پیش‌بینی میانگین باقیمانده‌ی رکوردها براساس رکوردهای قبلی

حجت اله ذاکرزاده[1]، محبوبه عرب[2]

چکیده:

در مطالعه‌ی قابلیت اعتماد سیستم‌های فنی، مدل‌های رکورد نقش مهمی را ایفا می‌کنند. فرض کنید کمترین مقدار اولین رکورد معلوم باشد، در این صورت تعریفی را برای میانگین باقیمانده رکوردهای بعدی ارائه می‌دهیم. در ادامه تحت این فرض که مقدار حد پایین m-امین رکورد مشخص باشد، میانگین باقیمانده رکوردهای بعدی را پیش‌بینی می‌کنیم. به علاوه، تعمیم میانگین باقیمانده رکوردها را بر اساس دنباله‌ای از k-رکورد تعریف می‌کنیم و خواص مختلف آن را بررسی می‌کنیم. در انتها با استفاده از شبیه‌سازی درستی برخی از نتایج تئوری را نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: ترتیب‌های تصادفی، توزیع پرتوی تعمیم یافته، دنباله k رکورد، میانگین باقیمانده طول عمر

۱ مقدمه

زمانی که با مشاهدات متوالی سروکار داریم، مشاهداتی که از مقادیر قبلی خود بیشتر یا کمتر باشند، مورد توجه قرار می‌گیرند. در بسیاری از موارد، مشاهدات فقط در صورتی ثبت می‌شوند که یک رکورد باشند، مانند داده‌های مسابقات ورزشی، هواشناسی، ژئوفیزیک، زلزله نگاری، سیلاب‌ها و .... بنابراین، این موضوع حائز اهمیت است که بتوان با استفاده از رکوردها، تحلیل و استنباط آماری درباره‌ی جامعه‌ی آماری انجام داد. فرض کنید $\{X_i, i \geq ۱\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع و پیوسته با تابع توزیع تجمعی $\mathrm{F(x)}$ و تابع چگالی احتمال $\mathrm{f(x)}$ باشد. X_i را یک رکورد بالا گوییم، اگر از کلیه مشاهدات قبل از خود بزرگتر باشد. یعنی داشته باشیم:

$$X_i > X_j, \quad \forall j < i.$$

[1] عضو هیئت علمی گروه آمار دانشگاه یزد

[2] دانشجوی کارشناسی ارشد آمار دانشگاه یزد

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

اگر $U_{(n)}$ زمانی باشد که در آن رکورد nام رخ می‌دهد، آنگاه $U_{(n)}$ خود یک متغیر تصادفی است که آن را زمان رکورد می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$U_{(0)} = 1, U_{(n)} = \min\{i : i > U_{(n-1)}, X_i > X_{U_{(n)}}\}.$$

در این صورت دنباله‌ی رکوردهای به‌دست آمده از X_i عبارت است $X_{U_{(0)}}, X_{U_{(1)}}, \ldots$ و اولین داده همواره رکورد است. اکنون، اگر n-امین رکورد بالا را با R_n نشان دهیم، آنگاه:

$$R_n = X_{U_{(n)}}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

دنباله رکوردهای پایین نیز به طریق مشابه تعریف می‌گردد. در این مطالعه، ما رکوردها را به عنوان رکورد بالا در نظر می‌گیریم. اکنون اگر $\bar{F}_n(r)$ و $f_n(r)$ به ترتیب نشان‌دهنده تابع بقا و چگالی احتمال n-امین رکورد بالا باشد، آنگاه داریم:

$$\bar{F}_n(r) = \bar{F}(r) \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} [H(r)]^k$$

و

$$f_n(r) = \frac{[H(r)]^n}{n!} f(r), \quad r > 0, \ n \geq 0.$$

که در آن $H(r) = -\log(\bar{F}(r))$. در برخی از موارد، مقدار رکورد برای ما اهمیتی ندارد اما دومین، سومین و یا ... مقدار بزرگتر برای ما مهم است، در این صورت به مدل k-رکورد احتیاج داریم که k مقدار صحیح مثبتی می‌باشد. دنباله k-رکوردها برای اولین بار توسط جوبجیلا و کپسینسکی [3] [7] در سال ۱۹۷۶ تعریف شد، که به معنای مشاهده‌ی k-امین مقدار بزرگتر در یک دنباله می‌باشد. اکنون فرض کنید $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع $F(x)$ و تابع چگالی احتمال $f(x)$ و $X_{i:n}$، i امین آماره ترتیبی در نمونه‌ای به اندازه‌ی n باشد. در این صورت به ازای مقدار ثابت $k \geq 1$، متغیر تصادفی $U^k(n)$ که به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$U^k(0) = k, U^k(n) = \min\{j; j > U^k(n-1), X_j > X_{U^k(n-1)-k+1:U^k(n-1)}\}, n = 1, 2, \ldots,$$

