https://doi.org/10.22034/jr_iss.2024.728266

اندیشه آماری، سال ۱۴۰۳، دوره ۲۹، شماره ۱، ص ۴۴-۳۳

کاربست مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی سری زمانی مالی

آرزو حاج‌رجبی[۱]*، صدیقه زمانی مهریان[۲]

[۱،۲] گروه آمار، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ دریافت: ۱۴۰۴/۰۲/۱۱

تاریخ پذیرش: ۱۴۰۴/۰۵/۰۱

چکیده:

بازار سرمایه به‌دلیل ماهیت پویای خود در مقایسه با سایر بازارهای مالی مانند سپرده‌های بانکی و اوراق مشارکت، با عدم قطعیت بیشتری مواجه است؛ ازاین‌رو، انتظار می‌رود بازدهی بالاتری نیز داشته باشد. این ویژگی موجب شده است که پیش‌بینی تلاطم بازار مالی و قیمت سهام شرکت‌های پذیرفته‌شده در بورس، همواره مورد توجه پژوهشگران و تحلیل‌گران قرار گیرد. در این مقاله، با بررسی ویژگی‌های مشترک سری‌های زمانی مالی به مدل‌بندی تلاطم بازده‌های روزانه سهام در بازار سرمایه ایران پرداخته می‌شود. سپس، روند کلی برازش مدل‌های میانگین و تلاطم سری‌های زمانی مالی تشریح می‌شود. با توجه به اینکه در بسیاری از سری‌های زمانی مالی، ناهمسانی واریانس مشاهده می‌شود، مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی متقارن و نامتقارن معرفی و بررسی خواهند شد. برای ارزیابی مدل‌های معرفی‌شده، از داده‌های سهام بانک ملت استفاده شده و روند برازش مدل‌های مختلف، همراه با تحلیل حساسیت نسبت به توزیع‌های مختلف عوامل ابداع، ارائه می‌شود. در نهایت، پس از ارزیابی نیکویی برازش مدل پیشنهادی، پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای بازده و تلاطم سهام بانک ملت انجام و با مقادیر واقعی بازده سری مقایسه خواهد شد.

واژه‌های کلیدی: ویژگی‌های تجربی سری زمانی مالی، مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی متقارن و نامتقارن، پیش‌بینی.

۱ مقدمه

در دهه‌های اخیر، وقوع بحران‌های مالی متعدد و افزایش عدم اطمینان در بازارهای مالی، مدیریت ریسک را به یکی از مهم‌ترین دغدغه‌های سیاست‌گذاران، سرمایه‌گذاران و تحلیل‌گران مالی تبدیل کرده است. در این راستا، تلاطم بازارهای مالی به یکی از محورهای اصلی مطالعات حوزه مالی در چند دهه گذشته تبدیل شده است. مدل‌سازی دقیق و مناسب تلاطم نه‌تنها در پیش‌بینی نوسانات آتی کارآمد است بلکه در موضوعاتی چون مدیریت ریسک، بهینه‌سازی پرتفوی سرمایه‌گذاری، قیمت‌گذاری مشتقات مالی، پوشش ریسک و سیاست‌گذاری کلان نیز نقش کلیدی دارد.

در تحلیل‌های مالی، انتخاب روش مناسب برای قیمت‌گذاری، مدیریت و ارزیابی ریسک و همچنین تخصیص بهینه دارایی‌ها بدون بهره‌گیری از مدل‌های آماری دقیق می‌تواند منجر به بروز خطاهای پنهان، نتایج گمراه‌کننده و سوءتفسیرهایی شود که تحلیل‌گران و اقتصاددانان نمی‌توانند از آن چشم‌پوشی کنند.

مطالعه تلاطم‌های زمان‌متغیر سابقه‌ای طولانی دارد. نخستین ارجاع‌ها به این موضوع در آثار بلک و شولز [۵] مشاهده می‌شود؛ آن‌ها اشاره کردند که «شواهدی از نامانایی در واریانس وجود دارد و برای پیش‌بینی آن با استفاده از اطلاعات موجود نیاز به پژوهش بیشتری است». رابرت انگل [۱۱] با هدف رفع فرض محدودکننده ثابت بودن واریانس خطاها، مدل اتورگرسیو ناهم‌واریانس شرطی (*ARCH*)[۱] را معرفی کرد. این مدل چارچوبی نظام‌مند برای مدل‌سازی تلاطم ارائه کرد، به‌طوری‌که فرض می‌شود خطای مدل دارای میانگین صفر و ناهمبستگی پیاپی است اما واریانس شرطی آن بر اساس اطلاعات گذشته متغیر است. در این مدل، واریانس شرطی به‌صورت تابعی از مربع خطاهای گذشته تعریف می‌شود.

