولگی یکی از زمینه های مورد توجه در فرضیات انحرافات از نرمال است. در این زمینه ساختار خطاهایی با انعطاف پذیری بیشتر از نرمال پیشنهاد می شود.

یکی از کلاس های توزیع های چندمتغیره خوش رفتار و انعطاف پذیر توزیع های چوله-بیضوی است. این کلاس در مدل سازی توزیع های چوله با دم های سنگین به کار می رود. برانکو و دی^{۲۰} [۱۰] نشان دادند کلاس توزیع های چوله-بیضوی چندمتغیره شامل توزیع های کروی و بیضوی چندمدی است. این توزیع های

جدید با انعطاف پذیری بالا به منظور مدل سازی داده های چوله در رگرسیون به کار می روند. خواص این توزیع ها در ادامه بیان می شود.

آزالینی^{۲۱} [۲] توزیع چوله-نرمال^{۲۲} یک متغیره را با تابع چگالی به شکل $2\phi(x)\Phi(\alpha x)$ ، $x, \alpha \in \mathbb{R}$ معرفی کرد. توزیع چوله-نرمال معرفی شده توسط وی براساس تابع چولگی ساخته شد، که در ادامه تعریف می شود.

تعریف ۱.۲. (تابع چولگی): تابع $\pi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ یک تابع چولگی است اگر در رابطه $\pi(z) + \pi(-z) = 1$ صدق کند.

توجه کنید که cdf یک توزیع تک متغیره متقارن، یک تابع چولگی است، اما یک تابع چولگی لزوماً یک cdf نیست. به ویژه یک تابع چولگی لزوماً صعودی نیست.

تعریف ۲.۲. (توزیع چوله متقارن): فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ یک pdf پیوسته متقارن حول ۰ ($f(-z) = f(z)$)، به ازای $z \in \mathbb{R}$ و $\pi: \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$ یک تابع چگالی باشد. متغیر تصادفی $z \in \mathbb{R}$ دارای یک توزیع چوله-مقارن با پارامتر مکان $\xi \in \mathbb{R}$ است و با نماد $Z \sim SS(\xi, f, \pi)$ نشان داده می شود اگر pdf آن به فرم زیر باشد

$$2f(z - \xi)\pi(z - \xi) \quad (5)$$

زمانی که π برابر ثابت $\frac{1}{2}$ باشد، pdf همان چگالی متقارن f است.

جدول ۲: مقادیر $\omega_g(u)$ و مشتق آن برای هسته (g) توزیع های متقارن مشخص شده

	لاپلاس	لجستیک	نرمال	نمایی توانی	t -استیودنت
$\omega_g(u)$	$-\frac{1}{2\sqrt{u}}$	$-\frac{\tanh\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right)}{2\sqrt{u}}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\nu}{2}u^{\nu-1}$	$-\frac{\nu+1}{2[\nu+u]}$
$\omega'_g(u)$	$\frac{1}{4\sqrt{u^3}}$	$\frac{\sinh(\sqrt{u}) - \sqrt{u}}{4\sqrt{u^3}[1 + \cosh(\sqrt{u})]}$	0	$-\frac{\nu[u-1]}{2}u^{\nu-2}$	$\frac{\nu+1}{2[\nu+u]^2}$

^{۲۰} Branco and Dey

^{۲۱} Azzalini

^{۲۲} Skew-Normal distribution

۳ توزیع BS تعمیم یافته

۱.۳ معرفی توزیع بیرنهام-ساندرز تعمیم یافته (GBS)

در این قسمت به چگونگی یافتن توزیع BS براساس توزیع های بیضوی تراز پرداخته می شود. مدل BS متناظر با توزیع متغیر تصادفی T است که به صورت زیر تعریف می شود

$$T = \beta \left[\frac{\alpha}{2} Z + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} Z\right)^2 + 1} \right]^2 \quad (6)$$

که در آن $\beta > 0$ و $\alpha > 0$ ، $Z = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \sim N(0, 1)$ به ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس اند.

اگر $T \sim BS(\alpha, \beta)$ باشد، آن گاه pdf متغیر T به صورت زیر است

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left(-\frac{1}{2\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right) \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}. \quad (7)$$

برای نمایش متغیر تصادفی T با توزیع GBS از نماد $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ استفاده می کنیم. در قضیه بعد چگالی GBS معرفی شده است.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ ، آن گاه تابع چگالی T برابر

$$f_T(t) = \frac{c}{2\alpha\sqrt{\beta}} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right); \quad t > 0,$$

است که مقدار c در آن در رابطه (۲) داده شده است.

اثبات. فرض کنید $f_U(u) = cg(u^2)$ و $U = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right]$. ژاکوبین تبدیل برابر $\frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}$ است. لذا داریم

$$\begin{aligned} f_T(t) &= f_U(u) \left(\frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right] \left| \frac{du}{dt} \right| \right) \\ &= cg \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\sqrt{\frac{T}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{T}} \right]^2 \frac{t^{-\frac{3}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}} \right) \\ &= \frac{c}{2\alpha\sqrt{\beta}} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right). \end{aligned}$$

در ادامه نتایج دقیقی از چگالی توزیع GBS براساس توزیع های متقارن ارائه می شود. اثبات این نتایج با استفاده از قضیه ۱ به سادگی امکان پذیر است. در شکل ۳ نمایشی از این چگالی ها ارائه شده است. این نمودارها با استفاده از بسته gbs در نرم افزار R رسم شده است.

نتیجه ۲.۳. (توزیع پیرسون نوع VII) ^{۲۳} فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$. با در نظر گرفتن $g(\cdot)$ مفروض در جدول ۱، چگالی T به صورت زیر است

$$f_T(t) = \frac{\Gamma(q)}{2\alpha(r\pi\beta)^{1/2}\Gamma(q - \frac{1}{2})} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right)^{-q};$$

که در آن $\alpha, \beta, r, t > 0$ و $q > \frac{1}{2}$.

نتیجه ۳.۳. (توزیع t). فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ با $g(\cdot)$ مفروض در جدول ۱ باشد آنگاه چگالی T به صورت زیر است

$$f_T(t) = \frac{\Gamma((\nu + 1)/2)}{2\alpha(\nu\pi\beta)^{1/2}\Gamma(\frac{\nu}{2})} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) \left(1 + \frac{1}{\nu\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right)^{-(\frac{\nu+1}{2})}$$

که در آن $\alpha, \beta, \nu, t > 0$.

نتیجه ۴.۳. (توزیع کوشی) ^{۲۴}. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ با $g(\cdot)$ مفروض در جدول ۱ باشد. آنگاه چگالی T به صورت زیر است

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi\alpha\beta^{1/2}} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) \left(1 + \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right)^{-1}; \quad t > 0$$

نتیجه ۵.۳. (توزیع کاتز-نوع) ^{۲۵}. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ با $g(\cdot)$ مفروض در جدول ۱ باشد. آنگاه چگالی T به صورت زیر است

$$f_T(t) = \frac{s r^{(2q-1)/(2s)} t^{-3/2} (t + \beta)}{2\alpha^{(2q-1)} \beta^{1/2} \Gamma(2q - 1/2s)} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right)^{q-1} \times \exp \left(\frac{r}{\alpha^{2s}} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right); \quad t > 0$$

□ که در آن $\alpha, \beta, r, s > 0$ و $2q + 1 > 2$ است.

^{۲۳} Pearson type VII distribution

^{۲۴} Cauchy distribution

^{۲۵} Katz-type distribution

نتیجه ۶.۳. (توزیع لاپلاس)^{۲۶}. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ اثبات. (الف) فرض کنید $a > 0$ و $Y = aT$ و $T = \frac{Y}{a}$ بنابراین $|J| = \frac{1}{a}$ و با توجه به $dT = (\frac{1}{a}) dY$ به این ترتیب چون $|J| = \frac{1}{a}$ و با توجه به چگالی T ، یعنی

$$f_T(t) = \frac{1}{\pi\alpha(2\beta)^{1/2}} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) \exp \left\{ - \left| \frac{1}{2^{1/2}\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right|^{1/2} \right\};$$

$$f_T(t) = \frac{c}{2\pi\alpha\beta^{1/2}} t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right); t > 0,$$

$$f_Y(y) = f_T(y/a) |J|$$

$$= \frac{c}{2\pi\alpha\beta^{1/2}} \left(\frac{y}{a} \right)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{y}{a} + \beta \right) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{y/a}{\beta} + \frac{\beta}{y/a} - 2 \right] \right) \frac{1}{a}$$

$$= \frac{c}{2\pi\alpha\sqrt{\alpha\beta}} y^{-\frac{3}{2}} (y + a\beta) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{y}{a\beta} + \frac{a\beta}{y} - 2 \right] \right);$$

$$t > 0.$$

(ب) حال فرض کنید $Y = T^{-1}$ در این صورت $T = Y^{-1}$ و $dT = -Y^2 dY$ به این ترتیب چون $|J| = Y^2$ است داریم

$$f_Y(y) = (y^{-1}) |J| =$$

$$\frac{c}{2\alpha\beta^{1/2}} (y^{-1})^{-\frac{3}{2}} (y^{-1} + \beta) \times g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{y^{-1}}{\beta} + \frac{\beta}{y^{-1}} - 2 \right] \right) y^{-2}$$