زمان n-امین k-رکورد از دنباله‌ی $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ نامیده می‌شود. اکنون n-امین k-رکورد بالایی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$R^X_{n:k} = X_{U^k(n)-k+1:U^k(n)}.$$

[3] Dziubdziela and Kopocinski

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

واضح است که به ازای $k = ۱$ دنباله‌ای از k-رکوردها، همانند دنباله‌ای از رکوردهایی می‌گردد که معرفی کردیم. اکنون فرض کنید متغیر تصادفی Z دارای توزیع نمایی استاندارد باشد، در این صورت با مراجعه به [۲] خواهیم دید که تابع چگالی احتمال توام $(R^Z_{m:k}, R^Z_{n:k}), m < n$ برابر است با

$$f_{(R^Z_{m:k},R^Z_{n:k})}(u,v) = \frac{k^{n+۱}}{\Gamma(m+۱)\Gamma(n-m)} u^m (v-u)^{n-m-۱} e^{-kv}, \quad ۰ \leq u < v < \infty. \tag{۱}$$

در نتیجه با انتگرال‌گیری روی حدود v، تابع چگالی احتمال $R^Z_{m:k}$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$f_{R^Z_{m:k}}(u) = \frac{k^{m+۱}}{\Gamma(m+۱)} u^m e^{-ku}, u \geq ۰, \tag{۲}$$

به علاوه با توجه به این‌که $-\log F(X) \stackrel{d}{=} Z$، داریم:

$$(R^X_{m:k}, R^X_{n:k}) \stackrel{d}{=} (F^{-۱}(۱ - e^{-R^Z_{m:k}}), F^{-۱}(۱ - e^{-R^Z_{n:k}})). \tag{۳}$$

همچنین ناگاراجا [۱۱] نشان داد که با قرار دادن $۱ - (۱ - F(x))^k$ به جای $F(x)$ در توابع چگالی رکوردها، می‌توان به توابع k-رکورد دسترسی پیدا کرد.برای مطالعه‌ی جزئیات بیشتر در مورد رکوردها می‌توان به [۱] و [۲] مراجعه کرد. در قابلیت اعتماد، مقادیر رکورد اغلب برای مدل‌های شوک مورد استفاده قرار می‌گیرند. زمان پیشامد یک فرآیند پوآسون ناهمگن با میانگین $H(r) = -\log(\bar{F}(r))$ رابطه نزدیکی با رکوردها دارد.

به موازات مطالعه‌ی تابع بقا و تابع نرخ شکست، معیار مهم دیگری که در قابلیت اعتماد مبنای تحلیل‌هاست، میانگین باقیمانده عمر است. فرض کنید که X طول عمر یک دستگاه یا قطعه الکتریکی باشد، با شرط این‌که عمر آن دستگاه بیشتر از $\nu > ۰$ باشد، مقدار باقیمانده‌ی بعد از حد پایینی ν که برابر است با $X_\nu = (X - \nu | X > \nu)$، باقیمانده عمر متغیر تصادفی نامیده می‌شود. در این صورت، تابع میانگین باقیمانده عمر (MRL) دستگاه در مقدار ν، به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$m(\nu) = E(X - \nu | X > \nu).$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

۲ میانگین باقیمانده رکوردها

فرض کنید، $\{X_i, i \geq ۱\}$ دنباله‌ای از ولتاژهای مستقل و هم‌توزیع از سیستمی با تابع توزیع پیوسته مطلق $F(x)$، تابع چگالی احتمال $f(x)$ و تابع بقای $\bar{F}(x) = ۱ - F(x)$ باشد. فرض کنید این سیستم، در معرض شوک‌ها قرار گیرد، به عنوان مثال حداکثر ولتاژهایی که به آن وارد می‌شود. حال اگر این ولتاژها را به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر بگیریم، در این صورت حداکثر ولتاژها را می‌توان به عنوان آماره‌های رکوردی در نظر گرفت. با در نظر گرفتن این‌که تمامی واحدها دارای ولتاژی بیشتر از $\nu > ۰$ باشند، اسدی و رکب [۵] میانگین باقیمانده رکوردها (MRLR)[۴] را به صورت زیر تعریف کردند

$$\psi_n(\nu) = E(X_{U(n)} - \nu | X_{U(۰)} > \nu), \qquad n = ۰, ۱, ۲, ... \tag{۴}$$