با وجود مزایای مدل *ARCH* استفاده عملی از آن با محدودیت‌هایی مانند نیاز به تأخیرهای زیاد و پارامترهای متعدد همراه بود. برای رفع این محدودیت، بولرسلو [۷] مدل اتورگرسیو ناهم‌واریانس شرطی تعمیم‌یافته (*GARCH*)[۲] را پیشنهاد داد. در این مدل علاوه بر وقفه‌های خطای

*نویسنده مسئول: hajrajabi@sci.ikiu.ac.ir

[1] Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

[2] Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity

گذشته از مقادیر گذشته واریانس شرطی نیز استفاده می‌شود که موجب کاهش تعداد پارامترها و افزایش کارایی مدل می‌گردد. به‌مرور، مدل‌های پیشرفته‌تری مانند مدل GARCH تلفیقی (IGARCH)[۳] و GJR − GARCH[۴] به‌منظور پوشش بهتر ویژگی‌هایی مانند حافظه بلندمدت، اثرات نافذ و خوشه‌بندی تلاطم معرفی شدند، تی‌سی [۲۰].

بازار سهام بورس اوراق بهادار تهران به‌عنوان مهم‌ترین بازار سرمایه کشور، طی سال‌های اخیر به دلیل جذب سرمایه‌های گسترده و ایفای نقش در فرآیند خصوصی‌سازی، جایگاه ویژه‌ای در اقتصاد ایران یافته است. با این حال، این بازار با تلاطم‌های شدید و گاه غیرمنتظره‌ای مواجه بوده که لزوم سنجش، مدل‌سازی و پیش‌بینی دقیق ریسک را دوچندان کرده است. با توجه به نوپایی نسبی این بازار در مقایسه با بورس کشورهای توسعه‌یافته، بهره‌گیری از مدل‌های دقیق تلاطم می‌تواند ابزار ارزشمندی برای سرمایه‌گذاران و سیاست‌گذاران برای اتخاذ تصمیم‌های بهینه فراهم کند.

مطالعات گسترده‌ای درباره مدل‌سازی تلاطم در بازارهای مالی جهانی با استفاده از مدل‌های GARCH و توزیع‌های مختلف صورت گرفته است. به‌عنوان نمونه، لیو و همکاران [۱۸] مدل‌سازی تلاطم شاخص روزانه سهام شانگهای را با فرض توزیع چوله‌نرمال تعمیم‌یافته بررسی کردند و دریافتند که این مدل نسبت به سایر مدل‌ها قدرت پیش‌بینی بهتری دارد. همچنین کارل و کالینز [۸] تلاطم در بازار سهام ایرلند را مطالعه کردند و انگل و پتن [۱۲] نیز با بهره‌گیری از داده‌های روزانه شاخص داوجونز، تلاطم این شاخص را با مدل GARCH تحلیل کردند. در مطالعه‌ای دیگر، حاج‌رجبی و همکاران [۱۵] به برازش مدل‌های میانگین و تلاطم تصادفی بر بازده مازاد ماهانه شاخص $S\&P$۵۰۰ پرداختند و با استفاده از روش‌های نیمه‌پارامتری و بیزی به برآورد تلاطم پنهان پرداختند.

در ایران نیز مطالعاتی انجام شده که قابلیت بالای مدل‌های GARCH در مدل‌سازی ویژگی‌های تلاطم بازار سهام تهران را نشان داده‌اند. به‌عنوان مثال، شاپورمحمدی و همکاران [۱] وجود تلاطم خوشه‌ای، اثرات نافذ و حافظه بلندمدت را در این بازار با استفاده از این مدل‌ها تأیید کردند. کشاورزحداد و صمدی [۲] با استفاده از داده‌های روزانه شاخص قیمت سهام، حافظه بلندمدت را در این شاخص بررسی نمودند. حاج‌رجبی و فلاح [۱۶] نیز برازش مدل‌های اتورگرسیو با لحاظ عامل ابداع چوله را روی داده‌های بازده سهام بانک ملت طی سال‌های ۲۰۱۱ تا ۲۰۱۵ انجام دادند و پارامترهای مدل را با روش‌های حداکثر درستنمایی و بیزی برآورد کردند. در مطالعه‌ای دیگر، حاج‌رجبی [۱۵] از مدل اتورگرسیو غیرخطی با تغییر وضعیت مارکف و با روش نیمه‌پارامتری و حداکثر درستنمایی برای تحلیل بازده روزانه سهام شرکت مخابرات ایران استفاده کرد. داده‌های بورس بر اساس تابع مفصل مربوط به ۱۱۰ شرکت تجاری ایران از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۸۹ توسط فلاح مرتضی‌نژاد و همکاران [۴] تحلیل شد. تحلیل‌های بنیادی و تکنیکال در مورد بازده سهام بانک ملت توسط تحلیل‌گران بازار سرمایه به‌طور پیوسته انجام می‌پذیرد ولی رویکرد مدل‌بندی سری زمانی با تکیه بر مدل‌های ناهمواریانس شرطی متقارن و نامتقارن برای اولین بار در این مقاله مورد بررسی قرار گرفته شده است.

