https://doi.org/ 10.22034/jr_iss.2024.728281
اندیشه آماری، سال ۱۴۰۳، دوره ۲۹، شماره ۱، ص ۹۶-۸۷

تبدیل فزونی ثروت و کاربردهای آن

مجتبی اصفهانی[۱]*

[۱] استادیار گروه آمار، دانشگاه ولایت ایرانشهر

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۳/۰۲
تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۱۹

چکیده:

تبدیل فزونی ثروت [۱] ابزاری تحلیلی برای بررسی تمرکز ثروت در انتهای بالای توزیع و سنجش نابرابری اقتصادی است. این تبدیل، به‌عنوان مکملی برای ابزارهایی نظیر منحنی لورنتس یا شاخص جینی، در توصیف رفتار نابرابری در بخش ثروتمند جامعه به‌ویژه در داده‌های دارای چولگی مثبت کاربرد دارد. در این مقاله، به‌صورت نظری و کاربردی، ساختار ریاضی، ویژگی‌های آماری و ریاضی تبدیل فزونی ثروت مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین مرور کاربردهای این تبدیل در اقتصاد، مفاهیم مختلف نظریه قابلیت اطمینان و مفاهیم ریسک و بیمه از دیگر اهداف این مقاله است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل فزونی ثروت، ترتیب تصادفی فزونی ثروت، مفاهیم قابلیت اعتماد، ریسک.

۱ مقدمه

تبدیل فزونی ثروت و ترتیب تصادفی متناظر آن، از مفاهیم نوین و اثرگذار در تحلیل پراکندگی و نابرابری در توزیع‌های احتمالی به‌شمار می‌روند. این مفاهیم از اوایل دهه ۱۹۹۰، هم در بعد نظری و هم در عرصه‌های کاربردی، به‌طور فزاینده‌ای مورد توجه قرار گرفته‌اند و به تدریج جایگاه خود را در حوزه‌های گوناگونی چون تحلیل داده‌ها، ارزیابی ریسک، مهندسی قابلیت اطمینان و نظریه مزایده تثبیت کرده‌اند. در این بخش، سیر تاریخی و مراحل تکامل این مفاهیم به‌صورت گام‌به‌گام مورد بررسی قرار می‌گیرد. ایده‌ی اصلی تبدیل فزونی ثروت نخستین‌بار توسط شیکد و شانتیکومار در اوایل دهه ۱۹۹۰ معرفی شد. آن‌ها در آثار علمی خود از جمله کتاب مرجع‌شان (شیکد و شانتیکومار، [۱۷])، این تبدیل را به‌عنوان ابزاری برای سنجش پراکندگی فراتر از صدک‌ها و همچنین تعریف نوعی ترتیب جدید میان توزیع‌ها مطرح کردند. در همان زمان، فرناندز و همکاران [۶] با معرفی مفهومی مشابه تحت عنوان تبدیل پراکندگی از راست[۲]، به‌صورت مستقل به توسعه این ایده پرداختند و به بررسی ویژگی‌های هندسی و کاربردی آن پرداختند. در دهه بعد، تمرکز پژوهش‌ها بیشتر به سمت گسترش نظری و آزمون‌های آماری مبتنی بر این مفهوم معطوف شد. برای نمونه، بلزونس و همکاران [۲] با طراحی آزمون‌های ناپارامتری و ارائه معیارهایی برای سنجش فاصله میان توزیع‌ها، گام مهمی در استفاده آماری از این تبدیل برداشتند. در همین راستا، کوچار و همکاران [۸] دامنه کاربردهای تبدیل فزونی ثروت را به تحلیل سیستم‌های مهندسی تعمیم دادند. آنان توانستند شرایطی برای مقایسه سیستم‌های سری، موازی و همچنین سیستم‌های نوع k از n را تحت ترتیب تصادفی فزونی ثروت فرمول‌بندی کرده و این ترتیب را برای توزیع‌های ناهمگن نیز بررسی نمایند. همچنین، ارتباط میان تبدیل فزونی ثروت و تبدیل زمان کل آزمون[۳] به‌عنوان ابزاری مؤثر در نظریه قابلیت اطمینان، در همین سال توسط این پژوهشگران تشریح شد. با گسترش تحلیل ریسک و مواجهه با داده‌های دارای دنباله‌های سنگین، نیاز به ابزارهایی برای بررسی رفتارهای انتهایی توزیع‌ها افزایش یافت. کوچار و ژو [۱۲] با معرفی نمودار تبدیل فزونی ثروت، گامی مهم در این مسیر برداشتند. این نمودار که بر پایه لگاریتم نرمال‌شده تبدیل فزونی ثروت بنا شده است، امکان برآورد بصری پارامتر شکل توزیع پارتو تعمیم‌یافته را فراهم می‌کند. در حوزه علوم اکچوئری و بیمه نیز، سوردو

*نویسنده مسئول: m.esfahani@velayat.ac.ir

[1] Excess Wealth Transform
[2] Right Spread Transform
[3] Total Time on Test Transform
[4] Shortfal Expected

[۱۹] نشان داد که تبدیل فزونی ثروت معادل دقیقی از میانگین خسارت افزوده[۴] است. همچنین، ترتیب تصادفی فزونی ثروت به‌عنوان ابزاری کارآمد برای مقایسه ریسک‌های مالی و بیمه‌ای معرفی شد. از دیگر کاربردهای خلاقانه این مفهوم، می‌توان به نظریه مزایده اشاره کرد. در مزایده‌های نوع دوم یا k–قیمتی، فاصله بین قیمت برنده و قیمت‌های دیگر را می‌توان با استفاده از آماره‌های ترتیبی مانند $X_{n:n}-X_{n-۱:n}$ بررسی کرد. کوچار و ژو ($۲۰۱۰a, ۲۰۱۰b$) با تحلیل ترتیب تصادفی فزونی ثروت در این فواصل، نشان دادند که افزایش پراکندگی در توزیع پیشنهادی به افزایش میانگین فاصله بین قیمت برنده و قیمت قبلی منجر می‌شود. آن‌ها همچنین شرایط لازم و کافی برای مقایسه این فواصل در نمونه‌های نمایی ناهمگن را استخراج کردند. از سال ۲۰۲۰ به بعد، تمرکز پژوهش‌ها به سمت گسترش این ترتیب تصادفی در شرایط پیچیده‌تری چون وابستگی میان متغیرها سوق پیدا کرده‌است. برخلاف مطالعات پیشین که عمدتاً بر فرض استقلال اجزا استوار بودند، پژوهش‌های اخیر نظیر ژائو و همکاران [۲۰] و کوچار و ژو [۱۳] به دنبال تعمیم این ترتیب به ساختارهای وابسته با استفاده از توابع مفصل هستند. افزون بر این، کاربردهای نوینی از این تبدیل از جمله در تحلیل نابرابری در داده‌های بزرگ، ارزیابی عدم قطعیت در مدل‌های یادگیری ماشین و شناسایی نمونه‌های پرت در داده‌های نامتوازن در دست بررسی است. پژوهشگران همچنین در حال گسترش این ترتیب تصادفی به کلاس‌های وسیع‌تری از توزیع‌ها مانند لگ–نرمال، وایبل و سایر توزیع‌های سنگین‌دنباله هستند. مفهوم تغییرپذیری، یکی از ارکان اصلی در آمار، احتمال، نظریه قابلیت اطمینان، اقتصاد و بسیاری از شاخه‌های علوم داده است. با اینکه معیارهای کلاسیک تغییرپذیری نظیر میانگین، واریانس و انحراف معیار به‌طور گسترده‌ای مورد استفاده قرار می‌گیرند، اما این معیارها غالباً تصویری ناقص از ساختار توزیع ارائه می‌دهند و فاقد قدرت تشخیصی در بسیاری از کاربردهای واقعی هستند. در دو دهه گذشته، ترتیب‌های تصادفی به‌عنوان ابزارهایی قدرتمند برای مقایسه توزیع‌ها معرفی شده‌اند. این ترتیب‌ها، تغییرپذیری متغیرهای تصادفی را نه‌فقط بر اساس شاخص‌های توصیفی، بلکه از طریق مقایسه کامل توابع توزیع اندازه‌گیری می‌کنند. منبع جامع شیکد و شانتیکومار [۱۷] در این زمینه، مرجع مهمی است که به معرفی ترتیب‌های تصادفی، خواص آن‌ها و کاربردهای گسترده‌شان پرداخته است.