و نشان دادند که

$$\psi_n(\nu) = \sum_{j=۰}^{n} \frac{۱}{j!} \int_{\nu}^{\infty} (-\log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)})^j \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)} dx. \tag{۵}$$

اخیرا نیز اسدی و رکب [۴] با شرط این‌که مقدار حد پایین m-امین رکورد، بیشتر از $\nu > ۰$ باشد. توسیع میانگین باقیمانده رکوردها (EMRLR)[۵] را به شکل زیر ارائه دادند:

$$\psi_n^m(\nu) = E(X_{U(n)} - \nu | X_{U(m)} > \nu), \qquad ۰ \leq m < n. \tag{۶}$$

در حقیقت اگر برای پیش‌بینی $X_{U(n)} - \nu$ از $\psi_n^m(\nu)$ استفاده کنیم، آنگاه $\psi_n^m(\nu)$ بهترین پیش‌بینی کننده نااریب (BUP) میانگین باقیمانده رکوردها، براساس این که m-امین رکورد مشاهده شده بزرگتر از $\nu > ۰$ باشد، است. همچنین آنها به‌دست آوردند

$$\psi_n^m(\nu) = \sum_{i=۰}^{m} P_F(i, \nu) \psi_{n-i}(\nu),$$

که در آن

$$P_F(i, \nu) = \frac{\frac{[H(\nu)]^i}{i!}}{\sum_{j=۰}^{m} \frac{[H(\nu)]^j}{j!}}.$$

به علاوه چندین خواص $\psi_n^m(\nu)$ مورد بررسی قرار گرفته است.

[۴] Mean residual life of record

[۵] Extension of mean residual life records

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

۳ تعمیم میانگین باقیمانده رکوردها

با توجه به [۱۰] اگر به بررسی میانگین باقیمانده رکوردها بر اساس k-رکورد بپردازیم، با فرض $R^X_{m:k} > \nu$

$$\Psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu) = (R^X_{n:k} - \nu | R^X_{m:k} > \nu), \quad n \geq m,$$

را تعمیم باقیمانده رکوردها بر اساس n-امین k-رکورد بالایی می‌نامیم. بنابراین می‌توان تعمیم میانگین باقیمانده رکوردها (GMRLR) را به صورت زیر تعریف کرد:

$$\psi^{(k)}_{n:m} = E(R^X_{n:k} - \nu | R^X_{m:k} > \nu), \quad n \geq m. \tag{۷}$$

اگر $k = ۱$ و $m = ۰$، تعریف فوق معادل با تعریف MRLR و به ازای $k = ۱$ معادل با تعریف EMRLR می‌گردد.

۱.۳ برخی از خواص GMRLR

در این بخش ابتدا تابع توزیع $\Psi^{(k)}_{n:m}$ را به‌دست می‌آوریم و سپس با استفاده از آن، فرم کلی $\psi^{(k)}_{n:m}$ را به‌دست آورده و به بررسی برخی از خواص آن می‌پردازیم.

به ازای m ثابت که $m \leq n$ و $\nu > ۰$ و همچنین با توجه به رابطه‌ی (۳) داریم:

$$\begin{aligned}
P(\Psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu) \geq x) &= P(R^X_{n:k} - \nu \geq x | R^X_{m:k} > \nu) \\
&= P(R^Z_{n:k} \geq -\ln \bar{F}(\nu + x) | R^Z_{m:k} > -\ln \bar{F}(\nu)) \\
&= \frac{P(R^Z_{n:k} \geq -\ln \bar{F}(\nu + x), R^Z_{m:k} > -\ln \bar{F}(\nu))}{P(R^Z_{m:k} > -\ln \bar{F}(\nu))} \\
&= \frac{\int_{-\ln \bar{F}(\nu+x)}^{\infty} \frac{k^{n+۱}}{\Gamma(n+۱)} v^n e^{-kv} \int_{-\ln \bar{F}(\nu)}^{v} \frac{۱}{\beta(m+۱, n-m)} s^m (۱-s)^{n-m-۱} ds dv}{\int_{-\ln \bar{F}(\nu)}^{\infty} \frac{k^m}{\Gamma(m+۱)} u^m e^{-ku} du} \\
&= \frac{\sum_{i=۰}^{m} \frac{k^{n+۱}}{i!} \frac{۱}{(n-i)!} \int_{-k \ln \bar{F}(x+\nu)}^{\infty} v^n e^{-kv} (-\frac{\ln \bar{F}(\nu)}{v})^i (۱ + \frac{\ln \bar{F}(\nu)}{v})^{n-i} dv}{[\bar{F}(\nu)]^k \sum_{j=۰}^{m} \frac{[kH(\nu)]^j}{j!}} \\
&= \frac{\frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)} \sum_{i=۰}^{m} \frac{[-kH(\nu)]^i}{i!} \sum_{j=۰}^{n-i} \frac{۱}{j!} (-k \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)})^j}{\sum_{j=۰}^{m} \frac{[kH(\nu)]^j}{j!}}
\end{aligned}$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