در این مقاله، در بخش دوم به معرفی سری‌های زمانی مالی و ویژگی‌های مشترک آن‌ها پرداخته می‌شود. در بخش سوم، تبیین تلاطم سری‌های زمانی مالی و مراحل مدل‌سازی بازده‌های مالی ارائه خواهد شد. در بخش چهارم، مدل‌های قطعی متقارن و نامتقارن بررسی می‌شوند. در بخش پایانی، برای ارزیابی کارایی مدل‌های ارائه‌شده، تحلیل داده‌های مربوط به سهام بانک ملت انجام می‌شود. در این بخش، تحلیل حساسیت مدل‌ها نسبت به عوامل ابداع دارای دم سنگین و نامتقارن و نیز پیش‌بینی درون‌نمونه‌ای بازده و تلاطم مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

۲ سری‌های زمانی مالی

تحلیل سری زمانی مالی به درک مکانیسم‌هایی تمرکز دارد که داده‌های سری زمانی را هدایت می‌کند. انواع مختلفی از اطلاعات مالی در قالب سری زمانی از جمله قیمت سهام، شاخص‌های سهام، نرخ ارز خارجی و غیره وجود دارد. اگر $\{P_t, t = ۱,۲,...\}$ سری زمانی متغیر مالی در نظر گرفته شود که t می‌تواند دقیقه، ساعت، روز و غیره باشد، آنگاه دو شرط ضعیف مانایی در سری زمانی به‌صورت زیر است

$$E(P_t) = \mu,$$

$$Cov(P_{t+h}, P_t) = \gamma_h,$$

که در آن μ به‌عنوان میانگین ثابت سری زمانی و $Cov(P_{t+h}, P_t)$ تابع اتوکواریانس سری زمانی است. به‌طور کلی یک سری زمانی را مانا گوییم هرگاه تغییرات و روند منظمی در میانگین و واریانس سری وجود داشته باشد. معمولاً سری زمانی قیمت شرایط مانایی را ندارد ولی لگاریتم سری زمانی بازده قیمت $r_t = \ln \frac{P_t}{P_{t-۱}}$ که لگاریتم بازده نامیده

³ GARCH Integrated

⁴GARCH Glosten–Jagannathan–Runkle

⁵Lags Time

می‌شود دارای شرایط مانایی است. همبستگی بین بازده در دوره t (r_t) و بازده در h دوره قبل (r_{t-h}) که در آن h به عنوان تأخیر زمانی [5] در نظر گرفته می‌شود، معیار سنجش ارتباط خطی بین بازده‌ها است که ضریب خودهمبستگی [6] (ACF) نامیده می‌شود و به‌صورت

$$\rho_h = \frac{Cov(r_t, r_{t-h})}{\sqrt{Var(r_t)Var(r_{t-h})}},$$

محاسبه می‌شود که در آن $Cov(r_t, r_{t-h})$ و $Var(r_t)$ به‌ترتیب اتوکواریانس و واریانس بین بازده‌ها است.

۱.۲ ویژگی‌های سری زمانی مالی

ویژگی‌های تجربی و مشترک که در هنگام برازش مدل به متغیرهای مالی باید مورد توجه قرار گیرد، ویژگی‌های سبک‌وار [7] نامیده می‌شوند، تی‌سی [۲۰].

۲.۲ ویژگی‌های آماری بازده‌های مالی

در این بخش به‌طور مختصر به بیان چند ویژگی مشترک بازده سری‌های زمانی مالی می‌پردازیم.

۱. **نداشتن همبستگی.** بازده‌ها دارای همبستگی ضعیف در تأخیرهای متفاوت هستند. در این حالت ACF بازده‌ها معمولاً حالت مستقل یا وابستگی ضعیف را نشان می‌دهد و فرض معنادار بودن $H_0 = \rho_1 = \ldots = \rho_m = 0$ رد نمی‌شود. ACF در مدل‌های خطی سری زمانی نقش عمده‌ای را ایفا می‌کنند. اگر در همبستگی‌نگار، ACF بازده‌ها داخل باند اطمینان قرار گیرد آنگاه بین بازده‌ها وابستگی وجود ندارد ولی اگر در بعضی از تأخیرها مقدار ACF خارج از باند باشد، می‌توان به بازده‌ها مدل‌های کلاسیک سری زمانی مدل‌های اتورگرسیو میانگین متحرک $(ARMA)$ [8] را برازش داد. برای مطالعه‌ی بیشتر به مرجع تی‌سی [۲۰] مراجعه شود.

۲. **دم‌های پهن.** معمولاً توزیع غیرشرطی بازده‌ها را نرمال فرض می‌کنند اما شاخص کشیدگی که یکی از شاخص‌های شکل توزیع است و میزان کشیدگی یا پخی نوک منحنی توزیع داده‌ها بر مبنای منحنی نرمال استاندارد را بیان می‌کند. این شاخص نشان می‌دهد که بازده‌های مالی دارای دم‌های پهن‌تر از نرمال و چگالی بیشتر در اطراف مرکز هستند به‌طوری‌که مقادیر کرانگین [9] محتمل‌تر هستند. به این خاصیت در بازده‌ها خاصیت کشیدگی [10] می‌گویند.