۲ مفاهیم و تعاریف مورد نیاز

در این بخش ابتدا تبدیل فزونی ثروت و ویژگی های آن مورد مطالعه قرار گرفته و در ادامه تعاریف مورد نیاز در مقاله ارائه می‌گردد.

همانطور که اشاره شد تبدیل فزونی ثروت یکی از شناخته‌شده‌ترین ابزارها در مطالعه تغییرپذیری متغیرها می‌باشد که توسط شیکد و شانتیکومار [۱۳] معرفی شده است. همچنین به طور مستقل توسط فرناندز و همکاران [۶] به روش دیگری پیشنهاد و مورد مطالعه قرار گرفته و تبدیل از راست پراکنده نامیده شده است.

تعریف ۱.۲. به طور خاص، برای یک متغیر تصادفی X با تابع توزیع F، تبدیل فزونی ثروت به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$W_F(p) = E[(X-F^{-۱}(p))^+]$$

$$= \int_{F^{-۱}(p)}^{\infty} \bar{F}(x)dx, \quad p\in(۰,۱), \tag{۱}$$

که در آن $F^{-۱}(p)$ و $\bar{F}(x)=۱-F(x)$ به ترتیب تابع چندک و تابع بقای متغیر تصادفی X هستند و $(a)^+=\max\{a,۰\}$.

همچنین تبدیل فزونی ثروت مقیاسی نیز به صورت $SEW_F(p)=\frac{W_F(p)}{\mu}$ ارائه می شود که در آن $\mu=E(X)<\infty$ امیدریاضی متغیر تصادفی X است.

در علم اقتصاد $W_F(p)$ را می‌توان به عنوان میزان ثروت اضافی $۱۰۰(۱-p)$ درصد از ثروتمندترین افراد جامعه در نظر گرفت که مقدار ثروت اضافی آنها حداقل $۱۰۰p$ درصد از درآمد آن‌ها است. به عنوان مثال اگر نحوه توزیع ثروت ۱۰۰ نفر را مورد مطالعه قرار دهیم، $W_F(۰/۴)$ میزان ثروت اضافی ۶۰ درصد از ثروتمندترین افراد جامعه است که ثروت اضافی آنها حداقل ۴۰ درصد از درآمدشان را تشکیل می‌دهد.

شیکد و شانتیکومار [۱۳] ترتیب تصادفی فزونی ثروت را برای مقایسه دو توزیع به صورت زیر ارائه نمودند.

تعریف ۲.۲. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی با توابع توزیع F و G، توابع بقای $\bar{F}$ و $\bar{G}$ و توابع چندک به ترتیب $F^{-۱}$ و $G^{-۱}$ باشند. اگر $p\in(۰,۱)$، $W_F(p)\leq W_G(p)$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی فزونی ثروت است و با نمادهای $X\leq_{ew} Y$ یا $F\leq_{ew} G$ نشان داده می‌شود.

بلزونس و همکاران [۲] ترتیب تصادفی فزونی ثروت را ترتیب از راست پراکنده نامیدند و نشان دادند که متغیر تصادفی X کوچکتر از Y

در ترتیب تصادفی از راست پراکنده است و با نماد $X \leq_{RS} Y$ نشان داده می‌شود اگر و تنها اگر

$$E[(X-F^{-1}(p))]^{+} \leq E[(Y-G^{-1}(p))]^{+}, \quad p\in(0,1).$$

مثال ۳.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی پارتو نوع I با تابع توزیع به شکل

$$F(x)=1-(\frac{x}{\sigma})^{-\alpha}, \quad x>\sigma, \quad \alpha,\sigma>0, \tag{2}$$

باشد. در این صورت برای $\alpha>1$، $E(X)=\frac{\sigma\alpha}{\alpha-1}$ و با استفاده از رابطه (۱) به سادگی می‌توان نشان داد که

$$W_F(p)=\frac{\sigma(1-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}}{\alpha-1},$$

$$SEW_F(p)=\frac{1}{\alpha}(1-p)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}} \quad p\in(0,1), \quad \alpha>1,\sigma>0.$$

فرض کنید $\psi=\{h: h(u)>0, \forall u\in(0,1), h(u)=0, \forall u\notin(0,1)\}$ یک کلاس از توابع باشد. با استفاده از اعضای این کلاس می‌توان تعمیم تبدیل فزونی ثروت را به صورت زیر تعریف نمود،

$$W_F^{(h)}(p)=\int_{F^{-1}(p)}^{\infty} h(F(x))dx, \quad p\in(0,1), \quad h\in\psi.$$

و گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب GEW است و با نمادهای $X \leq_{ew}^{(h)} Y$ یا $F \leq_{ew}^{(h)} G$ نشان داده می‌شود اگر و تنها اگر

$$\int_{F^{-1}(p)}^{\infty} h(F(x))dx \leq \int_{G^{-1}(p)}^{\infty} h(G(x))dx \qquad p\in(0,1).$$

گزاره ۴.۲. فرض کنید X_1 و X_2 دو متغیر تصادفی پارتو نوع I با پارامترهای (σ_i,α_i) برای $i=1,2$ ارائه شده در (۲) باشد. در این‌صورت برای $\sigma_2\leq\sigma_1$، اگر $\alpha_2\leq\alpha_1$ آنگاه $X_1\leq_{ew} X_2$. همچنین برای مقدار ثابت $\alpha_1=\alpha_2$ اگر $\sigma_1\leq\sigma_2$ آنگاه $X_1\leq_{ew} X_2$.

در ادامه چند تبدیل مهم که با تبدیل فزونی ثروت ارتباط دارد بیان می‌شود. برای جزئیات بیشتر درباره ویژگی‌های این تبدیل‌ها به کول [۴] مراجعه شود.

