

آنالیز ترکیبی ترازو و وزنه‌ها

خسرو فضلی*

چکیده

در مقاله حاضر تحت شرایط ویژه‌ای به این سؤال پاسخ می‌دهیم که با یک ترازوی دو کفه‌ای و تعدادی وزنه مشخص، چند مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

مقدمه

فرض کنید یک ترازوی دو کفه‌ای و تعدادی وزنه در اختیار داریم. چند مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد؟ مثلاً با وزنه‌های ۱، ۳ و ۹ کیلوگرمی می‌توان ۱۳ مقدار مختلف و با سه وزنه ۱، ۳ و ۹ کیلوگرمی می‌توان ۷ مقدار مختلف را توزین کرد.

برای بررسی مسأله، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که وزنه‌ها متمایز هستند. بنابراین فرض کنید n وزنه متمایز $x_1, x_2, \dots, x_n$ کیلوگرمی در اختیار داریم. برای توزین یک چیز M کیلوگرمی آنرا در کفه راست ترازو گذاشته و سپس هر وزنه x_i را به یکی از صورتهای زیر به کار می‌بریم:

(۱) x_i را در کفه چپ می‌گذاریم،

(۲) x_i را در کفه راست می‌گذاریم،

(۳) x_i را به کار نمی‌بریم.

بنابراین هر مقدار قابل توزین M کیلوگرمی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$M = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n \quad (۱)$$

* - خسرو فضلی، گروه ریاضی، دانشگاه کردستان

که هر α_i عضو مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ است. اگر $\alpha_i = 1$ یعنی x_i را در کفه چپ، اگر $\alpha_i = -1$ یعنی x_i را در کفه راست گذاشته‌ایم و اگر $\alpha_i = 0$ یعنی x_i را به کار نبرده‌ایم. بنابراین حداکثر 3^n مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد، زیرا هر M ای که در معادله (۱) صدق کند، با انتخاب مقادیری برای $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ از مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ به دست می‌آید. اما باید به دو نکته توجه داشت. اول اینکه برخی از مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ منجر به مقادیر غیر مثبت M می‌شوند که مورد نظر نیستند. نکته دوم که اهمیت زیادی دارد این است که، امکان دارد مقادیر مختلف $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ منجر به مقداری یکسان برای M بشوند. شرایطی که از چنین امکانی جلوگیری می‌کند در قضیه زیر آمده است.

قضیه ۱. اگر مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ در دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} x_2 > 2x_1 \\ x_3 > 2(x_1 + x_2) \\ \vdots \\ x_n > 2(x_1 + \dots + x_{n-1}) \end{cases}$$

صدق کنند، آنگاه می‌توان $\frac{3^n - 1}{2}$ مقدار مختلف را توزین کرد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تحت این شرایط نمایش M به صورت معادله

(۱) یکتاست. برای این منظور فرض کنید ضرایب $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ که در

مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ قرار دارند، به قسمی باشند که

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 2x_n \\
 & < (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 4x_1 \\
 & \quad - 4x_2 - \dots - 4x_{n-1} \\
 & = (\alpha_1 - \beta_1 - 4)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - 4)x_{n-1} \\
 & \leq (2 - 4)x_1 + \dots + (2 - 4)x_{n-1} = -2x_1 + \dots - 2x_{n-1} \\
 & \leq 0
 \end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \neq -2$.

با همین روش و با به کارگیری معادله (۳) می‌توان نشان داد که

$$\alpha_n - \beta_n \neq 1.$$

پس بنابر (الف) و (ب) داریم $\alpha_n - \beta_n = 0$. بنابراین در این صورت معادله (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} = 0$$

با توجه به استدلال قبلی و مجموعه نامعادلاتی که در قضیه آمده است می‌توان نشان داد که $\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} = 0$ یعنی $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$. بنابراین با تکرار استدلال بالا، داریم:

$$\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n.$$

پس متناظر با هر $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ که $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$ مقداری یکتا برای M از معادله (۱) به دست می‌آید. بنابراین 3^n مقدار مختلف برای M داریم که یکی از آنها ۰ است و به ازای $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ حاصل می‌شود. پس $3^n - 1$ مقدار غیرصفر داریم که نیمی از آنها مثبت‌اند. در نتیجه می‌توان $\frac{3^n - 1}{2}$ مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

مثال: با وزنه‌های $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 9, x_4 = 27$ و $x_5 = 81$ می‌توان ۱۲۱ مقدار مختلف را توزین کرد، زیرا این مقادیر در شرایط قضیه (۱) صدق می‌کنند و بنابراین $121 (= \frac{3^5 - 1}{2})$ مقدار مختلف داریم.

حال فرض کنید k_1 تا وزنه x_1 کیلوگرمی، k_2 تا وزنه x_2 کیلوگرمی، ...،

و k_n تا وزنه x_n کیلوگرمی داریم و برای هر i ، $k_i \geq 1$.

تعمیم قضیه ۱ به صورت زیر است:

قضیه ۲. فرض کنید $k = \max\{k_1, \dots, k_n\}$ و مقادیر $x_1, x_2, \dots$

در دستگاه نامعادلات زیر صدق کنند:

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n.$$

نشان می‌دهیم برای هر $i = 1, 2, \dots, n$ ، $\alpha_i = \beta_i$.