۳. **خوشه بندی تلاطم.** مقادیر بزرگ و کوچک در یک نمونه از سری زمانی بازده‌ها گرایش به خوشه‌بندی دارند. در این حالت انحراف معیار شرطی بازده‌های تحت مطالعه در بعضی از دوره‌ها زیاد و در بعضی از دوره‌ها کم است که به این خاصیت خوشه‌بندی تلاطم [11] سری زمانی بازده‌ها می‌گویند.

۴. **سنگینی دم مانده‌ها.** بعد از مدل‌بندی بازده‌ها توسط مدل‌های میانگین و تلاطم، سری زمانی مانده‌ها دارای توزیع با دم‌های سنگین‌تر از نرمال هستند.

۵. **وابستگی با دامنه طولانی.** مقادیر خودهمبستگی جزئی [12] $(PACF)$ قدرمطلق یا توان دوم سری زمانی بازده‌ها به کندی کاهش می‌یابد. اگر مقدارهای سری بازده‌ها واقعاً مستقل باشند باید هر تبدیل غیرخطی آنها نیز مستقل باشند که در مورد سری زمانی بازده‌ها فرض استقلال و هم‌توزیع بودن وجود ندارد. سری $|r_t|$ و r_t^2 دارای خاصیت وابستگی با دامنه‌ی طولانی است به‌طوریکه $\sum_{i=0}^{\infty} |\rho_i| = \infty$ که در آن ρ_i، ACF مربوط به سری $|r_t|$ و یا r_t^2 است. در همبستگی‌نگار، ACF قدرمطلق بازده‌ها در مقابل تأخیر زمانی به کندی کاهش می‌یابد که این ویژگی وابستگی با دامنه طولانی [13] نامیده می‌شود.

۶. **تاثیر نافذ.** معیارهای اندازه‌گیری تلاطم به‌طور منفی با سری زمانی بازده‌ها دارای همبستگی هستند یعنی تاثیر سری زمانی بازده منفی روی معیارهای تلاطم بیش از سری زمانی بازده مثبت است که این خاصیت تاثیر نافذ [14] در سری زمانی بازده‌ها نامیده می‌شود.

۷. توزیع سری زمانی بازده‌ها در دوره‌های طولانی مثل ماه، نیمسال

---

[6] Coefficient Autocorrelation
[7] Fact Stylized
[8] Average Moving AutoRegressive
[9] Value Extrem
[10] Leptokurtic
[11] Clustring Volatility
[12] Function Autocorrolation Partial
[13] Dependence Long-Rang
[14] Effect Leverage

و سال نسبت به دوره‌های کوتاه‌تر مثل روزانه یا ساعت نزدیک‌تر به توزیع نرمال است که به این خاصیت گاوسی تجمیعی [۱۵] می‌گویند.

۳ تلاطم سری زمانی بازده‌ها

یکی از ویژگی‌های مهم تلاطم، پنهان بودن آن است. به‌طور مثال سری زمانی بازده روزانه سهام شرکت خاصی را در نظر بگیرید، تلاطم روزانه به‌طور مستقیم از روی یک مشاهده قابل محاسبه نیست ولی اگر در یک روز معاملاتی سری زمانی بازده‌های ۱۰ دقیقه‌ای در اختیار باشد می‌توان تلاطم روزانه را برآورد کرد که درستی چنین برآوردی نیز نیازمند مطالعه دقیق است. اگر چه تلاطم به‌طور مستقیم قابل مشاهده نیست اما دارای ویژگی‌هایی است که می‌توان در سری زمانی بازده‌ها مشاهده کرد.

اگر μ_t و $\sigma_t^۲$ میانگین و واریانس شرطی سری زمانی بازده در زمان t به شرط اطلاعات تا زمان t، $(\mathscr{F}_{t-۱})$ باشد آنگاه می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} \mu_t &= E(r_t|\mathscr{F}_{t-۱}), \\ \sigma_t^۲ &= Var(r_t|\mathscr{F}_{t-۱}) = E[(r_t-\mu_t)^۲|\mathscr{F}_{t-۱}] = Var(a_t|\mathscr{F}_{t-۱}), \end{aligned} \tag{۱}$$

که در آن a_t اشاره به عامل ابداع [۱۶] دارد و به‌عنوان یک سری نوفه‌ی سفید (دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم توزیع با میانگین صفر) است. μ_t معادله‌ی میانگین در زمان t است که توسط مدل‌های ساده کلاسیک $ARMA(p,q)$ مدل‌بندی می‌شود و $\sigma_t^۲$ اشاره به معادله تلاطم دارد. در این صورت رابطه‌ی (۱) را می‌توان به‌صورت

$$\begin{aligned} r_t &= \mu_t + a_t, \\ \mu_t &= \phi_۰ + \sum_{i=۱}^{p} \phi_i r_{t-i} + a_t - \sum_{i=۱}^{q} \theta_i a_{t-i}, \end{aligned}$$

نوشت. مرتبه‌ی p و q از مدل $ARMA$ معمولاً وابسته به طول دوره‌ی زمانی است به‌طوریکه اگر بازده‌ها روزانه باشد، شامل وابستگی ضعیفی در سری زمانی بازده‌ها است ولی اگر داده‌ها ماهانه باشد همبستگی معنی‌داری بین بازده‌ها وجود ندارد.