تعریف ۵.۲. فرض کنید X متغیر تصادفی درآمد افراد یک جامعه با توزیع F و میانگین μ باشد. در این صورت

$$L(p)=\frac{1}{\mu}\int_0^p F^{-1}(u)du, \quad p\in(0,1),$$

را تبدیل لورنتس[5] متناظر با توزیع F می نامند. بدیهی است که $F^{-1}(p)=\mu\frac{\partial}{\partial p}L(p)$. این منحنی نقش مهمی در تشخیص نابرابری درآمد در یک جامعه دارد. از دیگر ابزارهای مفید برای سنجش نابرابری درآمد میتوان ضرایب جینی[6] و پترا[7] را نام برد که به صورت زیر بیان می‌شوند

$$G=\int_0^1[u-L(u)]du=1-2\int_0^1 L(u)du,$$

$$P=\frac{1}{\mu}\int_0^{F(\mu)}[\mu-F^{-1}(p)]dp=F(\mu)-L(F(\mu)).$$

تبدیل زمان کل آزمون نیز یک ابزار بسیار مهم در قابلیت اعتماد و مطالعه رفتار تابع نرخ خطر یک توزیع است. این تبدیل و ارتباط آن با تبدیل فزونی ثروت به وسیله کوچار و همکاران [۸] مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است.

تعریف ۶.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع و بقای به ترتیب F و $\bar{F}$ و همچنین تابع چندک F^{-1} باشد. تبدیل زمان کل آزمون متغیر تصادفی X که با نماد $T_F(p)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود،

$$T_F(p)=\int_0^{F^{-1}(p)}\bar{F}(x)dx, \quad p\in(0,1),$$

همچنین تبدیل زمان کل آزمون مقیاسی نیز به صورت $\varphi_F(p)=\frac{T_F(p)}{\mu}$ تعریف می‌شود.

با توجه به تعریف تبدیل فزونی ثروت و تبدیل زمان کل آزمون می‌توان نتیجه گرفت که برای هر متغیر تصادفی نامنفی X با امیدریاضی متناهی μ همواره $W_F(p)+T_F(p)=\mu$ و در نتیجه $SEW_F(p)+\varphi_F(p)=1$.

اصفهانی و همکاران [۵] مطالعه جامعی در زمینه ویژگی‌ها و کاربردهای تبدیل زمان کل آزمون انجام داده‌اند.

تعریف ۷.۲. [۱۴] فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع F و G، توابع بقای $\bar{F}$ و $\bar{G}$ و توابع چندک به ترتیب F^{-1} و G^{-1} باشند.

الف) اگر $p\in(0,1)$، $T_F(p)\leq T_G(p)$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی زمان کل آزمون است و با نماد $X\leq_{ttt} Y$ نشان داده می‌شود.

ب) اگر $x\in R$، $\bar{F}(x)\leq\bar{G}(x)$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب تصادفی معمولی است و با نماد $X\leq_{st} Y$ نشان داده می‌شود.

ج) اگر F^{-1} و G^{-1} از راست پیوسته باشند و $G^{-1}(p)-F^{-1}(p)$ تابعی صعودی باشد آنگاه X را کوچکتر از Y در ترتیب پراکندگی نامیده و با نماد $X\leq_{disp} Y$ نشان می‌دهیم.

---
[5] Lorenz
[6] Gini
[7] Pietra

د) اگر برای هر تابع مقعر صعودی ϕ که $\phi : R \longrightarrow R$ داشته باشیم $E[\phi(X)] \leq E[\phi(Y)]$ آنگاه گوییم X کوچکتر از Y در ترتیب مقعر صعودی[8] است و آن را با نمادهای $X \leq_{icv} Y$ یا $F \leq_{icv} G$ نشان می‌دهیم.

ه) اگر X و Y دو متغیر تصادفی نامنفی با توابع توزیع مطلقا پیوسته F و G و دارای تکیه‌گاه‌های $[0, a)$ و $[0, b)$ باشند که در آن a و b ثابت‌های متناهی یا نامتناهی هستند و $G^{-1}(F)$ تابعی محدب باشد، آنگاه X را کوچکتر از Y در ترتیب تبدیل محدب نامند و با نمادهای $X \leq_c Y$ یا $F \leq_c G$ نشان داده می‌شود.

و) اگر $\frac{G^{-1}F(x)}{x}$ نسبت به $x > 0$ صعودی باشد آنگاه X را کوچکتر از Y در ترتیب ستاره[9] نامیم و با نماد $X \leq_* Y$ نشان می‌دهیم.

۱.۲ مفاهیم قابلیت اعتماد

تعریف برخی از مفاهیم مورد نیاز در مقاله بر اساس نیر و همکاران [۱۵] ارائه می‌شود.

تعریف ۸.۲. فرض کنید F یک توزیع طول عمر با چگالی f و امیدریاضی μ باشد. در این‌صورت داریم:

الف) توزیع F دارای خاصیت نو بهتر از تجدید کهنه در ترتیب تصادفی نرخ خطر معکوس$(NBUR_H)$ [10] است اگر و تنها اگر $\frac{F(x)}{\int_0^x \bar{F}(t)dt}$ نسبت به x صعودی باشد.

ب) توزیع F دارای خاصیت نو بهتر از تعادلی در میانگین[11] $(NBEE)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}(x)dxdt \leq \mu^2.$$

تعریف ۹.۲. فرض کنید F یک توزیع طول عمر باشد آنگاه برای همه $x, y, t \geq 0$:

الف) توزیع F دارای خاصیت نو بهتر از کهنه در ترتیب تصادفی محدب[12] $(NBUC)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_{x+y}^\infty \bar{F}(t)dt \leq \bar{F}(x) \int_y^\infty \bar{F}(t)dt,$$

ب) توزیع F دارای خاصیت نو بهتر از کهنه در میانگین محدب[13] $(NBUCA)$ است اگر و تنها اگر

$$\frac{\int_0^\infty \int_x^\infty \bar{F}(u+t)dudx}{\int_0^\infty \int_x^\infty \bar{F}(u)dudx} \leq \bar{F}(t),$$

ج) توزیع F دارای خاصیت هارمونیک نو بهتر از کهنه در ترتیب تصادفی محدب[14] $(HNBUC)$ است اگر و تنها اگر

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(x+t)dx}{\int_t^\infty \bar{F}(x)dx} \leq \bar{F}(t),$$

د) توزیع F دارای خاصیت نو بهتر از عمر تعادلی در ترتیب تصادفی محدب[15] $(NBELC)$ است اگر و تنها اگر

$$\frac{\int_x^\infty \int_y^\infty \bar{F}(u)dudy}{\int_x^\infty \bar{F}(y)dy} \leq \mu.$$

تعریف ۱۰.۲. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با توزیع $F(.)$ باشد. در این صورت گوییم:

الف) توزیع F دارای خاصیت کهنه بهتر(بدتر) از استفاده شده[16]، $UBA(UWA)$ است اگر و تنها اگر

$$\bar{F}(x+t) \geq (\leq) \bar{F}(t) \exp\{-\frac{x}{m(\infty)}\}, x \geq 0, \quad t \geq 0,$$

