https://doi.org/10.22034/jr_iss.2024.729300
اندیشه آماری، سال ۱۴۰۳، دوره ۲۹، شماره ۱، ص ۳۱-۲۷

نگاهی به نقطه تغییر در مدل اتورگرسیو مرتبه دوم

آرزو رحمان‌پور[۱]، یداله واقعی[۲]* و غلامرضا محتشمی برزادران[۳]

[۱،۲] دانشگاه بیرجند، دانشکده علوم ریاضی و آمار
[۳] دانشگاه فردوسی مشهد، دانشکده علوم ریاضی

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۱۱
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۶/۲۷

چکیده:

سری‌زمانی مجموعه‌ای از داده‌های وابسته است که معمولا با فواصل زمانی منظم (روزانه، هفتگی، ماهانه یا سالانه) مشاهده می‌شوند. در تحلیل سری‌های‌زمانی گاهی نقاطی وجود دارند که پارامترهای مدل یا توزیع سری دچار پرش یا تغییر می‌شود، از دیدگاه آماری به این نقاط نقطه تغییر می‌گویند. در عمل تعداد نقاط تغییر و مکان آنها نامعلوم بوده و کشف و شناسایی آنها از دیدگاه کاربردی به ویژه مدل‌بندی و پیش‌بینی سری‌زمانی از اهمیت به سزایی برخوردار می‌باشد. در این مقاله مدل $AR(۲)$ در حضور نقطه تغییر معرفی می‌شود. پس از آن برآورد پارامترهای مدل $AR(۲)$ در حضور نقطه تغییر و با فرض معلوم بودن نقطه تغییر به روش درستنمایی ماکسیمم شرطی بدست می‌آید. در نهایت به کمک یک مثال سری‌زمانی برآورد پارامترها مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: برآورد، پارامتر، سری‌زمانی، ماکسیمم درست‌نمایی، مدل $AR(۲)$

۱ مقدمه

سری‌زمانی مجموعه ای از مشاهدات است که بر حسب زمان (یا یک کمیت دیگر) جمع آوری شده باشند. در واقع مشاهدات سری‌زمانی پی‌درپی در طی زمان گردآوری می‌شوند (کرایر و چان [۴]). یک سری‌زمانی به طول n را با $y_1,...,y_n$، نشان می‌دهیم. کسب وکار، امور مالی، بورس، هواشناسی، اقتصاد، مهندسی صنایع و غیره از جمله علومی هستند که تحلیل سری‌زمانی در آن کاربرد فراوان دارد. سری‌های‌زمانی در یک بازه زمانی نسبتا طولانی به‌طور معمول پایدار و بدون تغییر هستند، اما گاهی تغییرات در این سری‌ها باعث می‌شود تغییر در ساختار توزیع داده‌ها رخ دهد. بسیاری از متغیرهای کلان اقتصادی مانند تورم می‌تواند در معرض تغییراتی در سیاست‌های دولت و بحران های سیاسی، اجتماعی، اقتصادی قرار گیرند که ممکن است باعث ایجاد تغییرات اساسی در داده‌ها شود. آگاهی از این تغییرات می‌تواند به مردم برای تصمیم گیری بهتر و مدیریت مشکلات ایجاد شده کمک کند. در زمینه نقطه تغییر [۱] تاکنون پژوهش‌هایی انجام شده است ازجمله: هریشنیا و میا [۷] در تحقیقی تحت عنوان بررسی برآورد نقطه تغییر به برآورد پارامترهای مدل‌های رگرسیون خطی با روش درستنمایی ماکسیمم پرداختند. تیمر و پیگناتیلو [۱۰] پارامترهای فرآیند $AR(۱)$ را در حضور نقطه تغییر برآورد کردند. گمبی [۶] نیز به کشف نقطه تغییر در سری‌زمانی اتورگرسیو مرتبه ی p به روش بردار امتیاز پرداخت. شائو و ژانگ [۹] آزمونی برای کشف نقطه تغییر در سری‌زمانی ارائه نمودند. چاکار و همکاران [۳] به برآورد میانگین مدل اتورگرسیو مرتبه اول با نقطه تغییر پرداختند. آکاشی و همکاران [۲] یک آزمون نسبت درستنمایی برای وجود نقطه تغییر پیشنهاد دادند و خواص مجانبی آن را بررسی کردند که در آن بر خلاف سایر موارد مشابه، فرض می‌شود از مکان نقطه تغییر اطلاع نداریم. ژی و همکاران [۴۴] به مقایسه تفاوت در روش‌ها برای کشف نقطه تغییر در سری‌های‌زمانی اقلیمی پرداختند. هوسکوا و همکاران [۸] برآورد تغییر تدریجی پارامتر در فرآیندهای با نقطه تغییر را انجام دادند. رحمانپور و همکاران [۱] نیز به برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو مرتبه اول با نقطه تغییر به روش درستنمایی ماکسیمم شرطی پرداختند. در این مقاله به برآورد پارامترهای مدل اتورگرسیو مرتبه دوم به روش درستنمایی ماکسیمم شرطی خواهیم پرداخت و در ادامه به کمک شبیه‌سازی برآورد پارامترها