که $H(\nu) = -ln\bar{F}(\nu)$.

از طرفی اگر فرض کنیم که متغیر تصادفی V دارای توزیع پواسون با پارامتر $kH(\nu)$ باشد، در این صورت با تعریف $P_{F_k}(i,\nu) = P(V = i|V \leq m), m \in \{0, 1, 2, ...\}$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} P(\Psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu) \geq x) &= \sum_{i=0}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{j!}(-k \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)})^j (\frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)})^k \\ &= \sum_{i=0}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \bar{F}_{R^{X_\nu}_{n-i:k}}(x). \end{aligned} \tag{8}$$

به طور مشابه، تابع توزیع $\Psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)$ به صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$P(\Psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu) \leq x) = \sum_{i=0}^{m} P_{F_k}(i,\nu) p(G_{n+1-i} \leq (-k \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)})) \tag{9}$$

که $G_{n+1-i} \sim G(n+1-i, 1)$. اکنون با توجه به آنچه که به‌دست آوردیم، در قضیه زیر فرمولی را برای $\psi^{(k)}_{n:m}(\nu)$ ارائه می‌دهیم.

قضیه ۱ فرض کنید $\{X_i, i = 1, 2, \cdots\}$ دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با تابع توزیع F و $R^X_{m:k} > \nu (> 0)$ باشد. در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \psi^{(k)}_{n:m}(\nu) &= E(R^X_{n:k} - \nu | R^X_{m:k} > \nu) \\ &= \int_0^\infty P(R^X_{n:k} - \nu \geq x | R^X_{m:k} > \nu) dx \\ &= \sum_{i=0}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \int_\nu^\infty \sum_{j=0}^{n-i} \frac{1}{j!} \left(-k \ln \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}\right)^j \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}\right)^k dx \\ &= \sum_{i=0}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \int_\nu^\infty p(Y_{k,\nu}(x) \leq n-i) dx. \end{aligned} \tag{10}$$

که متغیر تصادفی $Y_{k,\nu}(x)$ دارای توزیع پواسون با میانگین $\mu_{k,\nu} = -kln\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}$ می‌باشد.

مثال ۲ اگر متغیر تصادفی X دارای توزیع نمایی با تابع بقای

$$\bar{F}(x) = e^{-\lambda x}, \quad x > 0,$$

باشد، GMRLR به صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\psi^{(k)}_{n:m}(\nu) = \frac{1}{k\lambda} \sum_{i=0}^{m} P_{F_k}(i,\nu)(n-i+1),$$

که

$$P_{F_k}(i,\nu) = \frac{\frac{[-k \ln(e^{-\lambda\nu})]^j}{i!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{[-k \ln(e^{-\lambda\nu})]^j}{j!}} = \frac{\frac{[k\lambda\nu]^i}{i!}}{\sum_{j=0}^{m} \frac{[k\lambda\nu]^j}{j!}}.$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

مثال ۳ فرض کنید متغیر تصادفی X دارای توزیع پارتوی تعمیم یافته با تابع بقای زیر باشد:

$$\bar{F}(x) = (۱ + \beta x)^{-\beta^{-۱}},$$

که $x \geq ۰$ زمانی که $۰ \leq \beta < ۱$ و $۰ \leq x \leq -\beta^{-۱}$ زمانی که $\beta < ۰$. در این صورت GMRLR برابر خواهد شد با:

$$\psi_{n:m}^{(k)}(\nu) \quad = \left(\frac{۱ + \beta\nu}{\beta}\right) \sum_{i=۰}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \left[\left(\frac{k}{k-\beta}\right)^{n-i+۱} - ۱\right], \quad \beta < ۱, \beta \neq ۰. \tag{۱۱}$$

برای توزیع نمایی استاندارد ($\beta \to ۰$) $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu) = \sum_{i=۰}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \left(\frac{n-i+۱}{k}\right)$ و برای توزیع توانی ($\beta < ۰$) زمانی که n بزرگ می‌شود، $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ برابر $-\frac{۱+\beta\nu}{\beta}$ می‌گردد. اکنون برا ارائه قضیه‌ای که در ادامه خواهیم گفت به ارائه دو لم زیر نیاز است.

