

## روش‌های برآوردهای پارامترها در توزیع بیرنبا姆-ساندرز

زنب آقاباز<sup>۱</sup>، محمدحسین علامتساز<sup>۲</sup>

چکیده:

برآوردهای پارامترها با توجه به ماهیت توزیع‌های آماری همیشه به‌سادگی میسر نیست. به‌ویژه برآوردهای پارامترهای توزیع بیرنبا姆-ساندرز با روش‌های متفاوت با مشکلاتی مواجه است. در این مقاله روش‌های مختلف برآوردهای پارامترهای توزیع بیرنبا姆-ساندرز<sup>۳</sup> معرفی می‌شود. برآوردهای پارامترهای این مدل عمر فرسودگی<sup>۴</sup> به چهار روش امکان‌پذیر است. روش اول روشی گرافیکی است که تکنیک نموداری ساده‌ای مبتنی بر نمودار احتمال است و برای برآوردهای پارامترها و بررسی نیکوبی بازش زمان‌های شکست ناشی از فرسودگی به‌خوبی عمل می‌کند. در این مقاله همچنین برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی و برآوردهای گشتاوری اصلاح شده<sup>۵</sup> مورد مطالعه قرار گرفته است. روش دیگر، برآوردهای پارامترها به‌شیوه‌ی جکنایف است که برای اندازه نمونه کوچک مناسب‌تر است. در پایان کارایی این برآوردهای گشتاوری اصلاح شده، برآوردهای جکنایف، شبیه‌سازی مونت-کارلو.

**واژه‌های کلیدی:** برآوردهای ماکسیمم درست‌نمایی، برآوردهای گشتاوری اصلاح شده، برآوردهای جکنایف، شبیه‌سازی مونت-کارلو.

### ۱ مقدمه

کرد. سپس این تحقیقات توسط جانسون و همکاران<sup>۷</sup> (۱۹۹۵) و مارشال و الکین<sup>۸</sup> (۲۰۰۷) ادامه یافت. در دهه گذشته تعمیم‌های مختلفی از توزیع BS مطرح شده است. براساس ایده‌های دیازگارسیا و لیوا<sup>۹</sup> (۲۰۰۵)، ویلکا-لبرا و لیوا<sup>۱۰</sup> (۲۰۰۶) تعمیم بزرگتری از توزیع BS براساس توزیع‌های بیضوی و چوله بیضوی به‌دست آمده است. براساس این تعمیم‌ها، توزیع‌هایی با انعطاف‌پذیری زیاد از نظر کشیدگی و تقارن به‌دست آمد. دیگر صورت‌هایی توزیع BS براساس توزیع‌های

توزیع بیرنبا姆-ساندرز دو پارامتری (BS) به عنوان مدلی برای توصیف زمان شکست ناشی از فرسودگی معرفی شده است. در فرآیند فرسودگی، شکست بر اثر رشد و افزایش ترک‌های موجود در مواد رخ می‌دهد. دزموند<sup>۶</sup> (۱۹۸۶) نیز این مدل‌سازی را براساس مدل‌های بیولوژیکی کرامر به‌دست آورد. او همچنین فرضیات بیرنبا姆 و ساندرز (۱۹۶۹) را بهبود بخشید و رابطه این توزیع با توزیع گوسین معکوس را بیان

<sup>۱</sup> کارشناس ارشد آمار، گروه آمار دانشگاه اصفهان

<sup>۲</sup> عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه اصفهان

<sup>۳</sup> Birnbaum-Saunders distribution

<sup>۴</sup> Fatigue life

<sup>۵</sup> Modified moment estimator

<sup>۶</sup> Desmond

<sup>۷</sup> Johnson et al.

<sup>۸</sup> Marshall and Olkin

<sup>۹</sup> Diaz-Garcia and Leiva

<sup>۱۰</sup> Vilca-Labra

برآورده می‌شود. آزمون نیکویی برازش نشان می‌دهد به چه میزان داده‌ها از خط راست پیروی می‌کنند. این روش برای داده‌های سانسور شده نیز کاربرد دارد. با استفاده از نتایج تحلیل‌های رگرسیونی می‌توان فواصل اطمینان تقریبی، شبیه و عرض از مبدأ خط برازش داده شده را بدست آورد. حدود اطمینان بهمنظور ساختن فواصل اطمینان برای پارامترها به کار می‌رود. ابتدا لازم است نحوه یافتن نمودار احتمال توزیع BS شرح داده شود. این روش توسط چانگ و تانگ<sup>۱۲</sup> (۱۹۹۴) ارائه شد.

نمودار احتمال فواید زیادی در کاربردهای مختلف دارد و به‌سادگی قابل تفسیر است. چانگ و تانگ نمودار احتمال توزیع BS را به صورت زیر به‌دست آورده‌اند. cdf توزیع BS که در معادله (۱) داده شده است را در نظر بگیرید. در این صورت داریم

$$t = \beta + \alpha \sqrt{\beta} \sqrt{t} \Phi^{(-1)}(F), \quad (2)$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، یافتن تابعی خطی بر حسب  $t$  که لازمه نمودار احتمال است، اگر غیرممکن نباشد بسیار دشوار است. این مشکل را با در نظر گرفتن معادله زیر رفع می‌کنیم

$$P = \sqrt{t} \Phi^{(-1)}(F), \quad (3)$$

و نتیجه آن تابعی خطی به‌فرم  $y = ax + b$  است، که در آن  $t$  محور عمودی و  $P$  محور افقی است. یعنی به عبارتی داریم

$$t = \beta + \alpha \sqrt{\beta} P, \quad (4)$$

فرض کنید زمان  $n$  شکست را به صورت  $t_1, \dots, t_n$  داشته باشیم. با رسم  $t_i$  در مقابل  $P_i$  و با در نظر گرفتن  $(\Phi(F(t_i)))$ ، برآمد آن تقریباً خط راستی است که زمان‌های شکست دارای توزیع BS می‌باشد. پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  را می‌توان از روش حداقل مربعات به‌دست آورد. با