*نویسنده مسئول: ywaghei@birjand.ac.ir

[1] change point

را بررسی می‌کنیم.

۲ برآورد پارامترها در مدل $AR(2)$ با نقطه تغییر

مدل اتورگرسیو مرتبه pبه صورت :

$$Y_t=\phi_1 Y_{t-1}+\phi_2 Y_{t-2}+\ldots+\phi_p Y_{t-p}+\varepsilon_t,$$

است که در آن ε_tها متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع از توزیع نرمال با میانگین صفر و واریانس σ^2_ε می‌باشند. در مدل $AR(2)$ ، به شرط اینکه ε_t مستقل از $Y_{t-1},Y_{t-2},\ldots$ باشد، شرط مانایی برقرار است اگر و تنها اگر سه شرط زیر برقرار باشد:

$$\phi_1+\phi_2<1,\qquad \phi_2-\phi_1<1,\qquad |\phi_2|<1.$$

در این مقاله می‌خواهیم در مدل $AR(2)$ با میانگین صفر، برآورد پارامترها را وقتی همه در یک مقطع از زمان(τ) دچار تغییر شوند بررسی کنیم. مدل مورد نظر به صورت زیر خواهد بود:

$$Y_t=\begin{cases}\phi_{01}Y_{t-1}+\phi_{02}Y_{t-2}+\varepsilon_t, & t=1,\ldots,\tau,\\ \phi_{11}Y_{t-1}+\phi_{12}Y_{t-2}+\varepsilon_t, & t=\tau+1,\ldots,n.\end{cases}\tag{1}$$

فرض می‌کنیم واریانس داده‌ها تاقبل از نقطه تغییر $\sigma^2_{0\varepsilon}$ و بعد از آن $\sigma^2_{1\varepsilon}$ می‌باشد. برآورد پارامترها به روش ماکسیمم درستنمایی کامل با مشکلات و دردسرهایی همراه است از جمله اینکه حل معادلات درستنمایی به شکل بسته‌ای منجر نمی‌شود. لذا در ادامه این بخش پارامترهای مدل $AR(2)$ با نقطه تغیر به روش درستنمایی ماکسیمم شرطی برآورد می‌شوند.