مدل‌های تلاطم را می‌توان به دو دسته تقسیم کرد. دسته‌ی اول مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی اتورگرسیو و تعمیم‌های آن و دسته‌ی دوم مدل‌های تلاطم تصادفی هستند که در دسته‌ی اول تلاطم به عنوان تابعی قطعی و در دسته‌ی دوم تلاطم به‌عنوان تابعی تصادفی در نظر گرفته می‌شود .

۱.۳ مدل‌بندی بازده‌های مالی

برای مدل‌بندی میانگین و تلاطم بازده‌های سری زمانی می‌توان مراحل زیر را دنبال کرد.

۱. وابستگی پیاپی در داده‌ها توسط همبستگی‌نگار و نمودار خودهمبستگی جزئی بررسی می‌شود و سپس میانگین بازده‌ها (μ_t) توسط مدل‌های $ARMA$ مدل‌بندی می‌شود تا به مدل‌بندی تلاطم روی سری مانده‌ها[۱۷] $\{r_t-\hat{\mu}_t\} = \{\hat{a}_t\}$ پرداخته شود.

۲. از مانده‌های معادله‌ی میانگین، $\hat{a}_t$ برای آزمون کردن وجود ناهم‌واریانسی شرطی اتورگرسیو استفاده می‌شود. همبستگی‌نگار و نمودار خودهمبستگی جزئی و همچنین آزمون لیونگ باکس در سری توان دوم مانده‌ها $\hat{a}_t^۲$ و یا سری قدرمطلق مانده‌ها $|\hat{a}_t|$ برای کنترل کردن وجود ناهم‌واریانسی شرطی به‌کار برده می‌شود. اگر همبستگی بین سری $\hat{a}_t^۲$ و یا $|\hat{a}_t|$ وجود داشته باشد، مدل‌بندی تلاطم نیاز است.

۳. اگر وجود ناهم‌واریانسی شرطی تأیید شود، یک مدل تلاطم در نظر گرفته می‌شود و برآورد توأم پارامترهای معادله‌ی میانگین و تلاطم توسط روش‌های حداقل توان‌های دوم، کلاسیک و یا بیزی به‌دست می‌آید.

۴. بررسی نیکویی برازش مدل میانگین و تلاطم برازش شده با استفاده از مانده‌های استاندارد شده $\tilde{a}_t = \frac{\hat{a}_t}{\hat{\sigma}_t}$ و سری توان دوم آن‌ها $\tilde{a}_t^۲$، که می‌تواند با انجام مراحل زیر دنبال شود.
۱. مدل برازش داده شده به میانگین سری مناسب است اگر سری $\tilde{a}_t$ به‌صورت دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشد. از آزمون لیونگ باکس، نمودار چندک- چندک و آماره‌های مربوط به چولگی و کشیدگی استفاده می‌شود.
۲. مدل برازش داده شده به تلاطم سری مناسب است اگر سری $\tilde{a}_t^۲$ به‌صورت دنباله‌ای از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع باشد. از آزمون لیونگ باکس، نمودار چندک- چندک و آماره های مربوط به چولگی و کشیدگی استفاده می‌شود.

اکثر سری زمانی بازده‌ها، دارای همبستگی‌های پیاپی ضعیف هستند و اگر همبستگی وجود داشته باشد می‌توان از یک مدل ساده $ARMA$ به‌عنوان معادله‌ی میانگین سری زمانی بازده استفاده کرد.

[15] Aggregational Gaussianity
[16] Innovation
[17] Series Residual

۴ مدل‌های قطعی تلاطم بازده‌های مالی

مدل‌های قطعی تلاطم را می‌توان به دو دسته متقارن و نامتقارن تقسیم‌بندی کرد. در مدل‌های متقارن واریانس شرطی فقط به مقدار و نه علامت بازده مالی بستگی دارد. این ویژگی به‌ندرت مطابق با نتایج تجربی است زیرا در بازده‌های مالی ویژگی تاثیر نافذ وجود دارد به‌طوری که تلاطم پس از شوک‌های منفی بیشتر از شوک‌های مثبت از همان اندازه افزایش می‌یابد. از مدل‌های متقارن قطعی تلاطم می‌توان به مدل‌های *ARCH* *GARCH* و *IGARCH* و از مدل‌های نامتقارن قطعی تلاطم می‌توان به مدل‌های، *GJR − GARCH* *EGARCH* و *APARCH* اشاره کرد. برای اطلاعات بیشتر در مورد خاصیت مدل‌ها، تعیین مرتبه‌ی مدل، برآورد پارامترهای مدل، تشخیص نیکویی برازش با استفاده از تحلیل مانده‌های استاندارد شده مدل و نیز پیش‌بینی می‌توان به مرجع تی سی (۲۰۱۳) مراجعه کرد.