برآورده عرض از مبدأ  $a$  و شبیه  $b$  داریم

$$\hat{\beta} = \hat{a}, \quad \hat{\alpha} = \frac{\hat{b}}{\sqrt{\hat{a}}}, \quad (5)$$

نکته با اهمیت این است که، با استفاده از روش‌های رگرسیونی به‌آسانی و بدون برقراری فرض نرمال بودن می‌توان فواصل اطمینان برای  $a$  و  $b$  را به‌دست آورد. با استفاده از روش حداقل مربعات مشاهده می‌شود، تابعی صعودی از  $b$  و تابعی نزولی از  $a$  است. به علاوه برای هر مقدار ثابت  $a$ ، به‌طور یکنوا بر حسب  $b$  تعیین می‌شود. از طرفی می‌توان نوشت

$$\{\underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \underline{b} \leq b \leq \bar{b}\} \implies \{\underline{a} \leq a \leq \bar{a}\}$$

چوله توسط لیوا و همکاران (۲۰۰۹)<sup>۱۱</sup> به‌دست آمد. گوی راد و همکاران در مدل‌سازی موقعیت‌هایی که رشد و گسترش ترک‌ها میانگین غیر ثابتی طی زمان دارد، به کار می‌رود. تابع توزیع تجمعی توزیع BS به صورت زیر است

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi\left(\frac{1}{\alpha}\left[\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{\alpha}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]\right); t > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (1)$$

که در آن  $\Phi$  تابع توزیع تجمعی (cdf) نرمال استاندارد و  $\beta$  و  $\alpha$  به‌ترتیب پارامترهای شکل و مقیاس‌اند.

تابع چگالی این توزیع تک مدی است و نرخ خطر آن وانی شکل معکوس است. یعنی ابتدا تا نقطه تغییر نرخ خطر صعودی و سپس نزولی است.

برآوردهای ML این توزیع توسط بیرنبا姆 و ساندرز (۱۹۶۹) و توزیع مجانية آنها توسط انگل‌هارت و همکاران (۱۹۸۱) به‌دست آمد. اگرچه برآوردهای ML خواص بهینه دارند، اما برای یافتن آنها باید معادله‌ای غیرخطی بر حسب  $\beta$  را حل کنیم. برای حل این معادله نیاز به روش‌های عددی است. به‌این ترتیب توزیع دقیق MLE‌ها قابل تعیین نیست و برای تعیین فواصل اطمینان پارامترهای مجھول لازم است از توزیع تقریبی آنها استفاده کنیم. برآوردهای گشتاوری این توزیع به‌سادگی به‌دست نمی‌آیند و ممکن است همیشه موجود نباشند و یا حتی اگر موجود باشند ممکن است یکتا نباشند. برآوردهای گشتاوری اصلاح شده توزیع BS توسط انجی و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد. این برآوردهای به‌سادگی قابل محاسبه‌اند، فرم صریحی براساس مشاهدات نمونه دارند و برخلاف برآوردهای گشتاوری به‌طور یکتا وجود دارند. توزیع مجانية آنها برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای مجھول به کار می‌رود. کارایی این برآوردهای با شبیه‌سازی مونت-کارلو قابل ارزیابی است.

## ۲ برآوردهای پارامترها به روش گرافیکی

در این قسمت تکنیک گرافیکی ساده‌های برای استنباط پارامترهای این توزیع ارائه می‌شود. این ایده در واقع همان نمودار احتمال است و پارامترها از طریق عرض از مبدأ و شبیه خط برازش داده شده بر داده‌ها

<sup>11</sup> Guirad et al.

<sup>12</sup> Chang and Tang

بنابراین  $(\circ)$  است. MLE پارامتر  $\beta$  که با  $\hat{\beta}$  نشان می‌دهیم از حل تنها ریشه مثبت معادله زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \beta^2 - \beta \left[ \frac{2n}{\sum_{i=1}^n t_i^{-1}} + \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1}} + \right. \\ \left. \frac{n}{\sum_{i=1}^n t_i^{-1}} \left[ \frac{n}{\sum_{i=1}^n (\beta + t_i)^{-1}} + \frac{\sum_{i=1}^n t_i}{n} \right] \right] = 0, \end{aligned}$$

با درنظرگرفتن روابط بیان شده داریم

$$\beta^2 - \beta [2r + k(\beta)] + r[s + k(\beta)] = 0, \quad (8)$$

برآورد ماکسیمم درستنمایی  $\alpha$  نیز به‌سادگی به‌صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{\alpha} = \left[ \frac{s}{\bar{r}} + \frac{\hat{\beta}}{r} - 2 \right]^{1/2},$$

انگل‌هارت (۱۹۸۱) نشان داد  $\hat{\beta}$  و  $\hat{\alpha}$  دارای توزیع مجانی نرمال دومتغیره است و داریم

$$\begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{rn} & 0 \\ 0 & \frac{\beta^2}{n(0.25 + \alpha^{-2} + I(\alpha))} \end{pmatrix} \right], \quad (9)$$