□

لذا با استفاده از روابط زیر

$$\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{y^{-1}}{\beta} + \frac{\beta}{y^{-1}} - 2 \right] = \frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{\beta^{-1}}{y} + \frac{y}{\beta^{-1}} - 2 \right]$$

$$\frac{y^{3/2}}{\beta^{1/2}} (y^{-1} + \beta) y^{-2} = \frac{y^{-1/2}}{\beta^{1/2}} \left(\frac{1}{y} + \beta \right) y^{-2}$$

$$= \beta^{1/2} y^{-3/2} \left(\frac{1}{\beta} + y \right),$$

داریم

$$f_Y(y) =$$

$$\frac{c}{2\alpha(\beta^{-1})^{1/2}} y^{-3/2} (y + \beta^{-1}) g \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{y}{\beta^{-1}} + \frac{y}{\beta^{-1}} - 2 \right] \right).$$

نتیجه ۷.۳. (توزیع لجستیک)^{۲۷}. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ با $g(\cdot)$ مفروض در جدول ۱ باشد. آنگاه چگالی T به صورت زیر است

$$f_T(t) = \frac{t^{-\frac{3}{2}} (t + \beta)}{2\alpha\beta^{1/2} \int_0^\infty z^{-1/2} \frac{\exp(-z)}{1 + \exp(-z)} dz} \times$$

$$\frac{\exp \left(\frac{1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right)}{\left[1 + \exp \left(\frac{-1}{\alpha^2} \left[\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right) \right]^2}; t > 0$$

که در آن $\alpha, \beta > 0$ است.

۲.۳ برخی از خواص توزیع GBS

در این قسمت برخی از خواص توزیع GBS را بیان می‌کنیم. در حالت نرمال aT به ازای $a > 0$ دارای توزیع BS با پارامترهای α و $\alpha\beta$ است. به علاوه T^{-1} نیز دارای توزیع BS با پارامترهای α و β^{-1} در قضیه زیر نشان می‌دهیم این خواص در توزیع GBS نیز برقرار است.

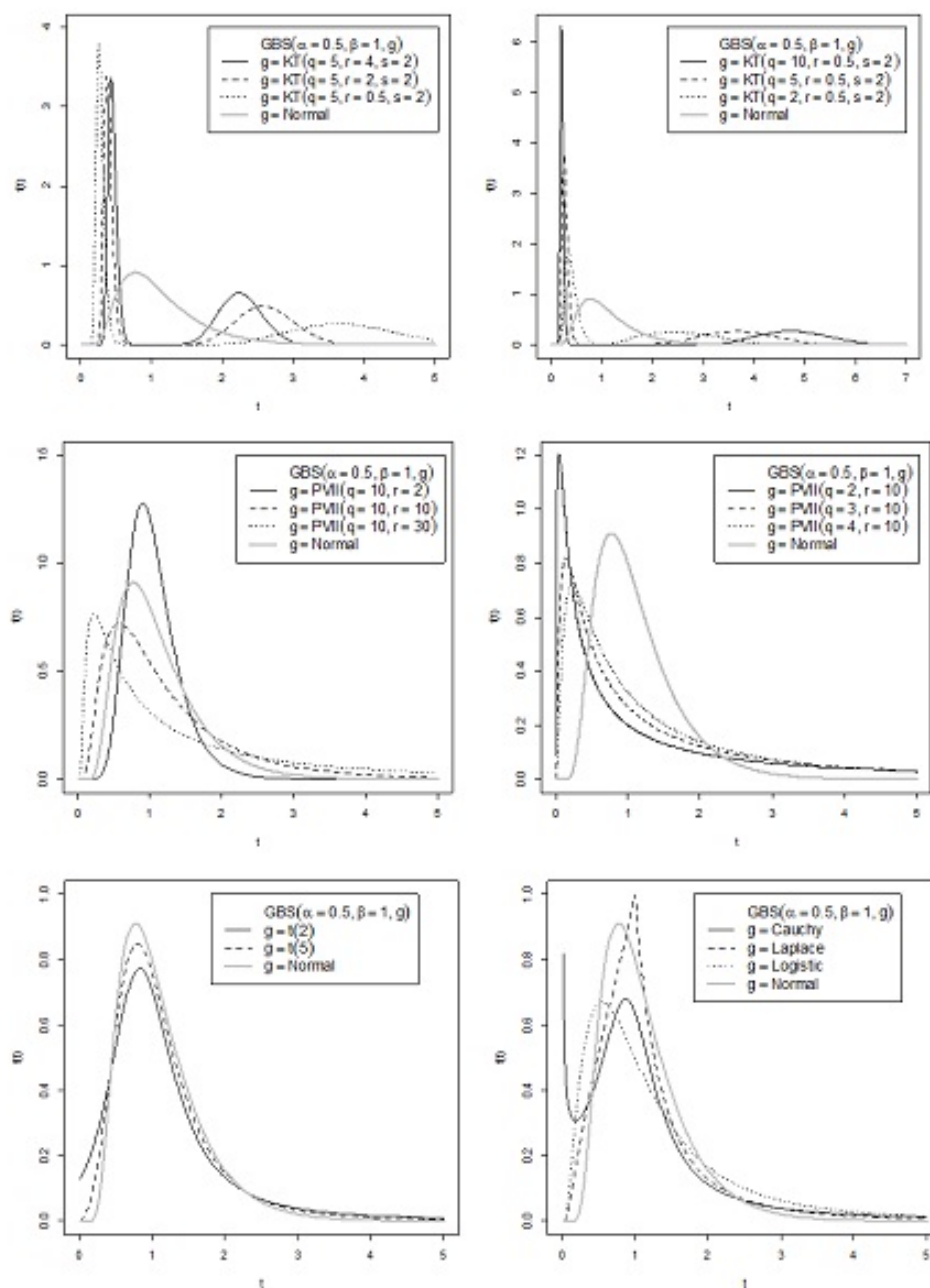
قضیه ۸.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ در این صورت داریم

(الف) به ازای $Y = aT \sim GBS(\alpha, \alpha\beta; g)$ ، $a > 0$ و

(ب) $Y = T^{-1} \sim GBS(\alpha, \beta^{-1}; g)$

^{۲۶}Laplace distribution

^{۲۷}Logistic distribution



شکل ۳: نمودارهای چگالی توزیع GBS برای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 1$ هسته‌های تعیین شد

تذکر ۹.۳. همان‌طور که مشاهده می‌شود، خانواده جدیدی از توزیع‌های طول عمر به دست آمد که حالات مختلفی اختیار می‌کند. چندان رایج نیست، اما داده‌هایی وجود دارد که این توزیع بر آن‌ها برازش خوبی دارد.

گشتاورهای این توزیع ممکن است موجود نباشد. برای مثال اگر توزیع BS براساس توزیع کوشی تعمیم یابد، گشتاورهای آن موجود نیست. در شکل ۳ انواع چگالی‌های حاصل از تعمیم توزیع BS نشان داده شده است. چگالی‌های حاصل از این تعمیم‌ها دم‌های چپ سنگین‌تر و یا سبک‌تر از BS دارند. چگالی‌های حاصل از کوشی و کاتر دو-مدی هستند. استفاده از توزیع کاتر

شکل ۳ نشان می‌دهد هنگامی که r افزایش می‌یابد، توزیع BS تعمیم یافته از پیرسون نوع VII پهن‌تر و متقارن‌تر می‌شود. همچنین هنگامی که q افزایش پیدا می‌کند، کشیدگی کاهش می‌یابد در حالی که تقارن و چولگی بدون تغییر است. در توزیع BS تعمیم یافته براساس توزیع t ، با افزایش توزیع حاصل شبیه توزیع BS است. این موضوع قابل پیش‌بینی است چراکه

توزیع t به ازای درجات آزادی بیشتر، به سمت توزیع نرمال

می‌رود. در این شکل تفاوت بین توزیع BS و تعمیم‌های

حاصل از توزیع‌های لاپلاس، لجستیک و کوشی قابل مشاهده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود توزیع لاپلاس، توزیعی بسیار متقارن به وجود آورده که در نقطه تقارن و ماکزیمم توزیع ناپیوسته

است. حال به بیان خواص دیگر توزیع GBS می‌پردازیم. cdf متغیر تصادفی T ، به ازای $t \geq 0$ $f_T(t) = F(a_t)$ است که

در آن تابع توزیع تجمعی $Z \sim S(g)$ و $a_t = a_t(\alpha, \beta)$ $\beta = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$ تابع چندک 28 متغیر تصادفی T به صورت $t(q) = \frac{\beta}{4} (\alpha z_q + [\alpha^2 z_q^2 + 4]^{1/2})^2$ می‌باشد که در آن z_q چندک q -ام $Z \sim S(g)$ است. به سادگی می‌توان نشان داد اگر $q = 0.5$ ، آن‌گاه $\beta = t(0.5)$. بنابراین β میانه توزیع است.