توزیع شرطی توأم در حالت کلی از رابطه :

$$f(y_3,\ldots,y_n\mid y_1,y_2)=f(y_3\mid y_1,y_2)\times\ldots\times f(y_n\mid y_1,\ldots,y_{n-1}),$$

بدست می‌آید. در نتیجه تابع درستنمایی شرطی برای مدل مورد نظربه‌صورت زیر است:

$$L(\theta)=f(y_3\ldots y_n\mid y_1,y_2)=(2\pi\sigma^2_{0\varepsilon})^{-(\tau-2)/2}$$
$$\times exp\{\frac{-1}{2\sigma^2_{0\varepsilon}}\sum_{t=3}^{\tau}(y_t-(\phi_{01}y_{t-1}+\phi_{02}y_{t-2}))^2\}$$
$$\times(2\pi\sigma^2_{1\varepsilon})^{-(n-\tau)/2}exp\{\frac{-1}{2\sigma^2_{1\varepsilon}}\sum_{t=\tau+1}^{n}(y_t-(\phi_{11}y_{t-1}+\phi_{12}y_{t-2}))^2\}.$$

حال قرار می‌دهیم $l(\theta)=lnL(\theta)$ و با مشتق‌گیری نسبت به پارامترها خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{\partial}{\partial\phi_{01}}l(\theta)=0,\ \frac{\partial}{\partial\phi_{02}}l(\theta)=0,\ \frac{\partial}{\partial\sigma^2_{0\varepsilon}}l(\theta)=0,\\ \frac{\partial}{\partial\phi_{11}}l(\theta)=0,\ \frac{\partial}{\partial\phi_{12}}l(\theta)=0,\ \frac{\partial}{\partial\sigma^2_{1\varepsilon}}l(\theta)=0.\end{cases}\tag{2}$$

از حل معادله $\frac{\partial}{\partial\phi_{01}}l(\theta)=0$ عبارت:

$$\sum_{t=3}^{\tau}y_{t-1}(y_t-(\phi_{01}y_{t-1}+\phi_{02}y_{t-2}))=0,$$

بدست می‌آید و از حل این معادله می‌توانϕ_{01} را بر حسب ϕ_{02} بدست آورد:

$$\hat{\phi_{01}}=\frac{\sum_{t=3}^{\tau}y_ty_{t-1}-\hat{\phi}_{02}\sum_{t=3}^{\tau}y_{t-1}y_{t-2}}{\sum_{t=3}^{\tau}y_{t-1}^2}.\tag{3}$$

همین‌طور از حل معادله $\frac{\partial}{\partial\phi_{02}}l(\theta)=0$ عبارت:

$$\sum_{t=3}^{\tau}y_{t-2}(y_t-(\phi_{01}y_{t-1}+\phi_{02}y_{t-2}))=0,$$

بدست آمده و از حل این معادله می‌توان ϕ_{02} را نیز برحسب ϕ_{01} به صورت زیر بدست آورد:

$$\hat{\phi}_{02}=\frac{\sum_{t=3}^{\tau}y_ty_{t-2}-\hat{\phi}_{01}\sum_{t=3}^{\tau}y_{t-1}y_{t-2}}{\sum_{t=3}^{\tau}y_{t-2}^2}.\tag{4}$$

همچنین با حل معادله $\frac{\partial}{\partial\sigma^2_{0\varepsilon}}l(\theta)=0$ خواهیم داشت:

$$-(\tau-2)\sigma^2_{0\varepsilon}+\sum_{t=3}^{\tau}(y_t-(\phi_{01}y_{t-1}+\phi_{02}y_{t-2}))^2=0,$$

که از حل این معادله عبارت:

$$\hat{\sigma}^2_{0\varepsilon}=\frac{\sum_{t=3}^{\tau}(y_t-(\hat{\phi}_{01}y_{t-1}+\hat{\phi}_{02}y_{t-2}))^2}{\tau-2},\tag{5}$$

بدست می‌آید.