لم ۴ فرض کنید $V_۱$ و $V_۲$ دو متغیر تصادفی دارای توزیع پواسون به ترتیب با پارامترهای $\lambda_۱$ و $\lambda_۲$ باشند. اگر $\lambda_۱ \leq \lambda_۲$ آنگاه

$$(V_۱|V_۱ \leq m) \leq_{st} (V_۲|V_۲ \leq m), \quad m = ۰, ۱, ... \tag{۱۲}$$

برای مشاهده‌ی جزئیات بیشتر می‌توان به [۹] مراجعه کرد.

لم ۵ اگر $G_{n+۱-i} \sim G(n+۱-i, ۱)$، آنگاه $P[G_{n+۱-i} \leq x]$ تابعی صعودی از i است.

حال در قضیه زیر رفتار $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ را نسبت به n، m و k بیان می‌کنیم و با آوردن مثالی درستی نتایج حاصل را نشان می‌دهیم.

قضیه ۶ موارد زیر برای $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ برقرار است:

(الف) برای k ثابت، $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ به ازای m ثابت، در n صعودی است.

(ب) برای k ثابت، $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ به ازای n ثابت، در m نزولی است.

(ج) برای n و m ثابت، $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ در مقدار صحیح k نزولی است.

اثبات (الف)

$$\begin{aligned}
\psi_{n+۱,m}^{k}(\nu) - \psi_{n,m}^{k}(\nu) &= \sum_{i=۰}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \frac{۱}{(n-i+۱)!} \int_{\nu}^{\infty} \left(-k \log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}\right)^{n-i+۱} \left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}\right)^{k} dx \\
&= \sum_{i=۰}^{m} P_{F_k}(i,\nu) \int_{\nu}^{\infty} p(Y_{k,\nu}(x) = n-i+۱) dx \geq ۰
\end{aligned}$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

بنابراین $\psi^{k}_{n,m}(\nu)$ تابعی صعودی از n است.

اثبات قسمت (ب) نیز به طریق مشابه صورت می‌گیرد.

(ج) برای اثبات قضیه کافی است نشان دهیم که به ازای n و m ثابت و $k_1 \leq k_2$ رابطه‌ی:

$$P(\Psi^{(k_1)}_{n:m}(X;\nu) \leq x) \leq P(\Psi^{(k_2)}_{n:m}(X;\nu) \leq x), \quad x > 0. \tag{۱۳}$$

اکنون از آنجایی که $k_1 \leq k_2$ بنابراین $k_1 H(\nu) \leq k_2 H(\nu)$. پس با استفاده از لم ۴ خواهیم داشت:

$$(V_1|V_1 \leq m) \leq_{st} (V_2|V_2 \leq m), \tag{۱۴}$$

که V_j دارای توزیع پواسون با پارامتر $k_j H(\nu), j = 1, 2$ می‌باشد. به علاوه داریم:

$$P(G_{n-i+1} \leq (-k_1 \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)})) \leq P(G_{n-i+1} \leq (-k_2 \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)})). \tag{۱۵}$$

$$P_{F_{k_j}}(i,\nu) = P(V_j = i|V_j \leq m), \quad j = 1, 2$$

با مراجعه به [۹] و همچنین با استفاده از روابط (۹)، (۱۵) و لم ۵ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} p(\Psi^{(k_1)}_{n:m}(X;\nu) \leq x) - P(\Psi^{(k_2)}_{n:m}(X;\nu) \leq x) &= \sum_{i=0}^{m} P_{F_{k_1}}(i,\nu) P(G_{n+1-i} \leq \left(-k_1 \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)}\right) \\ &- \sum_{i=0}^{m} P_{F_{k_2}}(i,\nu) P(G_{n+1-i} \leq \left(-k_2 \ln \frac{\bar{F}(x+\nu)}{\bar{F}(\nu)}\right) \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

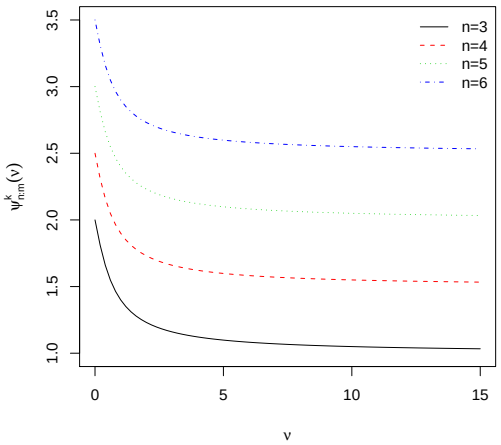
بنابراین رابطه‌ی (۱۳) اثبات می‌گردد و به این ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

مثال ۷ در شکل‌های ۱،۲ و ۳ رفتار $\psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)$ برای توزیع نمایی به ازای k، n و m مختلف با در نظر گرفتن $\lambda = 2$ ارایه شده است.