۳.۳ تحلیل‌های طول عمر توزیع GBS

در این بخش تحلیل‌های طول عمر توزیع GBS براساس نرخ خطر صورت می‌گیرد. عمده مطالب این بخش از مقالات لیوا و همکاران [۲۵] و کوندا و همکاران 29 [۲۲] می‌باشد.

الف: تابع نرخ خطر GBS

تابع نرخ خطر متغیر تصادفی T در قالب قضیه زیر ارائه شده است.

قضیه ۱۰.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ ، آن‌گاه تابع نرخ خطر T به صورت زیر است

$$h_T(t) = \frac{f(a_t)}{f(-a_t)} A_t; \quad t > 0, 0 < F(\cdot) < 1, \quad (8)$$

که در آن $a_t = a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$ و $A_t = \frac{d}{dt} a_t = \frac{1}{2\alpha\beta} \left(\sqrt{\frac{\beta}{t}} - \sqrt{\frac{t}{\beta^3}} \right)$ pdf و cdf متغیر تصادفی $Z \sim S(g)$ است.

اثبات. با استفاده از تعریف تابع نرخ خطر و تقارن توزیع‌های کروی به سادگی اثبات می‌شود. $\square$

با استفاده از این قضیه، توابع $R_T(t)$ ، $R_T(t|x)$ ، $FRA(t)$ و μ_x قابل محاسبه است. همچنین با استفاده از جدول ۱ می‌توان برای توزیع‌های BS ، لجستیک- GBS و $GBS-t$ و ... تابع نرخ

خطر را به سادگی محاسبه کرد.

ب: نقطه بحرانی نرخ خطر GBS

قضیه ۱۱.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ و pdf متغیر تصادفی T تک-مدی است. نقطه بحرانی تابع نرخ خطر با حل معادله زیر به دست می‌آید

$$F(a_t) = -\frac{\alpha\beta^{1/2}t^{1/2}(t+\beta)^2 f(a_t)}{2\omega_g(k_t)(t-\beta)(t+\beta)^2 + (t+3\beta)\alpha^2\beta t}, \quad (9)$$

که در آن $\omega_g(\cdot)$ در رابطه (۴) داده شده، $a_t = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$ و $k_t = a_t^2$ است.

اثبات. در صورتی که متغیر تصادفی $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ ، تک مدی باشد، $f_T(t)$ از صفر تا t_m صعودی و $R_T(t)$ نزولی است. بنابراین $h_T(t)$ به ازای $t < t_m$ صعودی است.

برای بررسی رفتار $h_T(t)$ برای $t > t_m$ ، $\frac{d}{dt} \log(h_T(t)) = \frac{h'_T(t)}{h_T(t)} = -l_T(t) + h_T(t)$ که در آن $l_T(t) = -\frac{f'_T(t)}{f_T(t)}$. بنابراین نقطه بحرانی تابع نرخ خطر جواب معادله زیر است

$$l_T(t_c) = h_T(t_c). \quad (10)$$

از آنجایی که $h_T(t) = -\left[\frac{f'(a_t)}{f(a_t)} + \frac{A'_t}{A_t} \right]$ معادله (۱۰) را به صورت زیر داریم

$$-\frac{f'(a_t)}{f(a_t)} - \frac{A'_t}{A_t} = \frac{f(a_t)}{f(-a_t)} A_t.$$

با حل این رابطه بر حسب $F(a_t)$ داریم

$$F(-a_t) = \frac{-f(a_t)A_t}{\frac{f'(a_t)}{f(a_t)} + \frac{A'_t}{A_t}}, \quad (11)$$

که در آن $f(a_t) = cg(k_t)$ و $f'(a_t) = cg'(k_t)k'_t$ است. بنابراین $\frac{f'(a_t)}{f(a_t)} = \omega_g(k_t) \frac{(t-\beta)(t+\beta)}{\alpha^2\beta^2}$ (۱۲) حال با جایگزینی معادله (۱۲) در معادله (۱۱) و در نظر گرفتن A_t قضیه ثابت می‌شود. $\square$

تذکر ۱۲.۳. نقطه بحرانی نرخ خطرهای BS ، لجستیک- GBS ، $GBS-t$ و ... با جایگذاری $f(\cdot)$ ، $F(\cdot)$ و $\omega_g(\cdot)$ متناظر با هر کدام و جداول ۱ و ۲ به دست می‌آید. به علاوه حل معادله (۹) به روش‌های عددی امکان‌پذیر است.

پ: رفتار حدی نرخ خطر توزیع GBS

^{۲۸}Quantile function

^{۲۹}Kundua et al.

قضیه ۱۳.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ و $h_T(t)$ نرخ خطر نتیجه ۱۴.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ و $h_T(t)$ نرخ خطر آن باشد. اگر $\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_g(k_t)$ وجود داشته باشد، داریم

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t) &= - \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ \frac{d}{dT} \log(g(k_t)) \right\} \\ &= - \frac{1}{\alpha^2 \beta} \lim_{t \rightarrow \infty} \omega_g(k_t). \end{aligned}$$

اثبات. اگر $t \rightarrow \infty$ آن گاه $a_t \rightarrow \infty$ و $F(a_t) \rightarrow \infty$. معادله (۸)

و روابط زیر را در نظر بگیرید

$$\omega_g(k_t) = \frac{B_t}{k'_t}, B_t = -\frac{A'_t}{A_t} = -\frac{(t+3)}{2t(t+\beta)}, k'_t = -\frac{(t-\beta)(t+\beta)}{\alpha^2 \beta t^2}$$

آنگاه با به کارگیری قاعده هوییتال بر $h_T(t)$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} h_T(t) &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\omega_g(k_t) k'_t + B_t \right\} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left\{ -\omega_g(k_t) \frac{1}{\alpha^2} \left(\frac{1}{\beta} - \frac{\beta}{t^2} \right) \right\}, \end{aligned}$$

به این ترتیب قضیه ثابت می شود.

الف) توزیع های BS و لجستیک- GBS

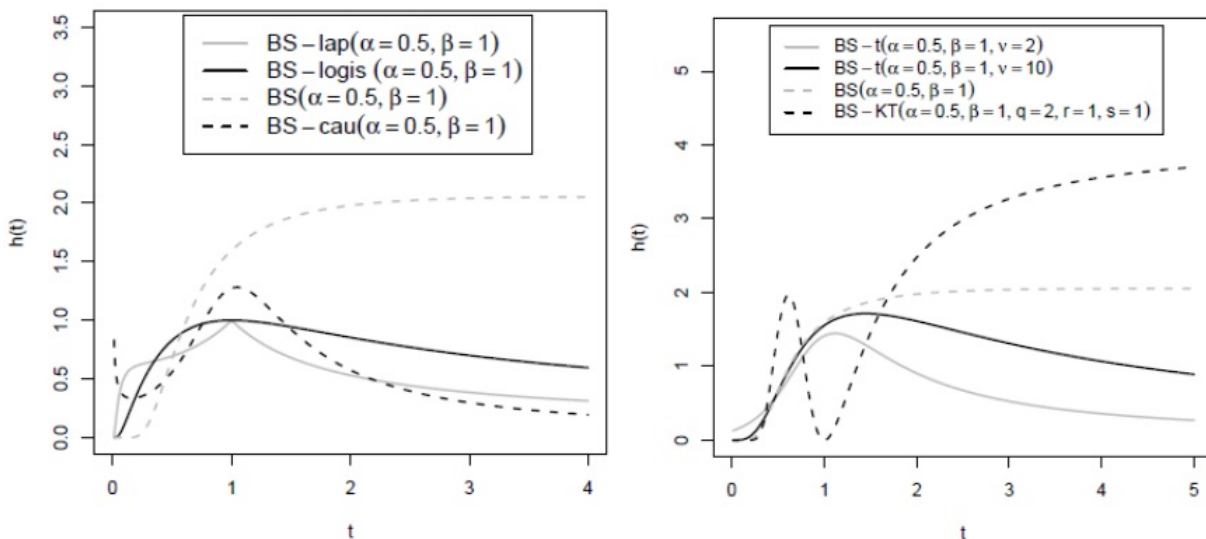
$$h_T(t) \rightarrow \frac{1}{2\alpha^2 \beta}$$

ب) توزیع $GBS-t$

$$h_T(t) \rightarrow \begin{cases} (2\alpha^2 \beta) & \text{اگر } \nu \rightarrow \infty \\ 0 & \text{اگر } \nu \rightarrow 0 \end{cases}$$

ت: نمودارهای توابع نرخ خطر GBS در این قسمت برخی

از نمودارهای توابع نرخ خطر GBS را بررسی می کنیم. این نمودارها در شکل ۴ نمایش داده شده است. همان طور که مشاهده می شود، این شکل شامل توابعی صعودی، نزولی و $\cap$ -شکل است. □



شکل ۴: نمودارهای نرخ خطر $BS-t$ و BS ، $BS-KT$ (راست) و $BS-lap$ ، $BS-cau$ و $BS-logist$ برای تعیین شده

۴.۳ قابلیت اعتماد سیستم: خاصیت جدیدی از

$T_{(j)}$ به ترتیب مینیمم، ماکزیمم و j -امین آماره ترتیبی متغیرهای $T_1, \dots, T_n$ اند. در ادامه توابع چگالی آماره های ترتیبی توزیع های GBS را مورد بررسی قرار می دهیم.