۱.۴ مدل‌های قطعی و متقارن تلاطم بازده‌های مالی

در این قسمت اشاره‌ای به مدل‌های قطعی و متقارن تلاطم بازده‌های مالی می‌شود.

۱. **مدل** *ARCH*. مدل‌های ناهم‌واریانس شرطی اتورگرسیو، *ARCH* اولین بار توسط اینگل (۱۹۸۲) برای مدل‌بندی تلاطم معرفی شد. ایده‌ی اصلی مدل‌های *ARCH* به این صورت است که سری a_t به طور پیاپی همبسته نیست اما وابستگی به مقادیر گذشته از طریق توان‌های مختلف قدرمطلق سری از جمله توان دوم قدرمطلق سری است. مدل $ARCH(m)$ که در آن m مرتبه‌ی مدل است به‌صورت

$$r_t - \mu_t = a_t = \sigma_t \varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_i a_{t-i}^۲,$$

نوشته می‌شود که در آن ε_t یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس یک است و نیز به ازای $i = ۱,۲,...$ مستقل از a_{t-i} است.

۲. **مدل** *GARCH*. اگر چه مدل‌های *ARCH* مدل‌های ساده‌ای هستند ولی برای برازش مناسب به داده‌ها نیاز به تعداد زیادی پارامتر دارند تا بتوانند تلاطم یک سری زمانی بازده دارایی مالی را توصیف کنند. مدل *GARCH* توسط بولرسلو و همکاران (۱۹۹۴) پیشنهاد شد که درآن واریانس شرطی به s تأخیر از واریانس شرطی گذشته علاوه بر شوک‌های گذشته وابسته است. رابطه‌ی مدل $GARCH(m,s)$ به‌صورت

$$r_t - \mu_t = a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \qquad (۲)$$
$$\sigma_t^۲ = \alpha_۰ + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_i a_{t-i}^۲ + \sum_{j=۱}^{s} \beta_j \sigma_{t-j}^۲,$$

نوشته می‌شود که در آن ε_t یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس یک است و نیز به ازای $i = ۱,۲,...$ مستقل از a_{t-i} است.

۳. **مدل** *IGARCH*. مدل *GARCH* در رابطه‌ی (۲) برای سری a_t معادل مدل *ARMA* برای سری $a_t^۲$ است که می‌توان به‌صورت

$$a_t^۲ = \alpha_۰ + \sum_{i=۱}^{m} (\alpha_i + \beta_i) a_{t-i}^۲ + \eta_t - \sum_{j=۱}^{s} \beta_j \eta_{t-j},$$

نوشت که در آن $\eta_t = a_t^۲ - \sigma_t^۲$ است.

۲.۴ مدل‌های قطعی و نامتقارن تلاطم بازده‌های مالی

در این بخش اشاره‌ای به مدل‌های قطعی و نامتقارن تلاطم بازده‌های مالی می‌شود.

۱. **مدل** *EGARCH*. نلسون [۱۹] برای نشان دادن عدم تقارن بین سری زمانی بازده‌های مثبت و منفی در تلاطم که در مدل‌های متقارن *GARCH* وجود ندارد، مدل *EGARCH* را پیشنهاد داد که موجب پوشش بیشتر ویژگی‌های تجربی سری زمانی مالی می‌شود. همچنین از آن جهت که در مدل‌های *GARCH* تلاطم تابعی از اندازه و بزرگی و نه علامت شوک‌ها و تلاطم مقادیر گذشته است. برای تضمین مثبت بودن تلاطم باید دو شرط برقرار باشد. شرط اول اینکه واریانس شرطی، ترکیب خطی از متغیرهای شوک و تلاطم مثبت به همراه ضرایب مثبت در نظر گرفته شود و شرط دوم اینکه از لگاریتم تلاطم به‌عنوان تابعی خطی از بزرگی و علامت شوک‌ها و تلاطم‌های گذشته استفاده شود که نتیجه آن مدل‌بندی *EGARCH* است. در مدل *EGARCH* برخلاف مدل‌های *GARCH* بدون هیچ محدودیت و شروطی روی پارامترها، تلاطم مثبت است. در این مدل‌ها خطا به‌صورت

$$g(\varepsilon_t) = \theta \varepsilon_t + \gamma[|\varepsilon_t| - E(|\varepsilon_t|)], \qquad (۳)$$

در نظر گرفته می‌شود که در آن θ و γ مقادیر ثابت حقیقی هستند. دنباله‌های $\{\varepsilon_t,\ t=۱,۲,...,n\}$ و $\{|\varepsilon_t|-E(|\varepsilon_t|),\ t=۱,۲,...,n\}$ مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و توزیع‌های پیوسته هستند به‌طوری‌که $E(g(\varepsilon_t))=۰$. در رابطه‌ی (۳) به قسمت $|\varepsilon_t|-E(|\varepsilon_t|)$ اثر اندازه [18] و به قسمت $\theta\varepsilon_t$ اثر علامت [19] می گویند.