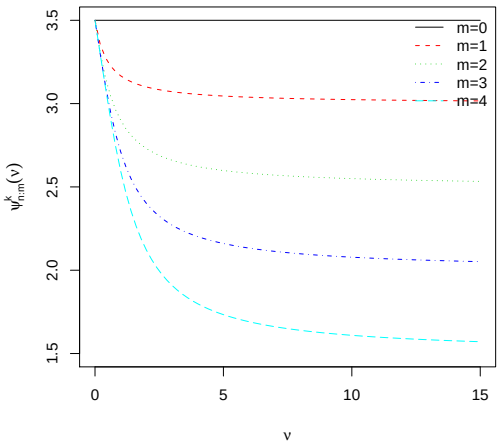
۴ شبیه‌سازی

در این بخش سعی می‌شود آنچه به صورت تئوری ارائه شده است با شبیه‌سازی نشان داده شود. در مثال‌های ۲ و ۳ فرمول‌های مورد نیاز برای محاسبه $\psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)$ به‌دست آمده است و برای محاسبه‌ی

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

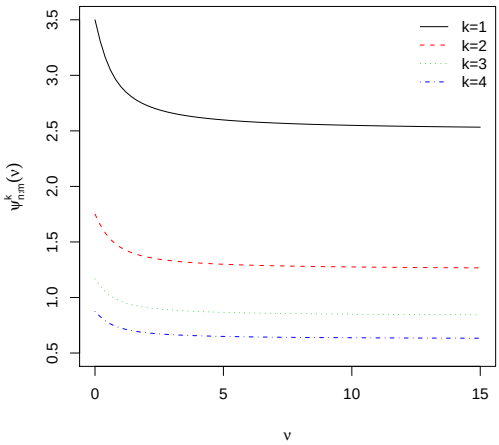


شکل ۱: رفتار $\psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)$ توزیع نمایی به ازای $m = ۲$، $k = ۲$ و $n = ۳, ۴, ۵, ۶$.



شکل ۲: رفتار $\psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)$ توزیع نمایی به ازای $n = ۵$، $k = ۲$ و $m = ۰, ۱, ۲, ۳, ۴$.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]



شکل ۳: رفتار $\psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)$ توزیع نمایی به ازای $n=۵$، $m=۲$ و $k=۱,۲,۳,۴$.

$\widehat{\psi^{(k)}_{n:m}(\nu)}$ از تابع بقای تجربی $\bar{F}_N(.)$ به جای $\bar{F}(.)$ در رابطه‌ی

$$\psi^{(k)}_{n:m}(X;\nu)=\sum_{i=۰}^{m}P_{F_k}(i,\nu)\int_{\nu}^{\infty}\sum_{j=۰}^{n-i}\frac{۱}{j!}\left(-k\ln\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}\right)^{j}\left(\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(\nu)}\right)^{k}dx \qquad (۱۶)$$

استفاده می‌شود، که N تعداد داده‌های شبیه‌سازی شده است و

$$\bar{F}_N(x)=\frac{\sharp(X>x)}{N}.$$

برای محاسبه‌ی انتگرال در رابطه‌ی (۱۶) از تقریب انتگرال ریمان اشتلیس استفاده می‌کنیم. به طور مثال برای محاسبه انتگرال تابع $g(x)$ روی بازه $[a,b]$، این بازه را به ۱۰۰۰ قسمت مساوی افراز کرده و اعداد $a=x_۰<x_۱<x_۲<...<x_{۹۹۹}<x_{۱۰۰۰}=b$ را در نظر می‌گیریم. سپس محاسبه انتگرال به صورت عددی به شکل زیر خواهد بود:

$$\int_a^b g(x)dx\simeq\sum_{i=۱}^{۹۹۹}g(x_i)\Delta x_i$$

که $\Delta x_i=x_{i+۱}-x_i$.