که در آن

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \{[1 + \xi^{-1}(\alpha z)]^{-1} - 0.5\}^2 d\Phi(z),$$

برای اثبات این ادعا معادله زیر را در نظر بگیرید

$$\xi(t) = t^{1/2} - t^{-1/2}, \quad (10)$$

به‌این‌ترتیب تابع چگالی (۷) به‌صورت زیر خواهد بود

$$f(t; \alpha, \beta) = (\alpha \beta)^{-1} (2\pi)^{-1/2} \xi' \left( \frac{t}{\beta} \right) \exp \left[ - (2\alpha^2)^{-1} \xi^2 \left( \frac{t}{\beta} \right) \right]. \quad (11)$$

با مشتق گرفتن از لگاریتم معادله (۱۱) نسبت به  $\alpha$  و  $\beta$  داریم

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \ln f(t; \alpha, \beta) = \alpha^{-2} \left\{ \alpha^{-2} \left[ \left( \frac{t}{\beta} \right) + \left( \frac{t}{\beta} \right)^{-1} - 2 \right] - 1 \right\}, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \ln f(t; \alpha, \beta) = \beta^{-1} \left\{ -2^{-1} + 2^{-1} \alpha^{-2} \times \left[ \left( \frac{t}{\beta} \right) + \left( \frac{t}{\beta} \right)^{-1} \right] + \left[ \left( \frac{t}{\beta} \right) + 1 \right]^{-1} \right\}, \quad (13)$$

برای سادگی معادلات (۱۲) و (۱۳) را به‌ترتیب به‌صورت

$G_2(t; \alpha, \beta)$  و  $G_1(t; \alpha, \beta)$  نشان می‌دهیم. همچنین می‌توان نتیجه

$z = t$  دارای تابع چگالی (۱۱) باشد، آنگاه

گرفت اگر  $t$  دارای توزیع نرمال استاندارد است. به عبارت دیگر

$t = \alpha^{-1} \xi(t/\beta)$ ، که در آن  $\xi$  معکوس تابع  $\xi$  است. در این صورت

با استفاده از خواص مجموعه‌ها داریم

$$\begin{aligned} P[\underline{\alpha} \leq \alpha \leq \bar{\alpha}] &\geq P[\underline{a} \leq a \leq \bar{a}, \underline{b} \leq b \leq \bar{b}] \\ &\geq 1 - P[\{a \leq a \leq \bar{a}\}^c] - P[\{b \leq b \leq \bar{b}\}^c] \\ &= (1 - \gamma_1 - \gamma_2) \end{aligned}$$

بنابراین فاصله اطمینان تقریبی در سطح  $(1 - \gamma_1 - \gamma_2) \times 100\%$  برای پارامتر  $\alpha$  به‌صورت زیر است

$$[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}] = \left[ \frac{b}{\sqrt{a}}, \frac{\bar{b}}{\underline{a}} \right] \quad (6)$$

با استفاده از شیوه‌های رگرسیونی  $[\underline{a}, \bar{a}]$  و  $[\underline{b}, \bar{b}]$  فواصل اطمینان تقریبی به‌ترتیب در سطح‌های  $(1 - \gamma_1) \times 100\%$  و  $(1 - \gamma_2) \times 100\%$  برای  $a$  و  $b$  هستند. در ادامه مثالی برای بررسی نحوه این عملکرد این روش بیان می‌شود.

### ۳ برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی

برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی پارامترهای توزیع  $BS$  به‌وسیله بیرنبا姆 و ساندرز و توزیع مجانی آن‌ها توسط انگل‌هارت (۱۹۸۱) به‌دست آمد. اگرچه  $MLE$  ها دارای خواص بهینه‌اند، اما برای یافتن آن‌ها باید معادله غیر خطی برحسب را حل کنیم. بیرنبا姆 و ساندرز چندین راهکار مفید برای حل این معادله ارائه دادند. به‌دلیل پیچیدگی این معادله توزیع دقیق  $MLE$  ها قابل تعیین نیست. بنابراین برای به‌دست آوردن فاصله اطمینان پارامترهای مجھول لازم است توزیع تقریبی آن‌ها را بدانیم.

رفتار این فواصل اطمینان تقریبی برای اندازه نمونه کوچک معلوم نیست و نیاز به بررسی‌های بیشتر دارد. فرض کنید  $t_n, \dots, t_1$  نمونه‌ای تصادفی به حجم  $n$  از توزیع  $BS$  با تابع چگالی احتمال ( $pdf$ ) زیر باشد

$$f_T(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp \left( -\frac{1}{2\alpha^2} \left[ \frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2 \right] \right) \frac{t^{-\frac{1}{2}} [t + \beta]}{2\alpha\sqrt{\beta}}, \quad (7)$$