۲. **مدل** $GJR-GARCH$. گلاستن و همکاران [۱۳] مدل تلاطم دیگری را برای لحاظ کردن ویژگی تأثیر نافذ تحت عنوان $GJR-GARCH$ معرفی کردند. یک مدل $GJR-GARCH(m,s)$ به‌صورت

$$r_t-\mu_t=a_t=\sigma_t\varepsilon_t,$$
$$\sigma_t^۲=\alpha_۰+\sum_{i=۱}^{m}(\alpha_i+\gamma_iI_{t-i})a_{t-i}^۲+\sum_{j=۱}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^۲,$$

نوشته می‌شود که در آن I_{t-i} یک تابع نشانگر به‌صورت

$$I_{t-i}=\begin{cases}۱, & if \quad a_{t-i}<۰\\ ۰, & if \quad a_{t-i}\geq ۰\end{cases}$$

است و γ_i ، α_i و β_j پارامترهای نامنفی هستند که شرایطی مشابه مدل $GARCH$ برای آن‌ها لحاظ می‌شود. پارامتر γ_i ارائه دهنده قسمت تاثیر نافذ است.

۳. **مدل** $APARCH$. مدل $APARCH$ دینگ و همکاران (۱۹۹۳) خاصیت تأثیر تیلور را علاوه بر تأثیر نافذ در خود دارد. یک مدل $APARCH(m,s)$ به‌صورت

$$r_t-\mu_t=a_t=\sigma_t\varepsilon_t, \qquad (۴)$$
$$\sigma_t^{\delta}=\alpha_۰+\sum_{i=۱}^{m}\alpha_i(|a_{t-i}|-\gamma_ia_{t-i})^{\delta}+\sum_{j=۱}^{s}\beta_j\sigma_{t-j}^{\delta},$$

نوشته شود که در آن $\{\varepsilon_t\}$ یک دنباله از متغیرهای تصادفی مستقل و هم‌توزیع با میانگین صفر و واریانس یک است و δ یک عدد حقیقی مثبت و ضرایب γ_i، α_i و β_i تحت شرایط نظمی قرار می‌گیرند که تلاطم مثبت باشد. مدل‌های زیادی از این مدل حاصل می‌شود که می‌توان به مدل‌های زیر اشاره کرد.

(آ) با قرار دادن $\delta=۲$ و $\gamma_i=۰(i=۱,۲,...,m)$ در رابطه‌ی (۴) مدل $GARCH$ حاصل می‌شود.

(ب) با قرار دادن $\delta=۲$ در رابطه‌ی (۴) مدل $GJR-GARCH$ حاصل می‌شود.

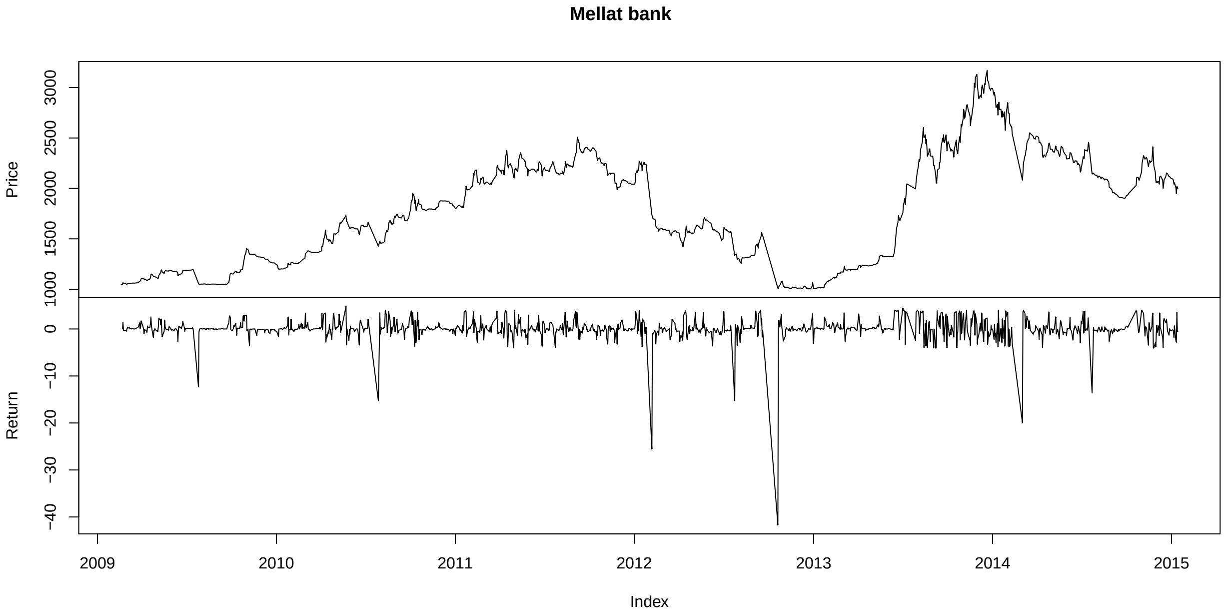
(ج) با قرار دادن $\gamma_i=۰(i=۱,۲,...,m)$ و $\beta_j=۰(j=۱,۲,...,s)$ مدل $ARCH$ غیرخطی هیگینز و برا (۱۹۹۲) حاصل می‌شود.