بطور مشابه عبارات(۵) تا (۷) را می‌توان بدست آورد:

$$\hat{\phi}_{11}=\frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}y_ty_{t-1}-\hat{\phi}_{12}\sum_{t=\tau+1}^{n}y_{t-1}y_{t-2}}{\sum_{t=\tau+1}^{\tau}y_{t-1}^2},\tag{6}$$

$$\hat{\phi}_{12}=\frac{\sum_{t=\tau+1}^{n}y_ty_{t-2}-\hat{\phi}_{11}\sum_{t=\tau+1}^{n}y_{t-1}y_{t-2}}{\sum_{t=\tau+1}^{n}y_{t-2}^2},\tag{7}$$

$$\hat{\sigma}^2_{1\varepsilon}=\frac{\sum_{t=\tau}^{n}(y_t-(\phi_{11}y_{t-1}+\phi_{12}y_{t-2}))^2}{n-\tau}.\tag{8}$$

همانطور که مشاهده می‌شود مقادیر برآورد شده به یکدیگر وابسته هستند، به همین دلیل برآورد هر پارامتر را مستقل از دیگر پارامترها به دست می‌آوریم. از رابطه (۳) می‌توانیم $\hat{\phi}_{01}$ را بر حسب $\hat{\phi}_{02}$ بنویسیم:

$$\hat{\phi}_{01} = \frac{\sum_{t=3}^{\tau} y_t y_{t-2} - \hat{\phi}_{02}\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-2}^2}{\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1} y_{t-2}}. \qquad (9)$$

اکنون با برابر قرار دادن عبارتهای (۲) و (۸) خواهیم داشت:

$$\frac{\sum_{t=3}^{\tau} y_t y_{t-1} - \hat{\phi}_{02}\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1} y_{t-2}}{\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1}^2} = \frac{\sum_{t=3}^{\tau} y_t y_{t-2} - \hat{\phi}_{02}\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-2}^2}{\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1} y_{t-2}}.$$

با حل این معادله $\hat{\phi}_{02}$ به طور مستقل بدست می‌آید:

$$\hat{\phi}_{02} = \frac{\sum_{t=3}^{\tau} y_t y_{t-2} \sum_{3}^{\tau} y_{t-1}^2 - \sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1} y_{t-2} \sum_{t=3}^{\tau} y_t y_{t-1}}{\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-2}^2 \sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=3}^{\tau} y_{t-1} y_{t-2}\right)^2}.$$

با قرار دادن مقدار $\hat{\phi}_{02}$ در (۲) و به همین ترتیب با قرار دادن $\hat{\phi}_{02}$ و $\hat{\phi}_{01}$ در (۴) همه پارامترهای قبل از نقطه تغییر برآورد می‌شوند.

همچنین برای برآورد پارامترها بعد از نقطه تغییر، از رابطه ی (۶) می‌توان $\hat{\phi}_{11}$ را بر حسب $\hat{\phi}_{12}$ بدست آورد:

$$\hat{\phi}_{11} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_t y_{t-2} - \hat{\phi}_{12}\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-2}^2}{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-1} y_{t-2}}. \qquad (10)$$

حال با برابر قرار دادن سمت راست عبارتهای (۹) و (۵) معادله ی زیر بدست می‌آید:

$$\frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_t y_{t-2} - \hat{\phi}_{12}\sum_{\tau+1}^{n} y_{t-2}^2}{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-1} y_{t-2}} = \frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-1} y_t - \hat{\phi}_{12}\sum_{\tau+1}^{n} y_{t-2} y_{t-1}}{\sum_{\tau+1}^{n} y_{t-1}^2}. \qquad (11)$$

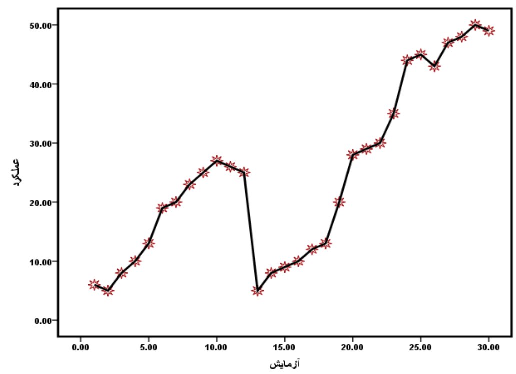
در نتیجه با حل این معادله برآورد $\hat{\phi}_{12}$ بدست می‌آید:

$$\frac{\sum_{t=\tau+1}^{n} y_t y_{t-2} \sum_{\tau+1}^{n} y_{t-1}^2 - \sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-1} y_{t-2} \sum_{t=\tau+1}^{n} y_t y_{t-1}}{\sum_{\tau+1}^{n} y_{t-2}^2 \sum_{\tau+1}^{n} y_{t-1}^2 - \left(\sum_{t=\tau+1}^{n} y_{t-1} y_{t-2}\right)^2}.$$

به طور مشابه با قرار دادن مقادیر بدست آمده در عبارات (۶) و (۷) برآورد سایر پارامترهای بعد از نقطه تغییر نیز بدست می‌آید. مقادیر همه پارامترهای فوق به τ وابسته هستند. چنانچه τ معلوم باشد که مشکلی نخواهد بود، اما در صورت مجهول بودن τ ناچاریم مقدار تابع درستنمایی (یا لگاریتم آن) را به ازای مقادیر مختلف τ حساب کرده و مقداری را که به ازای آن تابع درستنمایی بیشترین مقدار خود را می‌گیرد به عنوان برآورد نقطه تغییر در نظر بگیریم. در ادامه برای بررسی برآوردگرهای بدست آمده، یک مثال مبتنی بر داده‌های شبیه‌سازی شده و یک مثال مبتنی برداده‌های سری‌زمانی مربوط به عملکرد یک نرم‌افزار ارائه می‌شود.

۳ مثال کاربردی

سری‌زمانی عملکرد یک نرم افزار در حال توسعه یک تیم ارزیاب ۷ نفره در طول ۳۰ ماه به بررسی عملکرد یک نرم‌افزار در حال توسعه پرداخته‌اند (دیورسو و گاستالدی [۵]). شکل ۱ نمودار سری‌زمانی داده‌های مذکور را نشان می‌دهد. همانطور که شکل نشان می‌دهد داده‌ها به دلیل وجود روند دارای ناایستایی در میانگین هستند،برای حذف مولفه روند، ابتدا سری‌زمانی تفاضلی شده مرتبه اول داده‌ها $Z_t = Y_t - Y_{t-1}$ را محاسبه می‌کنیم.



شکل ۱: نمودار سری‌زمانی داده‌های عملکرد نرم‌افزار

برای تشخیص مدل مناسب برای سری‌زمانی ابتدا نمودار *ACF* را برای داده‌ها رسم کردیم و چون نمودار، به‌صورت سینوسی به صفر همگراست مدل اتورگرسیو برای داده‌ها مناسب است.

نمودار داده‌های مربوط به سری تفاضلی شده در شکل ۲ آمده است. برای این داده‌ها برآورد پارامترهای قبل و بعد از نقطه تغییر را محاسبه می‌کنیم. آنچه که در شکل ۱ و ۲ مشاهده می‌شود این است که نقطه تغییر در دوازدهمین داده رخ داده است.

برای داده‌های این سری‌زمانی برآوردهای زیر بدست آمد:

$$(\hat{\phi}_{01} = ۰٫۲۴, \hat{\phi}_{11} = ۰٫۵۱۲, \hat{\phi}_{02} = ۰٫۰۹,$$

$$\hat{\phi}_{12} = -۰٫۰۶۹, \hat{\sigma}_0^2 = ۳۶٫۵۹, \hat{\sigma}_1^2 = ۱۳٫۶۳)$$

برای پیش‌بینی آینده سری‌زمانی مدل (۱) باید:

$$\hat{Y}_n(l) = E(Y_{n+l} \mid y_1, \ldots, y_n)$$

را برای $l = ۱,۲,۳,..$ محاسبه کنیم. برای $l = ۱$:

$$\hat{Y}_n(۱) = \phi_{11} E(Y_n \mid y_1, \ldots, y_n) +$$

$$\phi_{12} E(Y_{n-1} \mid y_1, \ldots, y_n) + E(\varepsilon_{n+1} \mid y_1, \ldots, y_n)$$