توزیع BS

طول عمر سیستمی که مؤلفه های آن به صورت سری، موازی و

قضیه ۱۵.۳. فرض کنید $T_1, \dots, T_n$ متغیرهای تصادفی مستقل و

هم توزیع اند. به طوری که $T_i \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ برای $i = 1, \dots, n$ بنابراین pdf آماره های ترتیبی $T_{(1)}, T_{(j)}$ و $T_{(n)}$ به صورت زیر

یا ترکیبی از این دو متصل شده اند، به ماکزیمم و مینیمم طول عمر مؤلفه های آن بستگی دارد. به عبارتی به آماره های ترتیبی طول عمر مؤلفه ها وابسته است. آماره های ترتیبی طول عمر مؤلفه ها

به صورت $T_{(1)}, \dots, T_{(j)}, \dots, T_{(n)}$ نشان داده می شود. $T_{(n)}, T_{(1)}$ است

لگ-نرمال توسط فانگ و همکاران^{۳۰} [۱۷] معرفی شد و به دنبال آن مطالعاتی در زمینه‌های چند متغیره و چوله-نرمال توسط آزالینی و دالاوله [۳] و آزالینی و کاپیتانیو^{۳۱} [۴] صورت گرفت. فاریاس-گونزالز و دومینیگو^{۳۲} گام بلندی در ساختن توزیع‌های چوله-بیضوی برداشتند. همه این نظرات و تحقیقات در کتاب جنتون [۱۸] خلاصه شده است.

همان‌طور که بیان شد، در حالت تک متغیره توزیع چوله-بیضوی به صورت $Y \sim SEC(\mu, \sigma^2, \lambda; g)$ نشان داده می‌شود، که در آن μ ، σ و λ به ترتیب پارامترهای مکان، مقیاس و چولگی هستند. در حالت خاص، اگر $\lambda = 0$ این توزیع متناظر با توزیع‌های بیضوی در $\mathbb{R}$ است. بنابراین اگر $Y \sim SEC(0, 1, \lambda; g)$ تابع چگالی احتمال Y به صورت زیر است

$$f_Y(y) = 2f(y)F(\lambda y); y \in \mathbb{R}. \quad (13)$$

در ساخت توزیع‌های چوله، از نظر قابلیت اعتماد، دو جنبه در درجه اول اهمیت دارد. جنبه اول، از نقطه نظر تئوری، هدف ایجاد تعمیم بزرگتر توزیع BS با استفاده از توزیع‌های چوله-بیضوی و ایجاد توزیع طول عمر جدید، انعطاف‌پذیر و نزدیک‌تر به واقعیت است. جنبه دوم، از نقطه نظر تجربی است. برای درک بیشتر سیستمی را در نظر بگیرید که دارای مؤلفه‌های مشابه با طول عمر شکست مستقل از هم و هم توزیع باشند. اگر مؤلفه‌ها به‌طور موازی به یکدیگر متصل شده باشند، طول عمر شکست سیستم متناظر با ماکزیمم طول عمر مؤلفه‌ها خواهد بود.

Pdf آماره‌های ترتیبی دارای توزیع BS تعمیم یافته توسط توزیع‌های SEC است. این خاصیت جالب توزیع BS در قابلیت اعتماد مدل‌های فشار-مقاومت، $P(X > Y)$ کاربرد دارد که در آن X مقاومت مواد و Y فشار وارد شده بر آن را نشان می‌دهد. این موضوع دلیلی بر گسترش این مدل طول عمر محسوب می‌شود. در این بخش چگالی و برخی شکل‌های آن، توابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر، گشتاورها، ضریب چولگی و کشیدگی این مدل جدید به دست آمده است. به علاوه برخی از خواص این توزیع جدید بیان می‌شود. این تعمیم نسبت به تعمیم به دست آمده توسط دیاز-

$$f_{T(1)}(t) = nf(a_t)A_t(F(-a_t))^{n-1}; t > 0 \quad \text{الف)}$$

$$f_{T(n)}(t) = nf(a_t)A_t(F(a_t))^{n-1}; t > 0 \quad \text{ب)}$$

$$f_{T(j)}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} f(a_t)A_t(F(a_t))^{j-1}(F(-a_t))^{n-j} \quad \text{ج)}$$

که در آن a_t و A_t در قضیه ۱۰.۳ داده شده و $f(\cdot)$ و $F(\cdot)$ به ترتیب pdf و cdf متغیر $Z \sim S(g)$ است.

نتیجه ۱۶.۳. فرض کنید $T \sim GBS(\alpha, \beta; g)$ برای توزیع‌های مفروض، pdf آماره ترتیبی $T_{(j)}$ به صورت زیر است

الف) BS

$$f_{T(j)}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{a_t^2}{2}\right) A_t(\Phi(a_t))^{j-1} (\Phi(-a_t))^{n-j}.$$

ب) لجستیک- GBS

$$f_{T(j)}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} A_t \exp(ja_t) \times [1 + \exp(ja_t)]^{-(n+1)}; \quad t > 0.$$

ج) $GBS - t$

$$f_{T(j)}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} \frac{\Gamma((\nu+1)/2)}{(\nu\pi)^{1/2}\Gamma(\nu/2)} \times \left(1 + \frac{a_t^2}{\nu}\right)^{-((\nu+1)/2)} A_t \frac{(\Phi_t(a_t))^{j-1}}{(\Phi_t(-a_t))^{n-j}}; \quad t > 0.$$

تذکر ۱۷.۳. با استفاده از قضیه ۱۵.۳، اگر $n = 2$ باشد آماره‌های توزیع GBS دارای توزیع چوله- GBS هستند. در بخش بعد به معرفی این تعمیم جدید از توزیع GBS می‌پردازیم.

۴ توزیع بیربنام-ساندرز تعمیم یافته مضاعف

در این بخش تعمیم جدیدی از توزیع بیربنام-ساندرز براساس توزیع‌های چوله-بیضوی معرفی می‌شود. خارج از زمینه قابلیت اعتماد، از نظر چند متغیره بیضوی، موضوع توزیع‌های لگاریتمی و توزیع‌های چوله با هدف ایجاد تعمیم بزرگتری مطرح شده است. از طرفی توزیع لگ-بیضوی به عنوان تعمیمی از توزیع

^{۳۰} Fang et al.

^{۳۱} Capitanio

^{۳۲} Farias-Gonzalez and Dominguez

گارسیا و لیوا [۱۴] بزرگتر است. این مدل از یک طرف با تعمیم توزیع نرمال به توزیع های بیضوی و از طرف دیگر با در نظر گرفتن پارامتر چولگی توزیع SEC ، تعمیمی مضاعف محسوب می شود. توزیع BS تعمیم یافته مضاعف^{۳۳} با نماد GBS'' نمایش داده می شود. متغیر تصادفی Z را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$f_T(t) = f(a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta), \quad (18)$$

و تابع توزیع تجمعی به صورت زیر محاسبه می شود

$$f(\lambda a_t(\alpha, \beta)) = \int_{-\infty}^{\lambda a_t(\alpha, \beta)} f(x) dx,$$

که در آن f و F در معادله (۱۵) معرفی شد.

$$Z \sim \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right) \sim SEC(0, 1, \lambda; g) \quad (14)$$

با استفاده از رابطه (۱۳)، pdf متغیر تصادفی Z به صورت

$$f_Z(z, \lambda) = 2f(z)F(\lambda z); z \in \mathbb{R} \quad (15)$$

است که در آن f در (۳) داده شده، F تابع توزیع تجمعی (cdf)

متناظر با آن و $\lambda \in \mathbb{R}$ پارامتر چولگی است. با روشی مشابه با

روش به کار رفته توسط دیاز-گارسیا و لیوا [۱۴] داریم

$$T = \beta \left[\frac{\alpha}{2} Z + \sqrt{\left(\frac{\alpha}{2} Z \right)^2 + 1} \right]^2 \quad (16)$$

که متغیر تصادفی T دارای توزیع GBS'' است و با نماد

$$T \sim GBS''(\alpha, \beta; g, \lambda)$$

نشان داده می شود.

۱.۴ تابع چگالی

در این قسمت pdf متغیر تصادفی T در رابطه (۱۶) را در قالب قضیه بعد ارائه می کنیم.