ب) توزیع F دارای خاصیت کهنه بهتر از استفاده شده در میانگین[17] $(UBAE)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \geq \mu \exp\{-\frac{x}{m(\infty)}\}.$$

ج) توزیع F[18] دارای خاصیت نو بهتر از استفاده شده (NBU) است اگر و تنها اگر

$$\bar{F}(x+t) \leq \bar{F}(x)\bar{F}(t), x, t > 0.$$

د) توزیع F دارای خاصیت نو بهتر از استفاده شده در مرتبه‌ی دوم[19]، $NBU(2)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_0^x \bar{F}(y)dy \geq \int_0^x \frac{\bar{F}(t+y)}{\bar{F}(t)} dy, x, t \geq 0.$$

ه) توزیع F دارای خاصیت هارمونیک نو بهتر(بدتر) از کهنه در میانگین[20]، $HNBUE(HNWUE)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_x^\infty \bar{F}(t)dt \leq (\geq) \mu \exp\{-\frac{x}{\mu}\}, \quad x \geq 0.$$

---

[8] Increasing Concave
[9] Star
[10] New Better than Renewal Used in the Reversed Hazard Rate Order
[11] New Better than Equilibrium in Expectation
[12] New Better than Used Convex
[13] New Better than Used in the Increasing Convex Average
[14] Harmonic New Better than Used in Convex
[15] New Better than its Equilibrium Life in Convex Order
[16] Used Better than Aged
[17] Used Better than Aged Expectation
[18] New Better than Used
[19] New Better than Used of Order Two
[20] Harmonic New Better than Used in Expectation

و) توزیع F دارای خاصیت هارمونیک نو بهتر از کهنه در میانگین مرتبه‌ی سوم[21]، $HNBUE(3)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_0^\infty \int_t^\infty \bar{F}(u)dudt \leq \mu^2 \exp\{-\frac{x}{\mu}\}, \quad x,t \geq 0.$$

که در آن $m(x)$ تابع میانگین باقیمانده عمر X و $\mu = E(X)$ است.

۳ ویژگی های تبدیل فزونی ثروت

تبدیل فزونی ثروت به‌عنوان ابزاری تحلیلی، دارای ویژگی‌های نظری مهمی است که آن را از سایر ابزارهای سنجش نابرابری متمایز می‌سازد. در این بخش به مهم‌ترین خواص ریاضی و آماری این تابع پرداخته می‌شود.

کوچار و همکاران [۸] نشان دادند که برای دو تبدیل مکانی $Y = X + a, a > 0$ و مقیاسی $Z = cX, c > 0$ تبدیل فزونی ثروت نسبت به تبدیلات مکانی پایا است یعنی $W_Y = W_X$، اما نسبت به تبدیلات مقیاسی پایا نیست و $W_Z = cW_X$. در واقع می‌توان نتیجه گرفت که اگر متغیر تصادفی X نشان‌دهنده درآمد افراد یک جامعه باشد، تبدیل فزونی ثروت نسبت به افزودن یک مقدار ثابت به درآمد تمام افراد جامعه حساس نیست، اما نسبت به تغییر متناسب درآمد افراد جامعه حساس می‌باشد.

همانطور که در بخش ۱ اشاره شد فرناندز و همکاران [۶] تبدیل فزونی ثروت را بر اساس مفهوم پراکندگی بیان نمودند. از این رو می‌توان ارتباط مفهوم پراکندگی و تبدیل فزونی ثروت را مورد بررسی قرار داد. فرناندز و همکاران [۶] نشان دادند که اگر X یک متغیر تصادفی با توزیع F باشد آنگاه واریانس X را می‌توان بر اساس تبدیل فزونی ثروت به صورت $Var[X] = \int_0^1 [\frac{W_F(p)}{1-p}]^2 dp$ بیان نمود. با استفاده از این رابطه می‌توان ضریب تغییرات متغیر تصادفی X را نیز بر حسب تبدیل فزونی ثروت مقیاسی به صورت $CV^2[X] = \int_0^1 [\frac{SEW_F(p)}{1-p}]^2 dp$ به دست آورد.

نتیجه ۱.۳. کوچار و ژو [۱۲] ثابت کردند که برای هر $p_0 \in (0,1)$ واریانس بریده شده را می‌توان بر حسب تبدیل فزونی ثروت به صورت

$$Var[X|X > F^{-1}(p_0)] = \frac{1}{1-p_0} \int_{p_0}^1 [\frac{W_F(p)}{1-p}]^2 dp,$$

بیان نمود.

۱.۳ ارتباط ترتیب تصادفی فزونی ثروت با سایر ترتیب‌ها

در این بخش با استفاده از تعریف ۷.۲ به مطالعه ارتباط ترتیب تصادفی فزونی ثروت با سایر ترتیب‌های تصادفی می‌پردازیم.

نتیجه ۲.۳. با توجه به ارتباط بین تبدیل فزونی ثروت و واریانس می‌توان نتیجه گرفت که اگر $X \leq_{ew} Y$ آنگاه $Var[X] \leq Var[Y]$ و همچنین برای هر تابع صعودی $h : [0,\infty) \longrightarrow R$ نیز

$$Var[h(X)] \leq Var[h(Y)].$$

شیکد و شانتیکومار [۱۷] ارتباط ترتیب فزونی ثروت با سایر ترتیب‌ها را به طور دقیق مورد مطالعه و بررسی قرار داده و نتایج جالب و مفیدی را ارائه داده‌اند که به برخی از آنها اشاره می‌کنیم.

گزاره ۳.۳. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی باشند و $a \in R$. در این‌صورت

الف) اگر $E(X) = E(Y)$ آنگاه $X \leq_{ttt} Y \Longleftrightarrow X \leq_{ew} Y$

ب) $X \leq_{Lir} Y \Longleftrightarrow -X \leq_{ew} -Y$

ج) $X \leq_{ew} Y \Longrightarrow X \leq_{dil} Y$

د) اگر $E(X) = E(Y)$ آنگاه $X \leq_{ew} Y \Longrightarrow X \leq_{cx} Y$

ه) $X \leq_{disp} Y \Longleftrightarrow X \leq_{ew} Y$

و) $X \leq_{ew} Y \Longleftrightarrow X + a \leq_{ew} Y$.