با توجه به خواص امید ریاضی شرطی داریم:

$$E(Y_n \mid y_1, \ldots, y_n) = y_n$$

همچنین از آن‌جا که ε_{n+1} از $Y_1, \ldots, Y_n$ مستقل است نتیجه می‌شود:

$$E(\varepsilon_{n+1} \mid y_1, \ldots, y_n) = ۰.$$

بنابراین مدل پیش‌بینی برای یک گام بعد خواهد شد:

$$\hat{Y}_n(۱) = \phi_{11} y_n + \phi_{12} y_{n-1}.$$

به‌طور مشابه برای دو گام بعد مدل پیش‌بینی برابر با $\hat{Y}_n(۲) = \phi_{11}\hat{Y}_n(۱) + \phi_{12} y_n$ می‌شود.

برای $l = ۳,۴,..$ نیز می‌توان نشان داد پیش‌بینی عبارت است از:

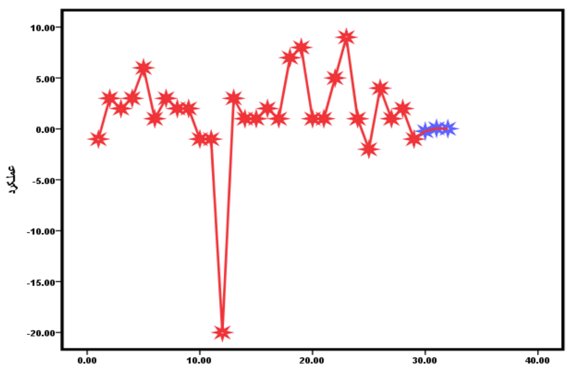
$$\hat{Y}_n(l) = \phi_{11}\hat{Y}_n(l-1) + \phi_{12}\hat{Y}_n(l-2).$$

در نتیجه داریم:

$$\hat{Y}_n(l) = \begin{cases} \phi_{11} y_n + \phi_{12} y_{n-1}, & l = ۱, \\ \phi_{11}\hat{Y}_n(۱) + \phi_{12} y_n, & l = ۲, \\ \phi_{11}\hat{Y}_n(l-1) + \phi_{12}\hat{Y}_n(l-2), & l = ۳,۴,\ldots \end{cases} \qquad (۱۲)$$

از آن‌جا که مدل پیش‌بینی ما برای داده‌های تفاضلی شده می‌باشد در عبارت (۱۱) به جای Y از Z استفاده می‌کنیم و به جای ϕ_{11} و ϕ_{12} مقادیر برآورد شده آن را که به ترتیب ۰٫۵۱۲ و ۰٫۰۶۹− می‌باشد، قرار می‌دهیم. با استفاده از این فرمول سه داده‌ی بعدی پیش‌بینی شد که در نمودار شکل ۲ با رنگ آبی نمایش داده شده است.

برای پیش‌بینی سری‌زمانی اصلی $\hat{Z}_t = \hat{Y}_t - \hat{Y}_{t-1}$ را در رابطه فوق قرار می‌دهیم.



شکل ۲: نمودار سری‌زمانی داده‌های تفاضلی شده برای عملکرد نرم‌افزار

۴ بحث و نتیجه‌گیری

آنچه که در این پژوهش مورد بررسی قرار گرفت رفتار سری‌های‌زمانی در حضور نقطه تغییر بود. همانطور که در این مقاله بیان شد نقطه

تغییر ممکن است تمام پارامترهای مدل را تغییر دهد. بنابراین در این پژوهش مدلی با ۶ پارامتر را در نظر گرفتیم. به‌کمک فرمول‌های ریاضی و برنامه‌های محاسباتی در نرم‌افزار *R* توانستیم برآورد پارامترها را بدست آوریم. این برآوردها چون از روش ماکسیمم درست‌نمایی شرطی بدست آمدند از ویژگی های خوبی برخوردار هستند. در پایان برای یک سری‌زمانی تفاضلی شده، برآورد پارامترها را قبل و بعد از نقطه تغییر بدست آوردیم. با کمک مدلی که ارائه شد می‌توان مقادیر بعدی را نیز پیشگویی کرد.