قضیه ۱.۴. فرض کنید $T \sim GBS''(\alpha, \beta; g, \lambda)$ باشد. pdf متغیر

تصادفی T به صورت زیر است

$$f_T(t, \lambda) = 2f(a_t(\alpha, \beta))F(\lambda a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta); t > 0, \quad (17)$$

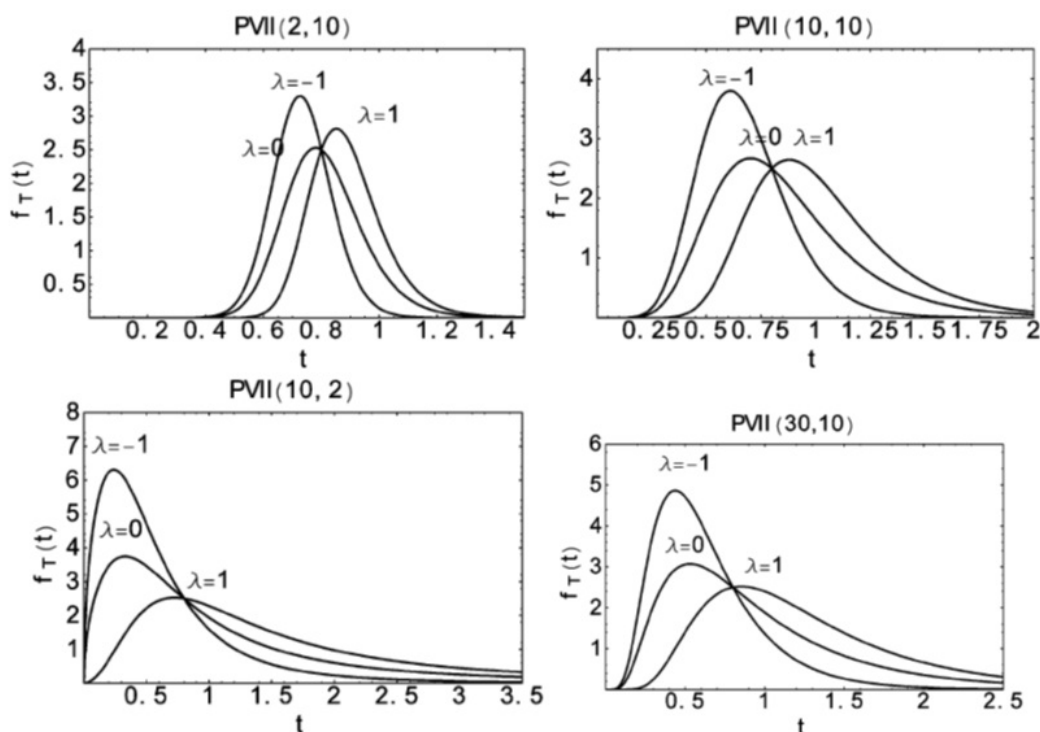
که در آن $a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left(\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right)$ و f و F در (۱۵) داده شده است.

اثبات. با استفاده از معادله (۱۵) به طور مستقیم به دست می آید. $\square$

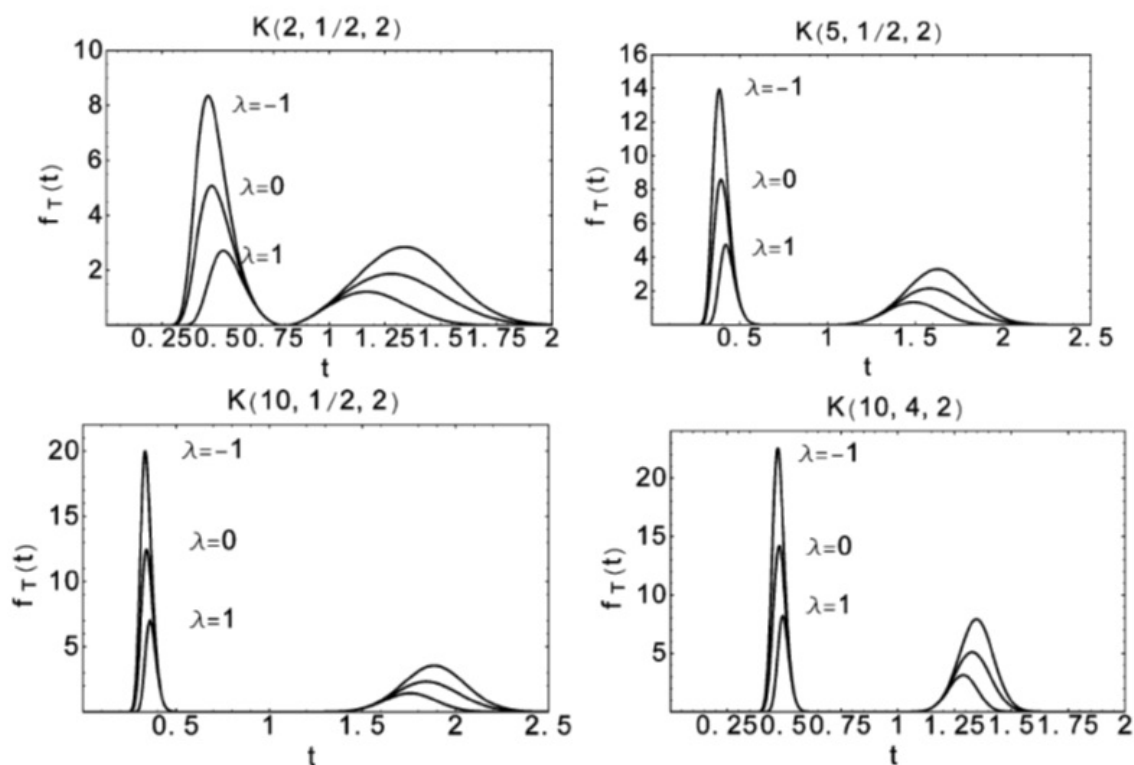
۲.۴ نمودارهای چگالی

در شکل های ۵ تا ۷ نمودارهای مختلف چگالی GBS'' نشان داده شده است. شکل های ۵ و ۶ به وسیله نرم افزار Mathematica 5.0. توسط ویلکا-لابرا و لیوا [۳۱] رسم شده است. با توجه به شکل می توان تأثیر تغییرات پارامتر چولگی بر چگالی توزیع GBS'' را مشاهده کرد. همچنین تفاوت چگالی GBS'' و توزیع GBS که حالت خاصی از آن به ازای $\lambda = 0$ است، در شکل مشاهده می شود. مدل های طول عمر جدید، توزیع هایی با دم های سنگین تر ایجاد می کنند. وقتی که λ مثبت است ($\lambda = 1$)، توزیع های تک مدی ایجاد می شود و وقتی که λ منفی است GBS تراکم اطراف مد بیشتر است. در توزیع پیرسون نوع VII (شکل ۵) با افزایش r و q ، توزیع کشیده تر و متقارن تر می شود. همچنین مد توزیع به سمت راست حرکت می کند و تغییرات کاهش می یابد.

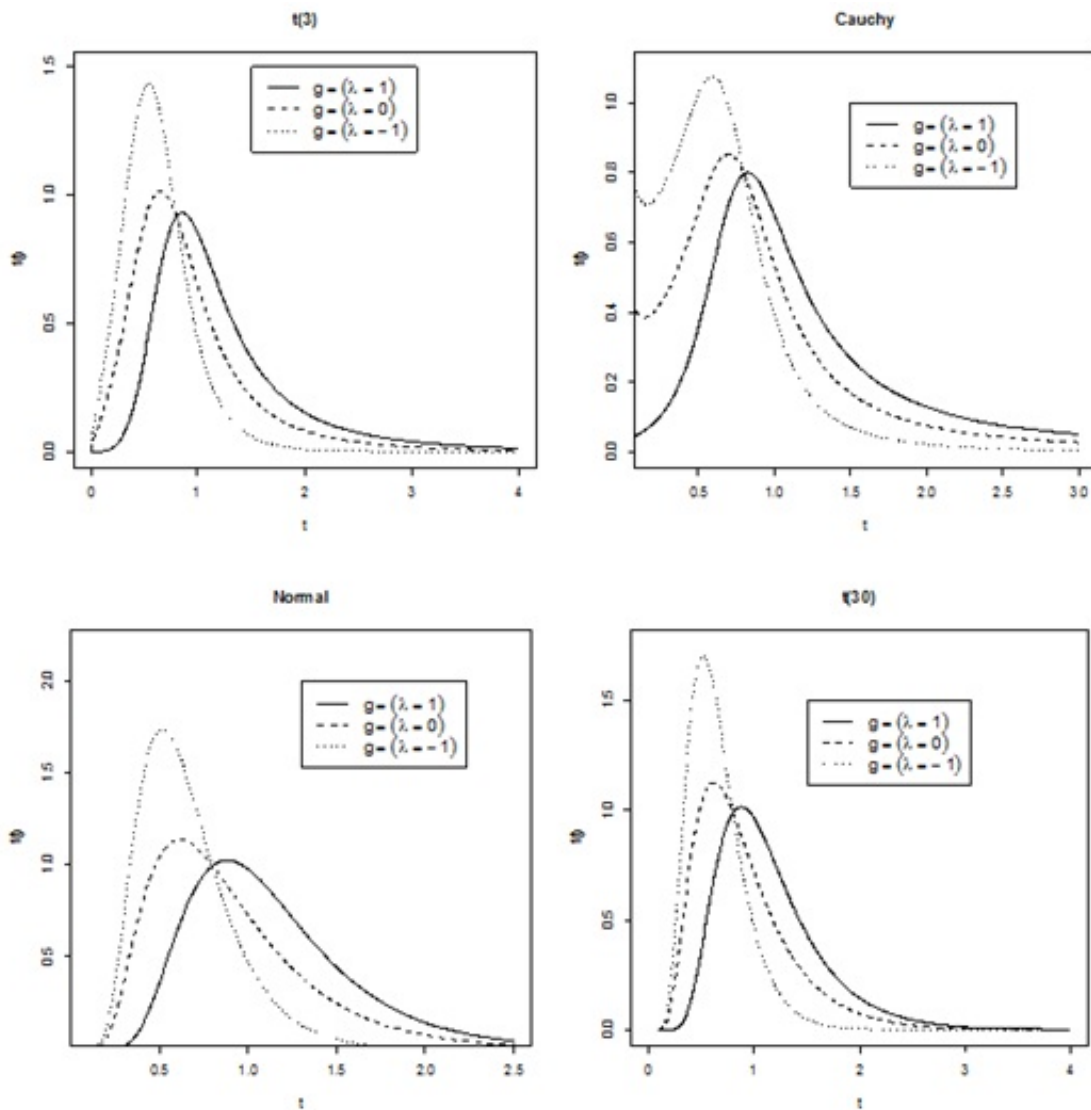
در توزیع کاتز-نوع (شکل ۶) با کاهش q توزیع پهن تر، متقارن تر و نیز فاصله مدها بیشتر می شود. این توزیع چگالی های دو مدی ایجاد می کند. زمانی که r افزایش می یابد، توزیع پهن تر و تغییرات افزایش می یابد.