می‌دانیم میانگین‌های حسابی و هارمونیک به‌صورت زیر محاسبه می‌شوند

$$s = 1/n \sum_{i=1}^n t_i, \quad r = [1/n \sum_{i=1}^n t_i^{-1}]^{-1}$$

فرض کنید تابع میانگین هارمونیک  $k$  را به‌صورت زیر تعریف کنیم

$$k(x) = [1/n \sum_{i=1}^n (x + t_i)^{-1}]^{-1}; x > 0.$$

(MME) اولین پیشنهاد برای برآورد  $\alpha$  و  $\beta$  هستند. آن‌ها به راحتی قابل محاسبه‌اند و فرم صریحی بر حسب مشاهدات نمونه دارند. برخلاف برآوردهای گشتاوری، برآوردهای گشتاوری اصلاح شده به طور یکتا وجود دارند. این برآوردها توسط انجی و همکاران (۲۰۰۳) معرفی شد. توزیع مجانی MME ها برای ساختن فواصل اطمینان برای پارامترهای مجهول به کار می‌روند. برای به دست آوردن برآوردهای گشتاوری معمول به ویژه در حالت دوپارامتری، گشاورهای اول و دوم جامعه را متناظر با گشتاورهای نمونه‌ای قرار می‌دهیم. این برآوردها با حل معادلاتی بر حسب  $\alpha$  و  $\beta$  به دست می‌آیند. می‌توان نشان داد اگر ضریب تغییرات نمونه بیشتر از  $\sqrt{5}$  باشد، برآوردهای گشتاوری وجود ندارد و اگر ضریب تغییرات نمونه از  $\sqrt{5}$  کوچکتر باشد، برآوردهای گشتاوری وجود دارد، اگرچه ممکن است برآوردهای گشتاوری  $\beta$  یکتا نباشد. فرض کنید  $T \sim BS(\alpha, \beta)$  و تبدیل یکنواز زیر را در نظر بگیرید

$$X = \frac{1}{2}[(\frac{T}{\beta})^{1/2} - (\frac{T}{\beta})^{-1/2}] \quad (17)$$

و نیز داریم

$$T = \beta(1 + 2X^2 + 2X(1 + X^2)^{\frac{1}{2}}).$$

تابع توزیع متغیر تصادفی  $T$  را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$F_T(t; \alpha, \beta) = \Phi(\frac{1}{\alpha}[(\frac{t}{\beta})^{1/2} - (\frac{\beta}{t})^{1/2}]); \quad t > 0, \alpha, \beta > 0 \quad (18)$$

حال از (۱۷) و (۱۸) می‌توان نتیجه گرفت که  $X$  دارای توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس  $\alpha^2/\beta^2$  است. با به کارگیری این تبدیل، اميد ریاضی و واریانس به راحتی به دست می‌آید

$$E(T) = \beta(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \quad (19)$$

$$Var(T) = (\alpha\beta)^2(1 + \frac{5}{4}\alpha^2), \quad (20)$$

به علاوه اگر  $T$  دارای توزیع  $BS$  با پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  باشد، آنگاه  $T^{-1}$  نیز دارای توزیع  $BS$  با پارامترهای  $\alpha^{-1}$  و  $\beta^{-1}$  است. این مطلب با اعمال تبدیل مناسب و با استفاده از (۱۸) به سادگی اثبات می‌شود. با توجه به این ویژگی توزیع  $BS$  با استفاده از (۱۹) و (۲۰) داریم

$$E(T^{-1}) = \beta^{-1}(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \quad (21)$$

$G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$  و  $G_1(t; \alpha, \beta)$  به ترتیب به صورت (۱) و (۱)  $\beta^{-1}G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$  خواهد بود.

حال برای به دست آوردن ماتریس اطلاع فیشر فرض کنید  $.j = 1, 2, B_{ij}(\alpha, \beta) = E[G_i(t; \alpha, \beta)G_j(t; \alpha, \beta)]$  به سادگی می‌توان نشان داد شرایط نظم برای تابع چگالی (۱۱) برقرار است و به این ترتیب  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  دارای توزیع مجانی نرمال با میانگین‌های  $\alpha$  و  $\beta$  ماتریس کواریانس مجانی<sup>۱۳</sup> است و داریم

$$B_{11}(\alpha, \beta) = \alpha^{-2}E(Z^2 - 1)^2 = 2\alpha^{-2}. \quad (14)$$

به علاوه برای هر  $\alpha$  و  $\beta$  ثابت معادله زیر تابع فردی از  $z$  است.

$$G_1(t; \alpha, \beta)G_2(t; \alpha, \beta) = \beta^{-1}G_1(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)G_2(\xi^{-1}(\alpha z); \alpha, 1)$$

و از آنجایی که توزیعی حول صفر متقابران است داریم

$$B_{12}(\alpha, \beta) = B_{21}(\alpha, \beta) = 0. \quad (15)$$

حال عضو دیگر ماتریس کواریانس به صورت زیر به دست می‌آید

$$B_{22}(\alpha, \beta) = \int_0^\infty G_2^2(t; \alpha, \beta)f(t; \alpha, \beta)dt$$

که با ساده کردن به صورت زیر در می‌آید

$$B_{22}(\alpha, \beta) = \beta^{-2}[1/4 + \alpha^{-2} + I(\alpha)] \quad (16)$$

که در آن

$$I(\alpha) = 2 \int_0^\infty \{[1 + \xi^{-1}(\alpha z)]^{-1} - 1/5\}^2 d\Phi(z)$$

و ماتریس واریانس-کواریانس به صورت زیر به دست می‌آید

$$\|nB_{ij}(\alpha, \beta)\|^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{\gamma n} & \cdots \\ \cdots & \frac{\beta^2}{n(\alpha^2/25 + \alpha^{-2} + I(\alpha))} \end{pmatrix}$$

به این ترتیب رابطه (۹) برقرار است. نکته دیگر در اینجا استقلال مجانی  $\hat{\alpha}$  و  $\hat{\beta}$  است. فاصله اطمینان مجانی برای  $\alpha$  به سادگی از (۹) به دست می‌آید. به علاوه فاصله اطمینان مجانی  $\beta$  به ازای مقادیر  $\alpha$  مفروض از (۹) قابل محاسبه است.