در این قسمت با استفاده از تکنیک شبیه‌سازی مونت کارلو عملیات محاسبه‌ی $\widehat{\psi^{(k)}_{n:m}(\nu)}$ را به تعداد ۱۰۰۰ بار تکرار کرده و در نهایت میانگین برآوردگرها $\overline{\widehat{\psi^{(k)}_{n:m}(\nu)}}$ را ثبت خواهیم کرد. همچنین برای هر $\overline{\widehat{\psi^{(k)}_{n:m}(\nu)}}$ مقدار اریبی $(Bias)$ و مجذور میانگین توان دوم خطا (MSE) را به‌دست می‌آوریم. نتایج شبیه‌سازی برای مقادیر $n=۲,۳,۴$، $m=۰,۱,۲,۳$ و $k=۳,۴$ برای توزیع‌های پارتو و

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

نمایی به ازای $\beta = -۰/۵$ و $\lambda = ۲$ در جدول‌های ۱.۵ و ۲.۵ آورده شده است.

k	n	m	$\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$	$\overline{\widehat{\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)}}$	$Bias$	MSE
۳	۲	۰	۰/۵۱۸۴	۰/۵۲۰۲	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۸
		۱	۰/۴۱۸۲	۰/۴۲۰۷	۰/۰۰۲۵	۰/۰۰۱۴
	۳	۰	۰/۶۴۴۳	۰/۶۴۵۷	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۲۱
		۱	۰/۵۵۸۵	۰/۵۵۹۵	۰/۰۰۱	۰/۰۰۱۹
		۲	۰/۴۷۹۶	۰/۴۸۲۲	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۷
	۴	۰	۰/۷۵۲۳	۰/۷۵۱۱	−۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۲۲
		۱	۰/۶۷۸۷	۰/۶۸۰۱	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۲۱
		۲	۰/۶۱۱۱	۰/۶۰۹۵	−۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۲
		۳	۰/۵۵۵۷	۰/۵۵۵۲	−۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۱۸
۴	۲	۰	۰/۴۱۶۷	۰/۴۱۹۱	۰/۰۰۲۴	۰/۰۰۱۶
		۱	۰/۳۲۵۷	۰/۳۲۸۳	۰/۰۰۲۶	۰/۰۰۱۲
	۳	۰	۰/۵۲۶	۰/۵۲۵۸	−۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۱۸
		۱	۰/۴۴۵۱	۰/۴۴۵۷	۰/۰۰۰۶	۰/۰۰۱۶
		۲	۰/۳۶۷۴	۰/۳۷۱۱	۰/۰۰۳۷	۰/۰۰۱۳
	۴	۰	۰/۶۲۳۱	۰/۶۲۳۶	۰/۰۰۰۵	۰/۰۰۲۲
		۱	۰/۶۲۳۱	۰/۶۲۳۳	۰/۰۰۰۲	۰/۰۰۲۴
		۲	۰/۴۸۲۱	۰/۴۸۳۵	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۷
		۳	۰/۴۲۰۳	۰/۴۲۳۴	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۱۶

جدول ۱: مقادیر واقعی و شبیه‌سازی $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ برای توزیع پارتو به ازای $N = ۲۰۰$، $\nu = ۰/۶$، $k = ۳, ۴$، $n = ۲, ۳, ۴$ و $m = ۰, ۱, ۲, ۳$.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

k	n	m	$\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$	$\overline{\widehat{\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)}}$	$Bias$	MSE
۳	۲	۰	۰/۵	۰/۴۹۸۷	−۰/۰۰۱۳	۰۰/۰۰۳
		۱	۰/۴۲۵۹	۰/۳۸۷۶	−۰/۰۳۸۳	۰/۰۰۳۶
	۳	۰	۰/۶۶۶۷	۰/۶۷	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۵۶
		۱	۰/۵۹۲۶	۰/۵۵۴۴	−۰/۰۳۸۲	۰/۰۰۵۱
		۲	۰/۵۵۳۵	۰/۴۵۲۶	−۰/۱۰۰۹	۰/۰۱۲۹
	۴	۰	۰/۸۳۳۳	۰/۸۳۳۳	۰	۰/۰۰۸۹
		۱	۰/۷۵۹۳	۰/۷۲۲۸	−۰/۰۳۶۵	۰/۰۰۷۶
		۲	۰/۷۲۰۱	۰/۶۱۶۱	−۰/۱۰۴	۰/۰۱۵۸
		۳	۰/۷۰۵۲	۰/۵۴۱۵	−۰/۱۶۳۷	۰/۰۳۰۶
۴	۲	۰	۰/۳۷۵	۰/۳۷۸۱	۰/۰۰۳۱	۰/۰۰۱۹
		۱	۰/۳۱۹۴	۰/۲۸۲۱	−۰/۰۳۷۳	۰/۰۰۲۶
	۳	۰	۰/۵	۰/۵۰۳۳	۰/۰۰۳۳	۰/۰۰۳۵
		۱	۰/۴۴۴۴	۰/۴۰۵۹	−۰/۰۳۸۵	۰/۰۰۳۸
		۲	۰/۴۱۵۱	۰/۳۲۲۶	−۰/۰۹۲۵	۰/۰۱۰۲
	۴	۰	۰/۶۲۵	۰/۶۳۴۷	۰/۰۰۹۷	۰/۰۰۵۵
		۱	۰/۵۶۹۴	۰/۵۲۹۱	−۰/۰۴۰۳	۰/۰۰۵
		۲	۰/۵۴۰۱	۰/۴۴۹۹	−۰/۰۹۰۲	۰/۰۱۱
		۳	۰/۵۲۸۹	۰/۳۷۹	−۰/۱۴۹۹	۰/۰۲۴۷