شکل ۵: نمودارهای چگالی توزیع GBS'' حاصل از توزیع پیرسون نوع VII برای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.8$ و r و q تعیین شده $P(VII(r, q))$



شکل ۶: نمودارهای چگالی توزیع GBS'' حاصل از توزیع کاتز-نوع $KT(q, r, s)$ برای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.8$ و q و r و s تعیین شده



شکل ۷: نمودارهای چگالی GBS''' به دست آمده از توزیع های تعیین شده به ازای $\alpha = 0.5$ و $\beta = 0.8$

چوله- بیضوی Z است. در این صورت

(الف) $F_T(t; \lambda) = F_Z(a_t(\alpha, \beta); \lambda)$ در حالت خاص برای $\lambda = 0$,

$$F_T(t; \lambda) = F(a_t(\alpha, \beta); \lambda)$$

(ب) $F_T(t; -\lambda) = 2F_T(t; \lambda = 0) - F_T(t; \lambda)$

(ج) به ازای $\lambda = 1$ ، $F_T(t; \lambda) = [F(a_t(\alpha, \beta))]^2$

اثبات. (الف)

$$\begin{aligned} f_T(t; \lambda) &= \int_0^t 2F(a_x(\alpha, \beta))F(\lambda a_x(\alpha, \beta)) \frac{d}{dx} a_x(\alpha, \beta) \\ &= \int_{-\infty}^{a_t(\alpha, \beta)} 2f(x)F(\lambda x)dx \\ &= F_Z(a_t(\alpha, \beta); \lambda). \end{aligned}$$

۳.۴ خواص و مشخصه ها

در این بخش برخی از خواص توزیع GBS''' را بیان می کنیم. این خواص در توزیع BS و GBS نیز برقرار هستند.

قضیه ۳.۴. فرض کنید $T \sim GBS'''(\alpha, \beta; g, \lambda)$

(الف) برای $a > 0$ ، $aT \sim GBS'''(\alpha, a\beta; g, \lambda)$

(ب) $T^{-1} \sim GBS'''(\alpha, \beta^{-1}; g, \lambda)$

اثبات. با استفاده از روش تغییر متغیر و مشابه با اثبات قضیه ۸.۳، اثبات می شود. $\square$

قضیه ۴.۴. فرض کنید $T \sim GBS'''(\alpha, \beta; g, \lambda)$ و تابع توزیع تجمعی آن باشد. F در معادله (۱۵) داده شده و F_Z ، cdf متغیر

(ب)

قضیه ۷.۴. فرض کنید $T_1, T_2, \dots, T_n$ متغیرهای تصادفی مستقل وهم توزیع باشند، به طوری که برای $i = 1, \dots, n$ $T_i \sim GBS(\alpha, \beta; g, \lambda)$ ، در این صورتالف) $T_{(1)}$ مینیمم $T_1, T_2, \dots, T_n$ ، دارای تابع چگالی زیر است

$$f_{T_{(1)}}(t) = n f(a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta) [F(-a_t(\alpha, \beta))]^{n-1} \quad (۱۹)$$

ب) $T_{(n)}$ ماکزیمم $T_1, T_2, \dots, T_n$ ، دارای تابع چگالی زیر است

$$f_{T_{(n)}}(t) = n f(a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta) [F(a_t(\alpha, \beta))]^{n-1} \quad (۲۰)$$

ج) $T_{(i)}$ -امین آماره ترتیبی $T_1, T_2, \dots, T_n$ ، دارای تابع چگالی

زیر است

$$f_{T_{(i)}}(t) = \frac{n!}{(j-1)!(n-j)!} n f(a_t(\alpha, \beta)) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta) [F(a_t(\alpha, \beta))]^{j-1} [F - (a_t(\alpha, \beta))]^{n-j} \quad (۲۱)$$

اثبات. به سادگی از توزیع آماره‌های ترتیبی هر سه قسمت اثبات

□

می‌شود.

$$\begin{aligned} F_T(t; -\lambda) &= \int_0^t 2f(a_x(\alpha, \beta)) F(-\lambda a_x(\alpha, \beta)) \frac{d}{dx} a_x(\alpha, \beta) dx \\ &= \int_0^t 2f(a_x(\alpha, \beta)) (1 - F(-\lambda a_x(\alpha, \beta))) \frac{d}{dx} a_x(\alpha, \beta) dx \\ &= \int_0^t 2f(a_x(\alpha, \beta)) \frac{da_x(\alpha, \beta)}{dx} dx \\ &\quad - \int_0^t 2f(a_x(\alpha, \beta)) F(\lambda a_x(\alpha, \beta)) \frac{da_x(\alpha, \beta)}{dx} dx \\ &= 2F_T(t; \lambda = 0) - F_T(t; \lambda). \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} F_T(t; \lambda = 1) &= \int_{-\infty}^{a_t(\alpha, \beta)} 2f(x) F(\lambda x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{a_t(\alpha, \beta)} \frac{d}{dx} F^2(x) dx \\ &= F^2(a_t(\alpha, \beta)). \end{aligned}$$

تذکر ۵.۴. از قضیه ۹ قسمت (الف)، چندک P -ام توزیع، $t_p = F_T^{-1}(P, \lambda)$ به صورت زیر است

$$t_p = \frac{\beta}{4} \left(\alpha z_p + \sqrt{\alpha^2 z_p^2 + 4} \right)^2,$$

که در آن z_p چندک P -ام توزیع SEC است. برای $\lambda = 0$ ،یعنی وقتی که $t_{0.5} = \beta$ ، $Z \sim EC(0, 1; g)$ همچنین اگر $Z \sim N(0, 1)$ برحسب z_p (صدک P -ام توزیع نرمال

استاندارد) به دست می‌آید.

۴.۴ حالت خاصی از توزیع BS تعمیم یافته

مضاعف: توزیع $SN - BS$

مدل چوله-نرمال در دهه اخیر به طور گسترده مورد مطالعه قرار

گرفته است. در بسیاری از مسائل عملی ممکن است آماردان با

جامعه تک-مدی روبرو شود که توزیع آن نرمال نباشد ولی به

توزیع نرمال بسیار نزدیک باشد. برای جزئیات بیشتر به آلزینی [۲]

مراجعه کنید. مدل BS توسط ویلکا و لیوا [۳۱] با استفاده ازمدل SN تعمیم داده شد. در اینجا این تعمیم را $SN - BS$ می‌نامیم.به وسیله رابطه تصادفی ساده‌ای توزیع SN به $SN - BS$ تبدیل

می‌شود. بنابراین به سادگی می‌توان از این توزیع عدد تصادفی

تولید کرد، گشتاورهای آن را محاسبه کرد و برآوردهای ML رابه دست آورد. مدل $SN - BS$ در بین تعمیم‌های مدل BS مورد

توجه ویژه‌ای قرار گرفته است. در این قسمت به معرفی این توزیع

قضیه ۶.۴. فرض کنید $T \sim GBS''(\alpha, \beta; g, \lambda)$ ، تابع توزیعتجمعی آن، F تابع توزیع داده شده در (۱۵) و F_Z تابع توزیعتجمعی متغیر Z در (۱۴) باشد. تابع قابلیت اعتماد و نرخ خطر T

به ترتیب به صورت زیر است

$$R_T(t; \alpha, \beta, \lambda) = 1 - F_Z(a_t(\alpha, \beta), \lambda),$$

$$h_T(t; \alpha, \beta, \lambda) = 2f(a_t(\alpha, \beta)) \left(\frac{F(\lambda a_t(\alpha, \beta))}{1 - F_Z(a_t(\alpha, \beta), \lambda)} \right) \frac{d}{dt} a_t(\alpha, \beta).$$

اثبات. با استفاده از قضیه ۴.۴ و تعریف تابع قابلیت اعتماد و نرخ

□

خطر اثبات می‌شود.