مراجع

[۱] رحمانپور، آ.، واقعی، ی. و محتشمی برزادران، غ. ر. (۱۴۰۴). برآورد پارامترهای مدل آتورگرسیو مرتبه اول با نقطه تغییر و کاربرد آن در مدل‌سازی نرخ تورم سالانه. مجله علوم آماری، ۱۹(۱)، ۸۱-۹۶.

[2] Akashi, F., Dette, H., & Liu, Y. (2018). Change point detection in autoregressive models with no moment assumptions. *Journal of Time Series Analysis*, **39**, 763-786.

[3] Chakar, S., Lebarbier, E., Levy-Leduc, C., & Robin, S. (2017). A robust approach for estimating change-points in the mean of an AR(1) process. *Bernoulli*, **23**(2), 1408-1447.

[4] Cryer, J., & Chan, K. S. (2008). *Time Series Analysis with Applications in R*. Springer, New York.

[5] D'Urso, P., & Gastaldi, T. (2002). An orderwise polynomial regression procedure for fuzzy data. *Fuzzy Sets and Systems*, **130**, 1-19.

[6] Gombay, E. (2008). Change detection in autoregressive time series. *Journal of Multivariate Analysis*, **99**(3), 451-464.

[7] Hrishnaiah, P. R., & Miao, B. Q. (1988). Review about estimation of change point. In *Handbook in Statistics: Quality Control and Reliability*, North-Holland, **7**, 375-402.

[8] Huskova, M., Praskova, Z., & Steinebach, J. G. (2020). Estimating a gradual parameter change in an AR(1)-process. *Śląski Przegląd Statystyczny*, **18**(24), 254-262.

[9] Shao, X., & Zhang, X. (2010). Testing for change points in time series. *Journal of the American Statistical Association*, **105**(491), 1228-1240.

[10] Timmer, D. H., & Pignatiello Jr, J. J. (2003). Change point estimates for the parameters of an AR(1) process. *Quality and Reliability Engineering International*, **19**(4), 355-369.

[11] Xie, X., Brown, J. S., Bush, D., & Eckert, C. A. (2005). Bubble and dew point measurements of the ternary system carbon dioxide + methanol + hydrogen at 313.2 K. *Journal of Chemical & Engineering Data*, **50**(3), 780-783.

A Look at the Change Point in Second-Order Autoregressive Model

A. Rahmanpour[1]*, Y. Waghei[2] and G. R. Mohtashami Borzadaran[3]

[1,2] Faculty of Mathematics Sciences and Statistics, Birjand University, Birjand, Iran

[3] Faculty of Mathematical Sciences, Ferdowsi University of Mashhad, Mashhad, Iran

Abstract:

Time series is a collection of dependent data, which is observed regularly. In time series analysis, there are sometimes points where the parameters of the model or the distribution of the series change. From a statistical perspective, these points are referred to as change points. In practice, the number and locations of change points are unknown, and discovering and identifying them is of great importance, particularly for modeling and forecasting time series. This paper introduces the $AR(2)$ model in the presence of change points. The parameters of the $AR(2)$ model with a known change point are estimated using the method of maximum conditional likelihood. Finally, a time series example is used to examine the parameter estimates.

Keywords: $AR(2)$ model, Estimation, Maximum likelihood, Parameter, Time Series.

*Corresponding author: ywaghei@birjand.ac.ir