جدول ۲: مقادیر واقعی و شبیه‌سازی $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ برای توزیع نمایی به ازای $N = ۲۰۰$، $\nu = ۰/۴$، $k = ۳, ۴$، $n = ۲, ۳, ۴$ و $m = ۰, ۱, ۲, ۳$.

با توجه به مقادیر به‌دست آمده در جدول‌های ۱.۵ و ۲.۵ نتایج زیر حاصل می‌شود:

(الف) مقادیر شبیه‌سازی شده‌ی $\overline{\widehat{\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)}}$ به مقادیر واقعی $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ نزدیک هستند و باتوجه به کم بودن مقدار اریبی و MSE می‌توان گفت که $\overline{\widehat{\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)}}$ برآورد خوبی برای $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ می‌باشد.

(ب) همان‌طور که به صورت تئوری در قضیه ۶ نشان دادیم، در اینجا نیز مشاهده می‌کنیم که مقادیر واقعی و شبیه‌سازی شده‌ی $\psi_{n:m}^{(k)}(\nu)$ نسبت به n صعودی و نسبت به m و k نزولی است.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

مراجع

[1] Ahsanullah, M. (2004). *Record value-Theory and Applications.* University Press of America Inc, New York.

[2] Arnold, B.C., Balakrishnan, N. and Nagaraja, H.N. (1998). *Record.* Wiley, New York.

[3] Lieblien, J., Zelen, M. (1956). Statistical investigation of the fatigue life of deep-groove ball bearings. *J. Res. Nat. Bur. Stand.* **57**, 273-316.

[4] Asadi, M. and Raqab, M.Z. (2009). The mean residual of record values at the level of previous records. *Metrika* , **72**, 251-264.

[5] Asadi, M. and Raqab, M.Z. (2008). On the mean residual record. *Journal of Statistical Planning and Inference* , **138**, 3660-3666.

[6] Asadi, M., Rao, C.R. and Shanbhag, D.N. (2001). Some unified characterization results on the generalized Pareto distribution. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **93**, 29-50.

[7] Dziubdziela, W. and Kopocinski, B. (1976). Limiting properties of the k-th record values. *Applicationes Mathematicae*, **15**, 187-190.

[8] Khaledi, B.E. (2005). Some new results on stochastic ordering between generalized order statistics. *Journal of the Iranian Statistical Society*, **4**, 35-49.

[9] Khaledi, B.E. and Shojaei, R. (2007). On stochastic ordering between residual record values. *Statistics and Probability Letters* , **77**, 1467-1472.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

[10] Kundu, C. and Nanda, A.K. (2010). On generalized residual life of record values. *Statistics and Probability Letters*, **80**, 797-806.

[11] Nagaraja, H.N. (1988). Record values and related statistics-a review. *Communications in Statistics-Theory and Methods*, **17**, 2223-2238.

[12] Shaked, M. and Shantikumar, T.G. (1994). *Stochactic Order and their Applications*. Academic Press Inc, New York.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]

Abstract

In the study of reliability of the technical systems, records model play an important role. Assume that the lower limit value of the first record is known, then we propose a definiton of the mean residual life of the future record. We predict mean residual of the future records under condition that the lower limit value of the mth record is known. Furthermore, we present generalization of the mean residual life of record based on the sequance of k-recordsand study its various properties. Finally some simulation results are provided.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-27]