## ۴ برآوردهای گشتاوری تعدیل یافته

برآوردهای گشتاوری به سادگی قابل محاسبه نیستند و ممکن است همیشه وجود نداشته باشند و یا حتی اگر موجود باشند، ممکن است یکتا نباشند. برای حل این مشکل برآوردهای گشتاوری اصلاح شده<sup>۱۳</sup> (

<sup>۱۳</sup>Modified Moment estimator

که در آن

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{11} = Var(T) = (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}}(1 + \frac{\delta}{4}\alpha^2),$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = \sigma_{21} &= Cov(T, T^{-1}) \\ &= E(1) - E(T)E(T^{-1}) = 1 - (1 + \frac{1}{4}\alpha^2)^{-1} \end{aligned}$$

$$\sigma_{22} = Var(T^{-1}) = \alpha^2\beta^{-2}(1 + \frac{\delta}{4}\alpha^2),$$

حال لازم است توزیع توان مجانی زیر را به دست آوریم

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(S, R) \\ f_2(S, R) \end{bmatrix}$$

که در آن

$$f_1(x, y) = \{2[(\frac{x}{y})^{1/2} - 1]\}^{1/2}, \quad f_2(x, y) = (xy)^{1/2}$$

با استفاده از قضیه کرامر داریم

$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} - \alpha \\ \tilde{\beta} - \beta \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \tilde{\Sigma} \right]$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Sigma} &= \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right) \Sigma \left( \begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{array} \right) \Bigg|_{x=E(T), y=E(T^{-1})}, \\ &= \begin{pmatrix} \alpha^2/2 & \circ \\ \circ & (\alpha\beta)^{\frac{1}{2}} \left( \frac{1+\alpha^2/4}{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2} \right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

که با محاسبه مشتقهای زیر به دست می‌آید

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} \Big|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{1}{2\alpha\beta},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} \Big|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{\beta}{2\alpha},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} \Big|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = \frac{1}{2+\alpha^2},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} \Big|_{x=E(T), y=E(T^{-1})} = -\frac{\beta}{2+\alpha^2},$$

$$Var(T^{-1}) = \alpha^2\beta^{-2}(1 + \frac{\delta}{4}\alpha^2), \quad (22)$$

برای به دست آوردن برآوردهای گشتاوری اصلاح شده به جای استفاده از معادلات (۱۹) و (۲۰) از معادلات (۲۱) و (۲۲) استفاده می‌کنیم و آنها را با برآوردهای نمونه‌ای متناظر معادل قرار می‌دهیم. در این صورت دو معادله گشتاوری به صورت زیر خواهیم داشت

$$s = \beta(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \quad (23)$$

$$r^{-1} = \beta^{-1}(1 + \frac{1}{2}\alpha^2) \quad (24)$$

با حل این معادلات بر حسب  $\alpha$  و  $\beta$  برآوردهای گشتاوری اصلاح شده که با نماد  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  نشان می‌دهیم، به صورت زیر خواهد بود

$$\tilde{\alpha} = \{2[(\frac{s}{r})^{1/2} - 1]\}^{1/2}$$

$$\tilde{\beta} = (sr)^{1/2}.$$

نشان می‌دهیم توزیع مجانی  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  نرمال دومتغیره است. یعنی داریم

$$\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{\alpha^2}{n} & \circ \\ \circ & \frac{(\alpha\beta)^2}{n} \left( \frac{1+\alpha^2/4}{(1+\frac{1}{4}\alpha^2)^2} \right) \end{pmatrix} \right], \quad (25)$$

همان‌طور که مشاهده می‌شود  $\tilde{\alpha}$  و  $\tilde{\beta}$  همانند برآوردهای ماکسیمم درستنمایی به طور مجانی از یکدیگر مستقل‌اند. حال به اثبات رابطه (۲۵) می‌پردازیم. فرض کنید  $T_n, \dots, T_1, T$  متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع  $BS$  با چگالی (۷) باشند. متغیرهای تصادفی  $S$  و  $R$  را به صورت زیر در نظر بگیرید

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i, \quad R = [\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T_i^{-1}]^{-1},$$

با استفاده از قانون قوی اعداد بزرگ  $S$  و  $R^{-1}$  به طور قریب به یقین به ترتیب به  $E(T^{-1})$  و  $E(T)$  همگرا هستند. همچنین طبق قضیه حد مرکزی  $S$  و  $R^{-1}$  دارای توزیع مجانی نرمال‌اند. به این ترتیب هر ترکیب

خطی از آنها نیز دارای توزیع مجانی نرمال است. به عبارتی

$$aS + bR^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [aT_i + bT_i^{-1}],$$

برای هر مقدار  $a$  و  $b$  دارای توزیع مجانی نرمال است. بنابراین  $(S - R^{-1})'$  نیز دارای توزیع مجانی نرمال دومتغیره است. به ویژه