از تساوی فوق داریم:

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + (\alpha_2 - \beta_2)x_2 + \dots + (\alpha_n - \beta_n)x_n = 0 \quad (2)$$

یا

$$(\beta_1 - \alpha_1)x_1 + (\beta_2 - \alpha_2)x_2 + \dots + (\beta_n - \alpha_n)x_n = 0 \quad (3)$$

واضح است که $\alpha_i - \beta_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$. ابتدا نشان می‌دهیم $\alpha_n - \beta_n = 0$. اگر چنین نباشد یکی از موارد زیر را داریم:

$$\alpha_n - \beta_n = -1 \text{ (الف)}$$

در این صورت معادله (۲) به شکل زیر در می‌آید:

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - x_n = 0$$

از طرفی با توجه به شرایط قضیه

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - x_n \\
 & < (\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 2x_1 - \dots - 2x_{n-1} \\
 & = (\alpha_1 - \beta_1 - 2)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1} - 2)x_{n-1} \\
 & \leq (2 - 2)x_1 + \dots + (2 - 2)x_{n-1} = 0
 \end{aligned}$$

یعنی

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - x_n < 0$$

که تناقض است. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \neq -1$.

با همین روش و با به کارگیری معادله (۳) می‌توان نشان داد که

$$\alpha_n - \beta_n \neq 1.$$

$$\alpha_n - \beta_n = -2 \text{ (ب)}$$

در این صورت معادله (۲) به صورت زیر در می‌آید

$$(\alpha_1 - \beta_1)x_1 + \dots + (\alpha_{n-1} - \beta_{n-1})x_{n-1} - 2x_n = 0$$

از طرفی

که تناقض است. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \neq -1$.

حال نشان می‌دهیم که $\alpha_n - \beta_n$ نمی‌تواند از -1 کمتر باشد. زیرا در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i + (\alpha_n - \beta_n) x_n \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i - x_n \leq 0 \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\alpha_n - \beta_n \leq -1$ ، به تناقض می‌رسیم. پس $\alpha_n - \beta_n \geq 0$. حال فرض می‌کنیم $\alpha_n - \beta_n = 1$ ، داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i + x_n \\ &> \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i + \sum_{i=1}^{n-1} 2k x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i + 2k) x_i \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

که با هم به تناقض می‌رسیم. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \neq 1$.

همانند استدلال قبلی می‌توان نشان داد که $\alpha_n - \beta_n$ نمی‌تواند از 1 نیز بزرگتر باشد. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \leq 0$. ولی دیدیم که $\alpha_n - \beta_n \geq 0$ ، پس $\alpha_n - \beta_n = 0$ ، یا $\alpha_n = \beta_n$. اینک با توجه به اینکه $\alpha_n - \beta_n = 0$ ، داریم:

$$0 = \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i = \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i$$

حال با همین روش و مجموعه شرایط قضیه، می‌توان نشان داد که $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ و بدین ترتیب سایر ضرایب مساوی‌اند.

پس معادله $M = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$ به صورتی یکتا به وسیله ضرایب α_i مشخص می‌شود. چون $\alpha_i \in \{-k_i, \dots, 0, \dots, k_i\}$ پس $\prod_{i=1}^n (2k_i + 1)$ مقدار مختلف برای M به دست می‌آید. یکی از این مقادیر صفر و نیمی از مقادیر غیر صفر، مثبت‌اند. بنابراین $\frac{[\prod_{i=1}^n (2k_i + 1)] - 1}{2}$ مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

$$\begin{cases} x_2 > 2k_1 x_1 \\ x_2 > 2k_1 (x_1 + x_2) \\ \vdots \\ x_n > 2k_1 (x_1 + \dots + x_{n-1}) \end{cases}$$

در این صورت با این وزنه‌ها می‌توان $\frac{[\prod_{i=1}^n (2k_i + 1)] - 1}{2}$ مقدار مختلف را توزین کرد.

برهان. هر چیز قابل توزین M کیلوگرمی در معادله زیر صدق می‌کند:

$$M = \left(\sum_{j=1}^{k_1} \alpha_{1j} \right) x_1 + \left(\sum_{j=1}^{k_2} \alpha_{2j} \right) x_2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{k_n} \alpha_{nj} \right) x_n$$

که $\alpha_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. اگر قرار دهیم $\alpha_i = \sum_{j=1}^{k_i} \alpha_{ij}$ ، معادله بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$M = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$$

که برای هر i ، $\alpha_i \in \{-k_i, \dots, 0, \dots, k_i\}$.

حال نشان می‌دهیم که تحت شرایط قضیه ۲، ضرایب $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ به صورتی یکتا، M را مشخص می‌کنند. یعنی اگر مجموعه ضرایب دیگری مانند $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ داشته باشیم که

$$M = \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n$$

آنگاه $\alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n$.

بنابراین $\sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i = 0$ و در ضمن برای هر i ،

$$\alpha_i - \beta_i \in \{-2k_i, \dots, 0, \dots, 2k_i\}.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\alpha_n - \beta_n = 0$. اگر چنین نباشد حالت‌های مختلفی داریم. اگر $\alpha_n - \beta_n = -1$ ، در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i) x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i - x_n \\ &< \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i - 2k \left(\sum_{i=1}^{n-1} x_i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \beta_i - 2k) x_i \\ &\leq 0 \end{aligned}$$