۴ نمودار فزونی ثروت

در این بخش ابتدا روش رسم نمودار تبدیل فزونی ثروت را بیان کرده و سپس با ارائه دو مثال رفتار این نمودار را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. برای این منظور فرض کنید X_1، X_2 و ... و X_n یک نمونه تصادفی از متغیر تصادفی X با توزیع درآمد $F(.)$ باشد. همچنین فرض کنید $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ آماره‌های ترتیبی متناظر با این نمونه تصادفی باشد. با توجه به اینکه توزیع تجربی این نمونه تصادفی به صورت $F_n(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(X_i \leq t)$ بیان می‌شود، بنابراین مقدار تجربی تبدیل فزونی ثروت به صورت زیر تعریف می‌شود:

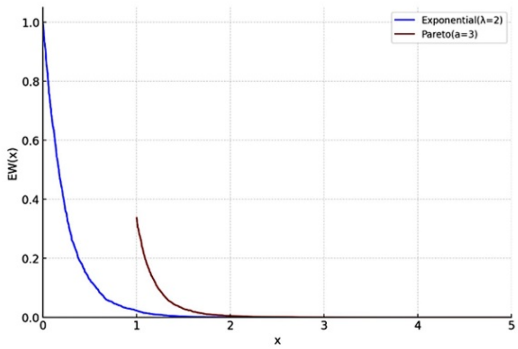
$$W_i = W(\frac{i}{n}; F_n) = \sum_{j=i}^{n-1} \int_{F_n^{-1}(\frac{j}{n})}^{F_n^{-1}(\frac{j+1}{n})} \bar{F}_n(x)dx$$
$$= \sum_{j=i}^{n-1} \frac{n-j}{n}(X_{(j+1)} - X_{(j)}).$$

مشاهده می‌شود که $W_0 = \bar{X}$ و برای $0 \leq i \leq n-1$، $W_{i+1} = W_i - \frac{n-i}{n}(X_{(i+1)} - X_{(i)})$. نمودار تبدیل فزونی ثروت از رسم نمودار

[21] Harmonic New Better than Used in Expectation of Order Three

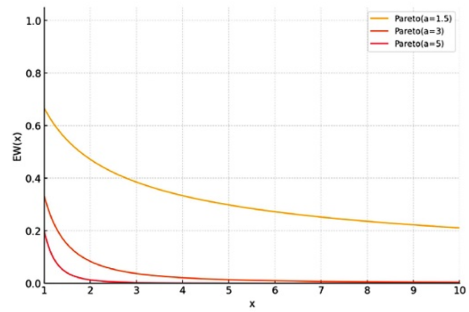
پراکنش نقاط $(\frac{i}{n}, W_i)$ برای $i = ۰, ۱, \ldots, n$، و اتصال این نقاط به یکدیگر حاصل می‌شود. مشابه نمودار تبدیل زمان کل آزمون، نمودار تبدیل فزونی ثروت نیز با افزایش حجم نمونه به نمودار تبدیل فزونی ثروت مقیاسی توزیع $F(.)$ میل می‌کند. برای جزئیات بیشتر به اصفهانی و همکاران [۵] مراجعه شود. در مثال‌های بعدی نمودار فزونی ثروت برای داده‌هایی از توزیع پارتو و همچنین نمایی رسم و رفتار آن مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

مثال ۱.۴. شکل ۱ نمودار فزونی ثروت متغیرهای تصادفی نمایی با پارامتر ۲ و پارتو با پارامتر شکل ۳ (پارامتر مقیاس تاثیری در ساختار نمودار ندارد و در این مثال مقدار ۳ در نظر گرفته شده است) را نشان می‌دهد. در این نمودار، تفاوت بین توزیع نمایی و پارتو در رفتار تابع تبدیل فزونی ثروت کاملاً مشهود است. نمودار فزونی ثروت توزیع نمایی با پارامتر ۲ سریع‌تر کاهش می‌یابد، زیرا داده‌ها متمرکزتر هستند و دُم توزیع سبک‌تر است. یعنی مقدار زیادی از ثروت در مقادیر کوچک‌تر x قرار دارد. اما نمودار فزونی ثروت توزیع پارتو با پارامتر شکل ۳ با شیب کم‌تری کاهش می‌یابد و مدت بیشتری نزدیک به ۱ باقی می‌ماند. این به‌خاطر دُم ضخیم‌تر توزیع پارتو است، که نشان می‌دهد بخش بزرگی از ثروت در مقادیر بالای x متمرکز شده است.



شکل۱. نمودار تبدیل فزونی ثروت برای متغیرهای نمایی و پارتو

مثال ۲.۴. شکل ۲ نمودار تبدیل فزونی ثروت برای توزیع پارتو با سه مقدار مختلف از پارامتر شکل (۱٫۵، ۳ و ۵) نمایش داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود برای مقدار پارامتر ۱٫۵ دم نمودار بسیار ضخیم است و نمودار به صورت آهسته کاهش می‌یابد و این هم نشان‌دهنده این نکته است که مقدار زیادی از ثروت در مقادیر بزرگتر از x باقی‌مانده است و همچنین بالاترین سطح نابرابری را نشان می‌دهد. نمودار میانی که نمودار تبدیل فزونی ثروت برای پارامتر ۳ را نشان می‌دهد، رفتار متعادل‌تری دارد و کاهش آن نسبتا سریع‌تر از حالت قبلی است و همچنین نابرابری ملایم‌تری نسبت به نمودار قبلی دارد. اما نمودار پایینی که نشان‌دهنده تبدیل فزونی ثروت برای توزیع پارتو با پارامتر ۵ است، دارای دم توزیع باریک است و نمودار به سرعت به صفر می‌رسد و همچنین دارای کمترین نابرابری در بین سه توزیع است.



شکل۲. نمودار تبدیل فزونی ثروت برای متغیرهای پارتو

۵ ارتباط با مفاهیم اقتصادی

همان طور که در مقدمه اشاره شد یکی از کاربردهای اصلی تبدیل فزونی ثروت مطالعه رفتار توزیع ثروت افراد یک جامعه می‌باشد. بنابراین بررسی ارتباط این تبدیل با سایر تبدیل‌های اقتصادی مانند شاخص‌های ارزیابی نابرابری درآمد حایز اهمیت می‌باشد. در ادامه به مطالعه این ارتباط پرداخته و رفتار تبدیل فزونی ثروت نسبت به شاخص‌های اقتصادی بیان می‌شود.

با استفاده از تعریف تبدیل لورنتس و سایر شاخص‌های اقتصادی که در تعریف ۵.۲ بیان شده‌است و استفاده از تغییر متغیر در انتگرال تبدیل لورنتس به سادگی می‌توان تبدیل فزونی ثروت را براساس این شاخص‌ها بازنویسی کرد. بنابراین می‌توان نوشت:

$$W_F(p) = \mu(۱ - L(p)) - (۱ - p)F^{-۱}(p),$$

همچنین ضرایب جینی و پترا را نیز می‌توان بر حسب تبدیل فزونی ثروت به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$P = \frac{W_F(F(\mu))}{\mu},$$

$$G = ۱ - \frac{۲}{\mu}\int_{۰}^{۱}[\mu - W_F(u) - (۱ - u)F^{-۱}(u)]du.$$

با توجه به اینکه سایر شاخص‌های اقتصادی مانند تبدیل بن فرونی، لیمکوهلر و زنگا را نیز می‌توان بر حسب تبدیل لورنتس بازنویسی کرد، بنابراین با استفاده از این روابط می‌توان تبدیل فزونی ثروت را نیز مجددا بر حسب شاخص‌های بن‌فرونی، لیمکوهلر و زنگا بازنویسی کرد

که در اینجا از ذکر جزئیات آن خودداری می‌کنیم. برای جزئیات بیشتر به [۳] مراجعه شود.