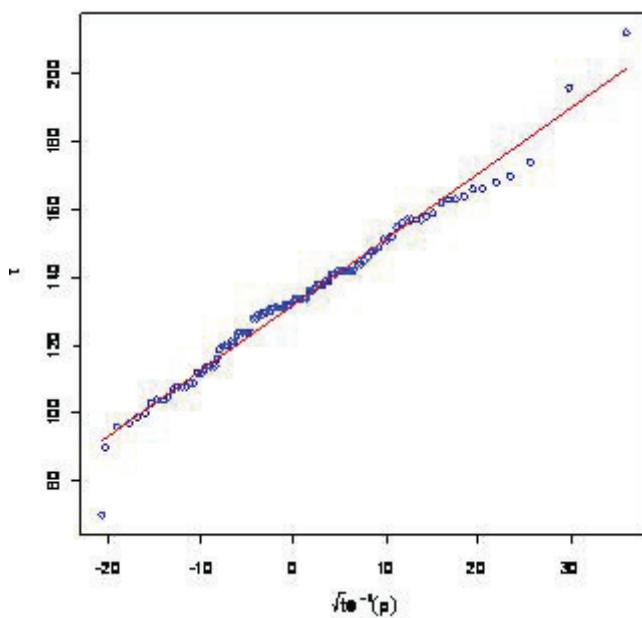
$$\sqrt{n} \begin{pmatrix} S - E(T) \\ R^{-1} - E(T^{-1}) \end{pmatrix} \sim N \left[ \begin{pmatrix} \circ \\ \circ \end{pmatrix}, \Sigma \right]$$

<sup>14</sup>Jackknife estimator

$BS$  را دارد. فرمان  $gmbs()$  در نرم‌افزار  $R$  برای برآورد پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  بهروش گرافیکی به کار می‌رود. برآورد این پارامترها برای داده‌های فرسودگی ورق‌های آلومینیومی که به وسیله بیرنبا姆 و ساندرز ارائه شده، به دست آمده است. این داده‌ها شامل  $n = 101$  مشاهده است که تحت بیشترین میزان استرس یعنی  $31000 \text{ psi}$  در  $18$  سیکل نوسانی به دست آمده است. این داده‌ها به صورت پیش فرض در بسته  $bs$  نرم‌افزار  $R$  به نام  $psi$  موجود است. برآورد  $\alpha$  و  $\beta$  و نمودار احتمال به روشن گرافیکی برای این داده‌ها به دست آمده است که در جدول ۱ و شکل ۱ ارائه شده است.

جدول ۱: برآورد  $\alpha$  و  $\beta$  بهروش گرافیکی

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$R^2$
۰.۱۶۸۶	۱۳۱.۹۲۲۴	۰.۹۷۷۲

شکل ۱: نمودار احتمال توزیع  $BS$  برای داده‌های  $psi$  ۳۱

همان‌طور که مشاهده می‌شود  $R^2 = ۰.۹۷۷$  است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت داده‌ها دارای توزیع  $BS$  می‌باشند. این آماره که  $R^2$  شاپیرو-ویلک نامیده می‌شود، روشی برای آزمون دوری از فرض‌های توزیعی است. در حقیقت معیاری برای درستی نمودار احتمال است و مقادیر کوچک آن نشان‌دهنده انحراف از توزیع می‌باشد. با استفاده از روش حداقل مربعات شیب و عرض از مبدأ و فواصل اطمینان برای پارامترها با استفاده از معادله (۵) به دست می‌آید. همچنین در کنار نتایج حاصل از داده‌های

## ۵ برآوردگرهای جکنایف

اساس برآوردگرهای جکنایف<sup>۱۴</sup> [حذف دنباله‌ای نقاط از نمونه و محاسبه MLE‌ها و MME‌ها با نمونه‌ای به اندازه  $n - 1$  است. با خارج کردن نقطه  $t_j$  از نمونه و محاسبه دوباره مقادیر  $r$  و  $s$  وتابع  $k$  داریم

$$s_{(j)} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n t_j = \frac{ns-t_j}{n-1},$$

$$r_{(j)} = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n t_j^{-1} \right]^{-1} = \frac{nr-t_j^{-1}}{n-1},$$

$$k_{(j)}(x) = \left[ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1, i \neq j}^n (x + t_j)^{-1} \right]^{-1} = \frac{nk(x)-(x+t_j)^{-1}}{n-1},$$

پس  $j$  با محاسبه ریشه یکتاً معادله زیر به دست می‌آید

$$\beta^* - \beta[2r_{(j)} + k_{(j)}(\beta)] + r_{(j)}[s_{(j)} + k_{(j)}(\beta)] = 0,$$

$$\hat{\alpha}_{(j)} = \left[ \frac{s_{(j)}}{\hat{\beta}_j} + \frac{\hat{\beta}_j}{r_{(j)}} - 2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

و نیز به‌طور مشابه داریم

$$\tilde{\alpha}_{(j)} = \left\{ 2 \left[ \frac{s_{(j)}}{r_{(j)}} \right]^{1/2} - 1 \right\}^{1/2},$$

$$\tilde{\beta}_{(j)} = (s_{(j)}r_{(j)})^{1/2}$$

و با درنظرگرفتن تعاریف زیر برآوردگرهای جکنایف به دست می‌آید

$$\hat{\beta}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\beta}_{(j)}, \quad \hat{\alpha}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \hat{\alpha}_{(j)},$$

$$\tilde{\beta}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\beta}_{(j)}, \quad \tilde{\alpha}_{(.)} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \tilde{\alpha}_{(j)},$$

همچنین برآوردگرهای ماکسیمم درستنمایی اریبی تصحیح شده جکنایف که با نماد  $JMLE$  نشان می‌دهیم به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\hat{\alpha}_J = n\hat{\alpha} - (n-1)\hat{\alpha}_{(.)}, \quad \hat{\beta}_J = n\hat{\beta} - (n-1)\hat{\beta}_{(.)},$$

برای جزئیات بیشتر به افرون<sup>۱۵</sup> (۱۹۸۲) مراجعه کنید.  $JMME$ ‌های

پارامترهای  $\alpha$  و  $\beta$  نیز به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$\tilde{\alpha}_J = n\tilde{\alpha} - (n-1)\tilde{\alpha}_{(.)}, \quad \tilde{\beta}_J = n\tilde{\beta} - (n-1)\tilde{\beta}_{(.)},$$

## ۶ بررسی دقیقت برآوردگرهای

ابتدا مثالی عددی برای چگونگی عملکرد برآوردگرهای گرافیکی بیان می‌شود. بسته  $bs$  در نرم‌افزار  $R$  قابلیت اجرای فرمان‌های توزیع

جدول ۲ خلاصه شده است. در ادامه برآوردهای حاصل از این روش را با برآوردهای ماکسیمم درستنمایی مقایسه می‌کنیم.