می پردازیم و خاصیت جالبی که ارتباط آن با توزیع BS است بیان می کنیم. اگر متغیر تصادفی Z دارای توزیع SN با پارامتر چولگی $\lambda \in \mathbb{R}$ باشد آن را با نماد $Z \sim SN(\lambda)$ نشان می دهیم. اگر Z در رابطه (۱۶) دارای توزیع چوله-نرمال باشد، متغیر تصادفی T دارای توزیع $SN - BS$ است. در این حالت با استفاده از قضیه ۷،

pdf متغیر تصادفی T به صورت زیر می باشد

$$f_T(t) = 2\phi(a_t(\alpha, \beta))\Phi(\lambda a_t(\alpha, \beta))A_t(\alpha, \beta); \quad t > 0,$$

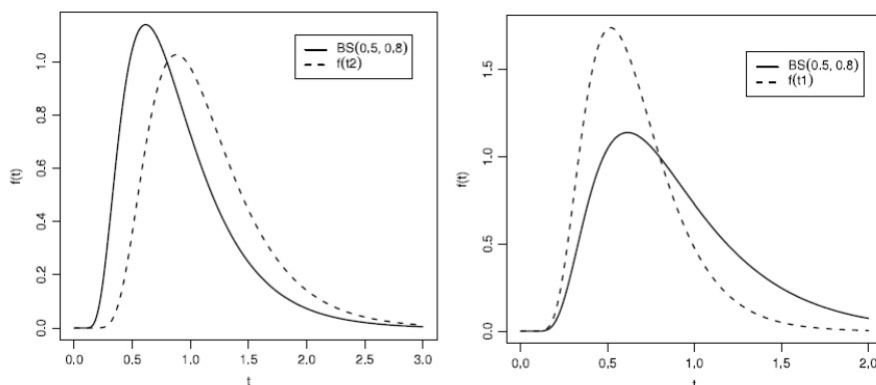
که در آن $a_t(\alpha, \beta) = \frac{1}{\alpha} \left[\sqrt{\frac{t}{\beta}} - \sqrt{\frac{\beta}{t}} \right]$ و $A_t(\alpha, \beta) = \frac{d}{dt} = \frac{t+\beta}{2\alpha\sqrt{\beta t^3}}$ cdf $\Phi(\cdot)$ نرمال استاندارد است. انگیزه اصلی در نظر گرفتن $SN - BS$ این است که، با

توجه به قضیه ۷.۴ اگر $j = 1, 2$ ، $T_j \sim BS(\alpha, \beta)$ آن گاه $T_{(1)} = \min\{T_1, T_2\}$ و $T_{(2)} = \max\{T_1, T_2\}$ به ترتیب دارای توزیع $SN - BS(\alpha, \beta; -1)$ و $SN - BS(\alpha, \beta; 1)$

$$f_{T_{(1)}} = 2\phi(a_t(\alpha, \beta))\Phi(-a_t\alpha, \beta)A_t(\alpha, \beta); \quad t > 0,$$

$$f_{T_{(2)}} = 2\phi(a_t(\alpha, \beta))\Phi(a_t\alpha, \beta)A_t(\alpha, \beta); \quad t > 0,$$

در شکل ۸ چگالی $T_{(1)}$ ، $T_{(2)}$ و $T(\alpha, \beta)$ نشان داده می شود. همان طور که مشاهده می شود، چگالی $T_{(1)}$ در برآزش صدک های پایین توزیع بهتر از BS عمل می کند.



شکل ۸: نمودار چگالی های توزیع BS و توزیع های $T_{(1)}$ (راست) و $T_{(2)}$ (چپ)

۵ کاربرد توزیع GBS

چگالی، توزیع، چندک، قابلیت اعتماد، نرخ خطر توزیع های GBS و مولدهای عدد تصادفی این مدل ها در بسته $gbs1.0$ اجرا می شوند. به علاوه نقطه تغییر نرخ خطر GBS نیز در بسته $gbs1.1$ قابل محاسبه است.

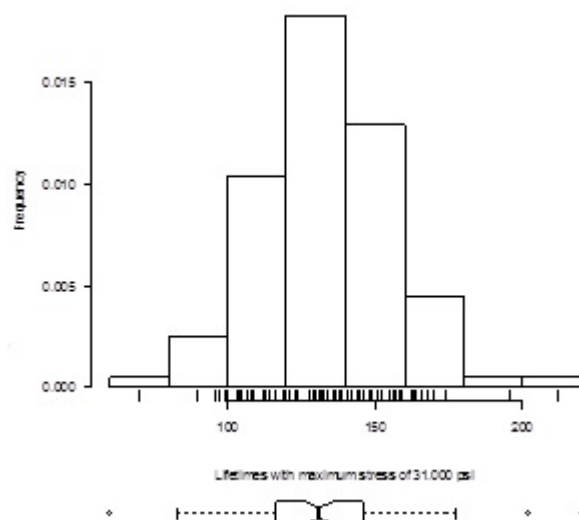
مثال ۱.۵. استنتاج داده ها: در این مثال از داده های بیرنهام و ساندرز [۸.۹] استفاده شده است. این مجموعه داده ها از جنبه های مختلف با فرض توزیع BS مورد بررسی قرار گرفته اند. با استفاده از روش های نیکویی برآزش و انتخاب مدل، نشان داده می شود که توزیع GBS برآزش داده شده بر داده ها بهتر از توزیع BS عمل می کند. همچنین با انتخاب بهترین مدل، استنباط هایی در مورد مشخصه های طول عمر توزیع GBS انجام می شود. خلاصه ای از اطلاعات در مورد این مجموعه داده ها در جدول ۳ ارائه شده است. در شکل ۹ نمودار جعبه ای و هیستوگرام داده ها نشان داده شده

بسته gbs در نرم افزار R توسط باروس و همکاران^{۳۵} [۷] ارائه شد. این بسته در $CRAN$ در دسترس قرار گرفته است و دو نسخه $gbs1.0$ و $gbs1.1$ از آن وجود دارد. توزیع های لاپلاس، لجستیک، نرمال و t در نرم افزار R قابل اجرا می باشند. توزیع های کاتز و پیرسون نوع VII نیز در بسته gbs اجرا می شوند. به علاوه مقادیر مدل های متقارن در این بسته موجود است. مدل های GBS از هسته های توزیع های متقارن مختلف تولید می شوند. به ویژه بسته gbs چندین حالت خاص از توزیع های GBS را اجرا می کند. از جمله آن ها هسته های کوشی، نوع-کاتز، لاپلاس، لجستیک، نرمال، پیرسون نوع VII و t می باشد. توزیع های GBS تولید شده توسط این هسته ها به ترتیب $BS-Lap$ ، $BS-tBS-KT$ ، $BS-Cau$ ، $BS-Logis$ ، $BS-PVII$ و GBS نامیده می شوند. توابع

است. همان‌طور که مشاهده می‌کنیم، توزیع اندکی چوله به راست *GBS* درجات کشیدگی و چولگی این داده‌ها را نشان می‌دهد. است ($CS = 0.33$) و کشیدگی متعادل دارد ($CK = 0.97$). مدل

جدول ۳: آمار توصیفی برای داده‌های *psi31*

<i>Median</i>	<i>Mean</i>	<i>SD</i>	<i>CV</i>	<i>CS</i>	<i>CK</i>	<i>Range</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	<i>N</i>
133.0	133.73	22.36	17.02	0.33	0.97	142	70	212	101



شکل ۹: هیستوگرام و نمودار جعبه‌ای *psi31*

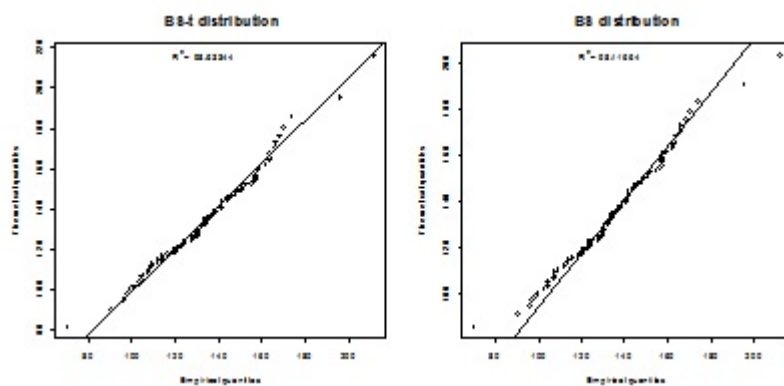
جدول ۴: آزمون SIC و KS بر اساس مدل‌های BS و GBS داده‌های $psi31$

توزيع	SIC	$KS(P - value)$
BS	٤.٥٧٣	$(P=٠.٤٥٩) ٠.٠٨٥$
$GBS - t_8$	٤.٥٥٧	$(P=٠.٠٦٤) ٠.٠٦٤$