۶ ارتباط با مفاهیم قابلیت اعتماد

ارتباط تبدیل فزونی ثروت با برخی از مفاهیم قابلیت اعتماد مانند $IFR, IFRA, NBUE, NBRU, RNBU, RNBRU, RNBUE$، $RNBRUE, HRNBUE, GIMRL$ توسط ریزوان و هوساینی [۱۶] مورد مطالعه قرار گرفته است. در این بخش ارتباط تبدیل فزونی ثروت با برخی دیگر از مفاهیم قابلیت اعتماد از جمله مفاهیم سالخوردگی و همچنین مفهوم محدب بودن مورد مطالعه قرار گرفته و نتایج جالبی ارائه می‌گردد.

نیر و همکاران [۱۵] برای متغیر تصادفی طول عمر (نامنفی) X با تابع توزیع $F(.)$، مفهوم میانگین زمان تا رسیدن به لحظه خرابی ($MTTF$[۲۲]) در لحظه T را با نماد $M(T)$ نشان دادند که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$M(T)=\frac{۱}{F(T)}\int_{۰}^{T}\bar{F}(t)dt. \qquad (۳)$$

اگر در رابطه (۳) مقدار تابع میانگین زمان رسیدن به لحظه خرابی را برای لحظه $T=F^{-۱}(p)$ به‌دست آوریم، برای $p\in(۰,۱)$ داریم:

$$\begin{aligned}M(F^{-۱}(p))&=\frac{۱}{F(F^{-۱}(p))}\int_{۰}^{F^{-۱}(p)}\bar{F}(t)dt\\&=\frac{۱}{p}[E(X)-\int_{F^{-۱}(p)}^{\infty}\bar{F}(t)dt],\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به تعریف تبدیل فزونی ثروت و رابطه آن با تبدیل زمان کل آزمون می‌توان نتیجه گرفت که:

$$M(F^{-۱}(P))=\frac{E(X)-W_F(p)}{p}. \qquad (۴)$$

گزاره ۱.۶. اگر F یک توزیع طول عمر باشد آنگاه:

الف) توزیع F دارای خاصیت $NBUR_h$ است اگر و تنها اگر $\frac{p}{\mu-W_F(p)}$ نسبت به p صعودی باشد.

ب) توزیع F دارای خاصیت $NBEE$ است اگر و تنها اگر $\int_{۰}^{۱}\frac{SEW_F(p)\varphi_F'(p)dp}{۱-p}\leq ۱$.

اثبات. الف) با استفاده از رابطه (الف) تعریف ۸.۲ و جایگذاری $F(x)=p$ در شرط برقراری خاصیت $NBUR_h$ یعنی صعودی بودن $\frac{F(x)}{\int_{۰}^{x}\bar{F}(t)dt}$ می‌توان صعودی بودن $\frac{p}{\mu-W_F(p)}$ را برای $p\in(۰,۱)$ نتیجه گرفت.

ب) با تغییر متغیر $F(t)=p$ و همچنین جایگذاری روابط $t=F^{-۱}(p)$ و درنتیجه $dt=\frac{dp}{f[F^{-۱}(p)]}$ در رابطه (ب) تعریف ۸.۲، با استفاده از تعریف تبدیل‌های فزونی ثروت مقیاسی و زمان کل آزمون مقیاسی و ارتباط آن‌ها با یکدیگر به سادگی نتیجه موردنظر به‌دست آمده و اثبات کامل می‌شود. □

گزاره ۲.۶. متغیر تصادفی نامنفی X با توزیع F دارای خاصیت $UBA(UWA)$ است اگر و تنها اگر

$$W_X(p)\leq(\geq)\frac{\int_{F^{-۱}(p)}^{\infty}\bar{F}(x+t)dt}{\exp\{-\frac{x}{m(\infty)}\}},\quad x>۰,\quad p\in(۰,۱).$$

اثبات. برای اثبات کافی است از طرفین نامساوی ارائه شده در قسمت (الف) تعریف ۱۰.۲ بر روی بازه $(F^{-۱}(p),\infty)$ انتگرال‌گیری کنیم. با استفاده از تعریف تبدیل فزونی ثروت و انجام محاسبات جبری، نتیجه موردنظر حاصل می‌شود. □

گزاره ۳.۶. فرض کنید X یک متغیر تصادفی نامنفی با توزیع F باشد. در این‌صورت گوییم:

الف) F دارای خاصیت $UBAE$ است اگر و تنها اگر

$$SEW_F(p)\geq\exp\{-\frac{F^{-۱}(p)}{m(\infty)}\},\quad p\in(۰,۱).$$

ب) F دارای خاصیت $NBU(NWU)$ است اگر و تنها اگر

$$W_X(p)\geq(\leq)\frac{\int_{F^{-۱}(p)}^{\infty}\bar{F}(x+t)dt}{\bar{F}(t)},\quad t>۰,\quad p\in(۰,۱).$$

ج) F دارای خاصیت $NBU(۲)$ است اگر و تنها اگر برای هر $t>۰$،

$$W_X(p)\leq\mu-\int_{۰}^{F^{-۱}(p)}\frac{\bar{F}(x+t)}{\bar{F}(t)}dx.$$

د) F دارای خاصیت $HNBUE(HNWUE)$ است اگر و تنها اگر

$$SEW_F(p)\leq(\geq)\exp\{-\frac{F^{-۱}(p)}{\mu}\},\quad p\in(۰,۱).$$

اثبات. برای اثبات این نتایج مشابه روش اثبات گزاره ۲.۶ عمل کرده و با استفاده از تعریف هر کدام از مفاهیم که در زیربخش ۱.۲ بیان شده و استفاده از تعریف تبدیل فزونی ثروت نتیجه موردنظر به‌دست می‌آید. □

همچنین با استفاده از قسمت (و) تعریف ۱۰.۲ می‌توان نتیجه گرفت که توزیع F دارای خاصیت $HNBUE(۳)$ است اگر و تنها اگر

$$\int_{۰}^{۱}\frac{SEW_F(p)}{f(F^{-۱}(p))}dp\leq\mu\exp\{-\frac{x}{\mu}\},\quad x\geq ۰.$$

[22] Mean Time to Failure

ابومح و همکاران [۱] شرایط برقراری دو کلاس $NBRU$ و $NBRUL$ را برای توزیع F ارائه دادند. با استفاده از نتایج ارائه شده می‌توان به‌سادگی نشان داد که توزیع F دارای خاصیت $NBRU(NWRU)$ است اگر و تنها اگر

$$SEW_F(p) \geq (\leq) \frac{۱ - \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{x+F^{-۱}(p)} \bar{F}(u)du}{\bar{F}(x)}, \quad x > ۰.$$

همچنین توزیع F دارای خاصیت $NBRUL(NWRUL)$ است اگر و تنها اگر

$$SEW_F(p) \geq (\leq) \frac{\frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{\infty}\int_{x+F^{-۱}(p)}^{\infty} \bar{F}(u)dudx}{\int_{۰}^{\infty}\exp\{-sx\}\bar{F}(u)du}, x, s > ۰.$$

یکی از ویژگی‌های مهم در مشخصه‌سازی توزیع‌ها ویژگی محدب بودن است. نیر و همکاران [۱۵] از نقطه نظرهای متفاوتی این ویژگی را مورد مطالعه قرار داده و شرایط برقراری آن را برای توزیع‌های طول عمر ارائه کرده‌اند. در ادامه این بخش به ارتباط کلاس‌های مختلف محدب بودن توزیع‌ها و تبدیل فزونی ثروت پرداخته و شرایط برقراری این ویژگی را بر اساس تبدیل فزونی ثروت و تبدیل فزونی ثروت مقایسی بیان می‌کنیم.