کامل نتایج مشابه با داده‌های سانسور شده از راست به دست آمده است که در آن از ۲۱ داده از داده‌های کامل صرف نظر شده است. برای هر دو دسته از داده‌ها  $R^2$  به دست آمده مقدار مشابهی دارد. نتایج حاصل در

جدول ۲ : برآوردهای حداقل مرباعات و فواصل اطمینان % ۹۰

داده‌ها	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$[\underline{\alpha}, \bar{\alpha}]$	$[\underline{\beta}, \bar{\beta}]$	$R^2$
داده‌های کامل	۰.۱۶۸۶	۱۳۱.۹	[۰.۱۶۳, ۰.۱۷۴]	[۱۳۱.۳, ۱۳۲.۵]	۰.۹۷۷
سانسور شده نوع II	۰.۱۷۵۰	۱۳۲.۵	[۰.۱۶۸, ۰.۱۸۲]	[۱۳۲.۰, ۱۳۳.۰]	۰.۹۶۵

$$\text{که در آن } h_2(x) = \frac{1+3/4x^2}{(1+1/2x^2)^2} \text{ است.}$$

از آنجایی که برخی از برآوردهای نا اربی هستند برای بررسی نحوه عملکرد آنها از معیار MSE استفاده شده است. از نتایج شبیه‌سازی واضح است که برای مقادیر مختلف نمونه و برای  $\alpha$  های نه‌چندان بزرگ MLE و MME ها عملکرد تقریباً یکسانی دارند. در محاسبات جداگانه که در مقاله نیامده است مشاهده شد که برآوردهای متوسط MLE و MME ها و انحراف استاندارد آنها به ازای  $\alpha$  های کمتر از ۰/۵، تا چهار رقم اعشار برهمنطبقاند. در نتیجه MSE این برآوردها نیز به ازای  $\alpha$  های کمتر از ۰/۵ تا چهار رقم اعشار برهمنطبقاند. همچنین مشاهده شد برای  $n$  های کوچک و  $\alpha$  های بزرگ میزان اربی زیاد است. با توجه به جدول ۳ واضح است MME ها و MML ها برای مقادیر کوچک  $\alpha$  تقریباً عملکرد یکسانی دارند و نیز مشاهده می‌کنیم با افزایش  $n$  میزان MSE کاهش میابد بهطوری که به ازای  $n = ۵۰, ۱۰۰$  و مقادیر  $\alpha$  کوچک تقریباً برابر صفر است. همچنین واضح است این برآوردهای برای مقادیر  $\alpha$  عملکرد بهتری دارد ولی بهطورکلی مقادیر میانگین توان دوم خطای برای مقادیر  $\alpha$  و  $\beta$  مفروض کم است و این نشان دهنده عملکرد نسبتاً خوب این برآوردهای است.

## تقدیر و تشکر

نویسنده‌گان مقاله از پیشنهادهای اصلاحی داوران محترم مقاله که باعث بهبود ارائه شد کمال تشکر و قدردانی را دارند.

## نتایج شبیه‌سازی مونت کارلو

برای مقایسه برآوردهای مذکور مطالعات شبیه سازی را برای اندازه‌های نمونه مختلف و مقادیر مختلف پارامترها انجام داده‌ایم. برای برآورد پارامترها به روش bs نرم افزار R وجود دارد. اندازه نمونه را بهصورت  $n = ۵, ۱۰, ۲۰, ۵۰, ۱۰۰$  و مقادیر پارامتر شکل را بهصورت  $\alpha = ۰, ۱, ۰/۲۵, ۰/۵, ۱, ۲$  است، مقدار ثابت  $\beta$  را بدون برهمن خوردن کلیت مسئله برابر ۱ اختیار می‌کنیم. همه نتایج براساس ۱۰۰۰۰ دوره به دست آمده و در جدول ۳ خلاصه شده است. با توجه به توزیع مجانی برآوردهای ماکسیمم درستنمایی و گشتاوری اصلاح شده، فواصل اطمینان % ۹۰ (۱ -  $\gamma$ ) برای  $\alpha$  و  $\beta$  بهترتیب بهصورت زیر خواهد بود

$$\left(\hat{\alpha}\left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1\right]^{-1}, \hat{\alpha}\left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1\right]^{-1}\right),$$

$$\left(\hat{\beta}\left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{nh_1(\hat{\alpha})}} + 1\right]^{-1}, \hat{\beta}\left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{nh_1(\hat{\alpha})}} + 1\right]^{-1}\right),$$