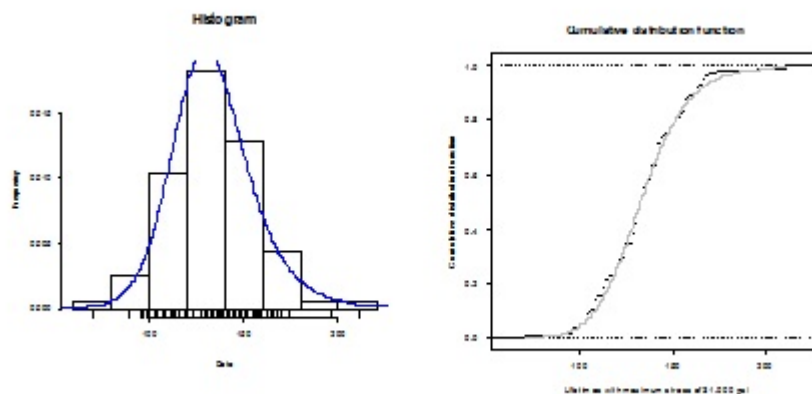
نیکویی برازش: در این قسمت انتخاب بهترین مدل، براساس سه معیار صورت گرفته است. نمودار QQ ، آزمون کلموگروف-اسمیرنوف (KS) و معیار اطلاع شوارتز (SIC). این مقادیر برای داده‌های $psi31$ تحت فرض توزیع BS و $GBS - t$ در جدول ۴ خلاصه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، مدلی که برازش بهتری بر داده‌ها دارد، توزیع GBS - است. شکل ۱۰ نمودارهای QQ مدل‌های BS و $GBS - t_\nu$ داده‌های $psi31$ را نشان می‌دهد.

تحلیل‌های طول عمر: همان‌طور که مشاهده می‌شود در شکل ۱۱ انسجام بین تابع توزیع تجربی و تئوری $BS - t_8$ نمایان است.

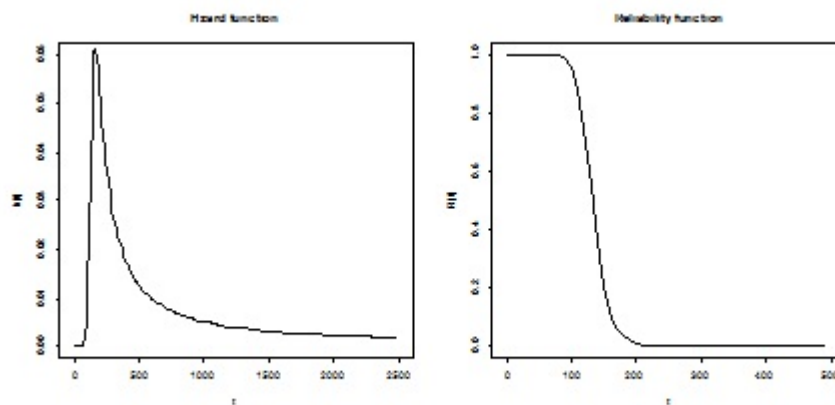
تحلیل‌های طول عمر در بسته gbs با استفاده از فرمان‌های $rfgbs()$



شکل ۱۰: نمودارهای QQ مدل های BS (راست) و $BS - t_8$ (چپ) داده های $psi31$



شکل ۱۱: cdf تجربی و تئوری $BS - t_8$ (راست) و هیستوگرام به همراه pdf برآورد شده $BS - t_8$ (چپ) برای $psi31$



شکل ۱۲: تابع قابلیت اعتماد برآورد شده (راست) و نرخ خطر (چپ) مدل $BS - t_8$ برای $psi31$

مراجع

- [1] Arellano, R. (1994). *Distribuições Elípticas: Propriedades, Inferência e Aplicações a Modelos de Regressão*. Unpublished Ph.D. Thesis, Sao Paulo University, Brazil (in Portuguese).
- [2] Azzalini, A. (1985). A Class of Distributions Which Includes the Normal Ones. *Scandinavian Journal of Statistics* **12**, 171-178.
- [3] Azzalini, A. and Dalla Valle, A. (1996). The Multivariate Skew-Normal Distribution. *Biometrika*, **83**, 715-726.
- [4] Azzalini, A. and Capitanio, A. (1999). Statistical Applications of the Multivariate Skew- Normal Distribution. *Journal Royal Statistical Society, Ser. B*, **61**, 579-602.
- [5] Balakrishnan, N. (1992). *Handbook of the Logistic Distribution*. Marcel Dekker, New York.
- [6] Barros, M. (2007). *Modelos de Regressão Birnbaum-Saunders Generalizados*. Unpublished Ph.D. thesis, Sao Paulo University, Brazil (in Portuguese).
- [7] Barros, M.; Paula, G. A. and Leiva, V. (2009). An R implementation for Generalized Birnbaum-Saunders Distributions. *Computational Statistics and Data Analysis* **53**, 1511-1528.
- [8] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). A New Family of Life Distributions. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 319-327.
- [9] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a Family of Life Distributions With Applications to Fatigue. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 328-347.
- [10] Branco, M. D. and Dey, D. K. (2001). A Class of Multivariate Skew-Elliptical Distributions. *Journal of Multivariate Analysis* **79**, 99-113.
- [11] Cramer, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, USA.
- [12] Desmond, A. (1985). Stochastic Models of Failure in Random Environments. *Canadian Journal of Statistics*, vol. **13**, pp. 171-183.
- [13] Diaz-Garcia, J. A. and Leiva, V. (2002). A New Family of Life Distributions Based on Birnbaum-Saunders Distribution. *Technical report I-02-17 (PE/CIMAT)*, Mexico.
- [14] Diaz-Garcia, J. A. and Leiva, V. (2005). A New Family of Life Distributions Based on Elliptically Contoured Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. **128**, pp. 445-457.
- [15] Diaz-Garcia, J. A.; Leiva, V. and Galea, M. (2002). Singular Elliptic Distribution: Density and Applications. *Communications in Statistics - Theory and Methods*, vol. **31**, pp. 665-681.

- [16] Fang, K. T. and Zhang, Y. T. (1990). *Generalized Multivariate Analysis*. Sciences Press, Beijing; Springer-Verlag, Berlin.
- [17] Fang, K.; Kotz, S. and Ng, K. (1990). *Symmetric Multivariate and Related Distributions*. Chapman, London.
- [18] Genton, M. G. (2004). *Skew-Elliptical Distributions and Their Applications*. Chapman and Hall/CRC, New York.
- [19] Guiraud, P.; Leiva, V. and Fierro, R. (2009). A Non-Central Version of The Birnbaum-Saunders Distribution for Reliability Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*.
- [20] Gupta, A. K. and Varga, T. (1993). *Elliptically Contoured Models in Statistics*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- [21] Johnson, N. L.; Kotz, S. and Balakrishnan, N. (1995). *Continuous Univariate Distributions*. Volume 2. Second edition. John Wiley sons, New York.
- [22] Kundua, D; Kannanb, N. and Balakrishnanc, N. (2008). On the hazard function of Birnbaum–Saunders distribution and associated inference. *Computational Statistics Data Analysis*, vol. 52, pp. 2692 – 2702.
- [23] Lange, K. L.; Little, J. A. and Taylor, M. G. J. (1989). Robust Statistical Modeling Using the t Distribution. *Journal of the American Statistical Association*, vol. 84, pp. 881-896.
- [24] Leiva, V. (1999). *Inference on the Coeficcient of Variation of Elliptic Populations*. Unpublished Ph.D. thesis, Granada University, Spain (in Spanish).
- [25] Leiva, V.; Riquelmeb, M.; Balakrishnanc, N. and Sanhuezad. A. (2008). Lifetime analysis based on the generalized Birnbaum–Saunders distribution. *Computational Statistics Data Analysis*, vol. 52, pp 2079 – 2097.
- [26] Leiva, V.; Sanhueza, A. and Angulo, J. M. (2009). A Length-Biased Version of the Birnbaum-Saunders Distribution With Application in Water Quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. 23(3).
- [27] Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions-Structure of Non-parametric, Semiparametric, and Parametric Families*. Springer, New York.
- [28] Osorio, F.; Paula, G. A. and Galea, M. (2007). Assessment of Local Influence in Elliptical Linear Models With Longitudinal Structure. *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. 51, pp. 4354-4368.
- [29] Owen, W. J. and Padgett, W. J. (2000). A Birnbaum-Saunders Accelerated Life Model. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. 49, pp. 224-229.

- [30] Savalli, C.; Paula, G. A. and Cysneiros, F. J. A. (2006). Assessment of Variance Components in Elliptical Linear Mixed Models. *Statistical Modelling*, vol. **6**, pp. 59-76.
- [31] Vilca-Labra, F. and Leiva, V. (2006). A New Fatigue Life Model Based on the Family of Skew-Elliptical Distributions. *Communications in Statistics Theory and Methods*, vol. **35**, pp. 229-244.
- [32] Volodin, I. N. and Dzhungurova, O. A. (2000). On Limit Distribution Emerging in the Generalized Birnbaum-Saunders Model. *Journal of Mathematical Science*, vol. **99**, pp. 1348-1366.