گزاره ۴.۶. اگر F یک توزیع طول عمر باشد آنگاه برای همه $۰ \leq p, q \leq ۱$:

الف) توزیع F دارای خاصیت $NBUC$ است اگر و تنها اگر
$$۱ - \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{F^{-۱}(p)+F^{-۱}(q)} \bar{F}(t)dt \leq (۱-p)SEW_F(q).$$

ب) توزیع F دارای خاصیت $NBUCA$ است اگر و تنها اگر
$$\frac{\int_{۰}^{۱}[۱-\frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{F^{-۱}(p)+F^{-۱}(q)} \bar{F}(u)du]\frac{\varphi_X'(p)}{۱-p}dp}{\int_{۰}^{۱}\frac{SEW_F(p)\varphi_X'(p)}{۱-p}dp} \geq ۱-q.$$

ج) توزیع F دارای خاصیت $HNBUC$ است اگر و تنها اگر
$$۱ - \frac{۱}{\mu}\int_{۰}^{۲F^{-۱}(p)} \bar{F}(x)dx \leq (۱-p)SEW_F(p).$$

د) توزیع F دارای خاصیت $NBELC$ است اگر و تنها اگر
$$\int_{F^{-۱}(q)}^{\infty}\frac{SEW_F(p)\varphi_X'(p)}{۱-p}dp \leq SEW_F(q).$$

اثبات. الف) اگر مقادیر $F(x) = p$ و $F(y) = q$ را در تعریف خاصیت $NBUC$ (قسمت الف تعریف ۹.۲) جایگذاری کنیم، با انجام محاسبات جبری ساده نتیجه مورد نظر به‌دست خواهد آمد.

ب) برای اثبات این قسمت مقادیر $F(x) = p$ و $F(y) = q$ را در تعریف خاصیت $NBUCA$ قرار می‌دهیم. از اینکه $dx = \frac{dp}{f[F^{-۱}(p)]}$ و $-\frac{\mu\varphi_F'(p)}{۱-p} = \frac{۱}{f[F^{-۱}(p)]}$، همچنین ارتباط بین تبدیل‌های فزونی ثروت و زمان کل آزمون به‌سادگی نتیجه مورد نظر حاصل خواهد شد.

ج) با استفاده از قسمت ج تعریف ۹.۲ می‌توان نتیجه گرفت که توزیع F دارای خاصیت $HNBUC$ است اگر و تنها اگر

$$\int_{۲t}^{\infty}\bar{F}(x)dx \leq \bar{F}(t)\int_{t}^{\infty}\bar{F}(x)dx,$$

با قرار دادن $F(t) = p$ در رابطه‌ی فوق نتیجه مورد نظر حاصل خواهد شد.

د) برای اثبات این قسمت نیز مشابه موارد قبلی با قرار دادن $F(x) = q$ و $F(y) = p$ و استفاده از تعریف خاصیت مورد نظر به‌سادگی می‌توان به نتیجه موردنظر رسید. □

۷ ارتباط با مفاهیم ریسک و بیمه

همانطورکه در بخش مقدمه اشاره شد تبدیل فزونی ثروت ابزاری تحلیلی برای بررسی ساختار توزیع‌ها به‌ویژه در نواحی بالایی (دُم راست) توزیع است. این مفهوم که ریشه در مطالعات نابرابری اقتصادی و رفاه دارد، در حوزه‌های تحلیل ریسک و بیمه نیز کاربردهای مهمی پیدا کرده است. در ادامه، این ارتباط در سه بخش تحلیل ریسک، مدل سازی بیمه و رابطه با معیارهای ریسک بررسی می‌شود. کریشنا [۷] یکی از مراجع کاربردی در زمینه نظریه مزایده‌ها است.

۱.۷ تبدیل فزونی ثروت و تحلیل ریسک

در تحلیل ریسک، معمولاً با متغیرهای تصادفی غیرمنفی مانند خسارت، هزینه یا زیان سروکار داریم. توزیع این متغیرها ممکن است دارای دُم‌های سنگین باشد. تبدیل فزونی ثروت برای یک متغیر تصادفی غیرمنفی X با تابع توزیع F که در (۱) تعریف شد میانگین ثروت اضافی را در سطوح مختلف صدکی p نشان می‌دهد. از منظر ریسک، این تابع اندازه‌ای از زیان‌های بزرگ‌تر از صدک p است. بنابراین مقدار بیشتر تبدیل W_F در نقطه p نشان‌دهنده‌ی ریسک بالاتر در بخش بالایی توزیع است. یعنی اگر برای دو متغیر تصادفی X و Y اگر $W_F(p) \leq W_G(p)$ برای همه $p \in ۰(۱)$، گوییم متغیر X نسبت به Y از دیدگاه فزونی ثروت ریسک کمتری دارد.

مثال ۱.۷. فرض کنید X و Y دو متغیر تصادفی به ترتیب با توزیع‌های نمایی با پارامتر ۱ و پارتو با پارامترهای شکل ۲ و مقیاس ۱ باشند. با انجام محاسبات جبری و به‌دست آوردن تبدیل‌های فزونی ثروت برای این دو متغیر مشاهده می‌شود که مقدار تبدیل فزونی ثروت در نقطه $p = ۰/۸$ برای متغیر نمایی برابر ۱ و برای متغیر پارتو حدود ۱/۱۰۵ است. در نتیجه توزیع پارتو دارای $W(۰/۸)$ بالاتری است، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ریسک در دُم راست آن بالاتر است.

برای مطالعه بیشتر در این زمینه و درک کاربرد تبدیل فزونی ثروت در تحلیل ریسک به امبرچت و همکاران [۵] مراجعه شود.

۲.۷ تبدیل فزونی ثروت و مفاهیم بیمه

شرکت‌های بیمه معمولاً فقط بخشی از خسارت را تحت پوشش قرار می‌دهند. نوع خاصی از بیمه، بیمه مازاد [۲۳] است که در آن تنها بخش خسارتی که از مقدار آستانه فراتر رفته، پرداخت می‌شود. فرض کنید در یک قرارداد بیمه X متغیر تصادفی نشان‌دهنده خسارت یا زیان ناخالص و متغیر تصادفی Y نشان‌دهنده مبلغ پرداختی توسط شرکت بیمه در قرارداد بیمه مازاد است. یعنی فقط اگر خسارت از سطح d (فرانشیز) بیشتر شود، شرکت بیمه مازاد آن را پرداخت می‌کند یعنی $Y=(X-d)^+$. بنابراین میانگین پرداخت‌ها برای بیمه‌گر برابر است با

$$E[(X-d)^+]=\int_d^\infty (1-F(x))dx.$$

اگر میزان فرانشیز d را برابر $F^{-1}(p)$ در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان نوشت:

$$W_F(p)=E[(X-F^{-1}(p))^+].$$

در علم بیم‌سنجی تابع $E[(X-F^{-1}(p))^+]$ را کسری مورد انتظار[۲۴] در سطح p می‌گویند. بنابراین می‌توان گفت $W_F(p)$ نشان‌دهنده میانگین پرداخت بیمه‌گر در صورت تعیین فرانشیز در سطح p است. این رابطه یک ابزار کاربردی مفید برای طراحی قراردادهای بیمه‌ای، تعیین فرانشیز بهینه و محاسبه حق بیمه عادلانه است.