که در آن  $I(x) = ۰/۲۵ + x^{-2} + I(x)$  و  $h_1(x) = \sqrt{۰/۲۵ + x^{-2}}$  - این صدک توزیع نرمال استاندارد است. بهطور مشابه فواصل اطمینان % (۱ -  $\gamma$ ) برای  $\alpha$  و  $\beta$  براساس MME ها بهصورت زیر است

$$\left(\tilde{\alpha}\left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1\right]^{-1}, \tilde{\alpha}\left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{n}} + 1\right]^{-1}\right),$$

$$\left(\tilde{\beta}\left[\frac{z_{\gamma/2}}{\sqrt{nh_1(\hat{\alpha})}} + 1\right]^{-1}, \tilde{\beta}\left[\frac{z_{1-\gamma/2}}{\sqrt{nh_1(\hat{\alpha})}} + 1\right]^{-1}\right),$$

جدول ۳ : میانگین توان دوم خطأ (MSE) برآوردها براساس شبیه‌سازی مونت کارلو ( $\beta = 1/0$ )

N	$\alpha$	برآورد				برآورد			
		MLE	MME	JMLE	JMME	MLE	MME	JMLE	JMME
5	0.10	0.0012	0.0012	0.0014	0.0098	0.0020	0.0020	0.0020	0.0020
	0.25	0.0078	0.0078	0.0088	0.0088	0.0127	0.0127	0.0125	0.0125
	0.50	0.0299	0.0299	0.0355	0.0355	0.0517	0.0517	0.0495	0.0495
	1.00	0.1221	0.1220	0.1490	0.1484	0.2170	0.2170	0.1993	0.1921
	2.00	0.5291	0.5242	0.8927	0.8968	0.9683	0.9763	1.1118	0.8895
10	0.10	0.0005	0.0005	0.0006	0.0006	0.0010	0.0010	0.0010	0.0010
	0.25	0.0034	0.0034	0.0036	0.0036	0.0061	0.0061	0.0061	0.0061
	0.50	0.0134	0.0134	0.0144	0.0144	0.0241	0.0241	0.0235	0.0235
	1.00	0.0587	0.0546	0.0593	0.0593	0.0902	0.0902	0.0844	0.0831
	2.00	0.2307	0.2291	0.2562	0.2537	0.2822	0.2874	0.2687	0.2382
20	0.10	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
	0.25	0.0019	0.0019	0.0019	0.0019	0.0031	0.0031	0.0031	0.0031
	0.50	0.0094	0.0094	0.0099	0.0099	0.0122	0.0122	0.0120	0.0120
	1.00	0.0258	0.0258	0.0287	0.0287	0.0425	0.0426	0.0408	0.0406
	2.00	0.1082	0.1058	0.1105	0.1103	0.198	0.1939	0.1913	0.0998
50	0.10	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
	0.25	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0013	0.0013	0.0032	0.0012
	0.50	0.0025	0.0025	0.0026	0.0026	0.0048	0.0048	0.0048	0.0048
	1.00	0.0102	0.0102	0.0103	0.0103	0.0182	0.0183	0.0180	0.0180
	2.00	0.0414	0.0413	0.0415	0.0415	0.0337	0.0394	0.0361	0.0373
100	0.10	0.0000	0.0000	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
	0.25	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006
	0.50	0.0013	0.0013	0.0013	0.0013	0.0024	0.0024	0.0024	0.0024
	1.00	0.0050	0.0050	0.0050	0.0050	0.0545	0.0079	0.0079	0.0079
	2.00	0.0202	0.0202	0.0202	0.0202	0.180	0.187	0.177	0.182

## مراجع

- [1] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969a). A New Family of Life Distributions. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 319-327.
- [2] Birnbaum, Z. W. and Saunders, S. C. (1969b). Estimation for a Family of Life Distributions With Applications to Fatigue. *Journal of Applied Probability*, vol. **6**, pp. 328-347.
- [3] Cramer, H. (1946). *Mathematical Methods of Statistics*. Princeton University Press, Princeton, USA.
- [4] Desmond, A. (1985). Stochastic Models of Failure in Random Environments. *Canadian Journal of Statistics*, vol. **13**, pp. 171-183.
- [5] Desmond, A. F. (1986). On the Relationship Between Tow Fatigue-Life Models. *IEEE Transaction on Reliability*, vol. **R-35**, pp. 167-169.
- [6] Diaz-Garcia, J. A. and Leiva, V. (2005). A New Family of Life Distributions Based on Elliptically Contoured Distributions. *Journal of Statistical Planning and Inference*, vol. **128**, pp. 445-457.
- [7] Engelhardt, M.; Bain, L. J. and Wright, F. T. (1981). Inferences on the Parameters of the Birnbaum-Saunders Fatigue Life Distribution Based on Maximum Likelihood Estimation. *Technometrics* **23**, 251–255.
- [8] Guiraud, P.; Leiva, V. and Fierro, R. (2009). A Non-Central Version of The Birnbaum-Saunders Distribution for Reliability Analysis. *IEEE Transactions on Reliability*, vol. **58**, 152–160.
- [9] Leiva, V.; Sanhueza, A. and Angulo, J. M. (2009). A Length-Biased Version of the Birnbaum-Saunders Distribution With Application in Water Quality. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, vol. **23**, 299–307.
- [10] Marshall, A. W. and Olkin, I. (2007). *Life Distributions-Structure of Non-parametric, Semiparametric, and Parametric Families*. Springer, New York.
- [11] Ng, H. K.; Kundu, D. and Balakrishnan, N. (2003). Modified Moment Estimation for the Two-Parameter Birnbaum-Saunders Distribution. *Computational Statistics and Data Analysis*, vol. **43**, pp. 283-298.
- [12] Vilca-Labra, F. and Leiva, V. (2006). A New Fatigue Life Model Based on the Family of Skew-Elliptical Distributions. *Communications in Statistics Theory and Methods*, vol. **35**, pp. 229-244.