۳.۷ تبدیل فزونی ثروت و معیارهای ریسک

در مدیریت ریسک مالی، معیارهایی چون ارزش در معرض ریسک[۲۵] و میانگین کسری مورد انتظار از اهمیت زیادی برخوردار هستند. در تحلیل‌های ریسک اختلاف این دو مقدار برابر با تبدیل فزونی ثروت است یعنی $W_F(p)=VaR_p(X)-ES_p(X)$. این رابطه دقیقاً تفاوت بین میانگین دنباله توزیع و صدک را بیان می‌کند. بنابراین می‌توان گفت اگر $W_F(.)$ زیاد باشد، یعنی تفاوت زیادی بین مقدار مشخص‌شده به‌عنوان ریسک و میانگین واقعی دنباله توزیع وجود دارد. سوردو [۱۸] نتایج جالبی در این زمینه ارائه نموده و ارتباط مفاهیم ریسک را با ترتیب تصادفی فزونی ثروت به خوبی تبیین نموده‌اند. در توزیع‌های دم سنگین، مانند پارتو یا لگ-نرمال، تبدیل فزونی ثروت در صدک‌های بالا افزایش چشم‌گیری دارد و این نشان‌دهنده نادقیق بودن معیار ارزش در معرض ریسک به‌تنهایی و درنتیجه اهمیت استفاده از میانگین ارزش فراتر از ریسک است. به عنوان نکته پایانی می‌توان گفت تبدیل فزونی ثروت ابزاری مفید و قابل تفسیر در تحلیل ساختار دنباله توزیع‌هاست. این ابزار می‌تواند در زمینه‌های مقایسه و ارزیابی ریسک در توزیع‌های خسارت و زیان، طراحی و تحلیل قراردادهای بیمه‌ای، خصوصاً بیمه مازاد و بررسی دقت و کفایت معیارهای ریسک رایج و ارائه بینش افزوده نسبت به خطر دم، نقش اساسی ایفا کند. از آنجا که تبدبل فزونی ثروت اطلاعات بیشتری نسبت به ارزش در معرض ریسک ارائه می‌دهد و درک بهتری از مخاطرات دُم فراهم می‌سازد، می‌تواند به‌عنوان ابزاری مکمل در مدل‌سازی ریسک و تصمیم‌گیری بیمه‌ای مورد استفاده قرار گیرد.

۸ نتیجه‌گیری

در این مقاله ویژگی‌های تبدیل فزونی ثروت مورد بررسی قرار گرفته و با مطالعه ارتباط این تبدیل با مفاهیم قابلیت اعتماد، کاربرد آن در حوزه‌های سالخوردگی و طول عمر بیان شده‌است. همچنین ارتباط تبدیل فزونی ثروت با مفاهیم تحلیل ریسک، بیمه و معیارهای ریسک بیان شده‌است.

مراجع

[1] Abouammoh A, Abdulghani S, Qamber I (1994). On partial orderings and testing of new better than renewal used classes. *Reliability Engneering and System Safety*, **43**, 37–41.

[23] Excess Insurance
[24] Expe□te□ Shortfa□□
[25] Value at Risk

[2] Belzunce, F., Martínez-Riquelme, C. and Ruiz, J. M. (2002). An L-statistic for comparing the right spread order. *Statistics and Probability Letters*, **59**, 321–329.

[3] Cowell, F. A. (2011). *Measuring inequality*. Oxford University Press.

[4] Embrechts, P., Klüppelberg, C. and Mikosch, T. (1997). *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*. Springer.

[5] Esfahani, M., Amini, M. and Mohtashami Borzadaran, G. (2021). On the applications of total time on test transform in reliability. Journal of Statistical Sciences, 15(1), 1-22.

[6] Fernández-Ponce, J. M., Suarez-Llorens, A. and Castaño-Martínez, A. (1996). A new class of partial orderings for comparing variability. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **53(3)**, 261–280.

[7] Krishna, V. (2009). Auction theory. Academic press.

[8] Kochar, S. C., Li, X. and Shaked, M. (2002), The total time on test transform and the excess wealth stochastic orders of distributions, *Advances in Applied Probability*, **34**, 826-845.

[9] Kochar, S. and Xu, M. (2013). Excess wealth transform with applications. *In Stochastic Orders in Reliability and Risk:* In Honor of Professor Moshe Shaked (pp. 273-288). New York, NY: Springer New York.

[10] Kochar, S. and Xu, M. (2023). Further results on excess wealth ordering for heterogeneous systems. *Journal of Statistical Theory and Practice*, 17, Article 41.

[11] Nair, N. U., Sankaran, P. G. and Balakrishnan, N. (2013), *Quantile-Based Reliability Analysis*, Basel: Birkhäuser

[12] Rizwan, U., and Hussainy, S. T. (2016). Relationship among bivariate ageing classes. *International Journal of Mathematics And its Applications*, **4(1-A)**, 23-32.

[13] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (1998). Two variability orders. *Probability in the Engineering and Informational Sciences*, **12(1)**, 1-23.

[14] Shaked, M. and Shanthikumar, J. G. (2007), *Stochastic Orders*, Springer Science and Business Media.

[15] Sordo, M. A. (2009). Comparing tail variabilities of risks by means of the excess wealth order. *Insurance: Mathematics and Economics*, **45(3)**, 466-469.

[16] Sordo, M. A. (2014). A characterization of the excess wealth order through tail conditional expectations. *Insurance: Mathematics and Economics*, **59**, 325–329.

[17] Zhao, Y., Li, Y. and Da, T. (2021). Comparisons of order statistics via the excess wealth order. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 392, 113494.

Excess Wealth Transform and its applications

M. Esfahani[1] *

[1] Department of Statistics, Velayat University of Iranshahr, Iranshahr, Iran

Abstract:

The excess wealth transform is an analytical tool for examining the concentration of wealth at the top end of the distribution and measuring economic inequality. This transform, as a complement to tools such as the Lorenz curve or the Gini index, is used to describe the behavior of inequality in the wealthy segment of society, especially in data with positive skewness. In this paper, the mathematical structure, statistical and mathematical properties of the excess wealth transform are examined theoretically and practically. Also, a review of the applications of this transform in economics and various concepts of reliability theory and the concepts of risk and insurance are other objectives of this paper.

Keywords: Excess Wealth Transform, Excess Wealth Order, Reliability Concepts, Risk.

*Corresponding author: m.esfahani@velayat.ac.ir