(د) زمانی که $\delta\to۰$ است مدل $EGARCH$ حاصل می‌شود.

۵ تحلیل داده‌های سهام بانک ملت

داده‌های مربوط به قیمت پایانی روزانه سهام بانک ملت از تاریخ ۲۰۰۹/۰۲/۱۸ تا تاریخ ۲۰۱۵/۰۱/۱۴ از سایت "https://tsetmc.com" مربوط به شرکت مدیریت فناوری بورس تهران استخراج شده است. از درصد سری زمانی بازده، r_t برای تحلیل استفاده می‌شود. نمودار سری زمانی قیمت به همراه نمودار سری زمانی بازده در شکل ۱ رسم شده است. با استناد به شکل دیده می‌شود که سری قیمت پایانی سهام فاقد مانایی است ولی سری زمانی بازده دارای مانایی در میانگین است هم‌چنین تلاطم در بعضی دوره‌ها زیاد و در بعضی دوره‌ها کم می‌باشد که نشان دهنده‌ی ویژگی خوشه‌بندی تلاطم در سری زمانی بازده‌ها و نیاز به مدل‌بندی تلاطم است.

[18] Effect Magnitude
[19] Effect Sign



شکل۱. نمودار سری زمانی قیمت و درصد بازده روزانه سهام بانک ملت از تاریخ ۲۰۰۹/۰۲/۱۸ تا تاریخ ۲۰۱۵/۰۱/۱۴.

از آزمون t−استیودنت برای صفر بودن میانگین سری زمانی بازده استفاده شده است که با توجه به p−مقدار به دست آمده ۰/۴۲۷ فرض صفر بودن میانگین سری رد نمی‌شود. مقدار میانگین نمونه‌ای سری زمانی بازده ۰/۰۴۸ است. همبستگی‌نگار سری زمانی بازده و نمودار خودهمبستگی جزئی قدرمطلق سری زمانی بازده در شکل ۲ رسم شده است. با توجه به این شکل، مقادیر ACF و PACF سری زمانی بازده (نمودارهای (a) و (b)) در تأخیر ۱ خارج از باند اطمینان است. در نتیجه می‌توان مدل $AR(۱)$، $MA(۱)$ و یا مدل $ARMA(۱,۱)$ را برای برازش به میانگین سری پیشنهاد داد. در نمودارهای (c) و (d) شکل ۲، همبستگی‌نگار و نمودار خودهمبستگی جزئی مربوط به قدر مطلق سری زمانی بازده نشان داده شده است. با توجه به شکل مشهود است که همبستگی بین آنها وجود دارد و مبین این موضوع است که سری زمانی بازده‌ها به طور پیاپی همبسته نیستند ولی وابستگی بین آنها وجود دارد که مدل‌های تلاطم برای پوشش چنین وابستگی مناسب هستند. همچنین آزمون لیونگ باکس برای آزمون عدم همبستگی بین مقادیر درصد سری زمانی بازده و قدرمطلق آن استفاده شده است. با توجه به p−مقدار ۰/۰۲۷ در آزمون لیونگ باکس برای درصد سری زمانی بازده می‌توان دریافت که همبستگی بین مقادیر سری وجود دارد و می‌توان با استفاده از مدل‌های کلاسیک این همبستگی را توصیف کرد و نیز با توجه به p−مقدار کمتر از ۰/۰۵ در آزمون لیونگ باکس برای قدرمطلق درصد سری زمانی بازده می‌توان دریافت که همبستگی بین مقادیر قدرمطلق سری وجود دارد که نیاز به مدل‌بندی تلاطم دارد. یکی از مدل‌های کاربردی برای برازش تلاطم سری بازده، مدل $GARCH(۱,۱)$ است. برای میانگین سری، مدل $AR(۱)$ و برای تلاطم، مدل $GARCH(۱,۱)$ و نیز توزیع خطا t−استیودنت در نظر گرفته شده است. با استناد به نتایج مربوط به برآورد پارامترها، تمام پارامترها در سطح اطمینان ۹۵ درصد معنی دار است و مدل مربوطه به‌صورت

$$\begin{aligned} r_t &= ۰/۲۶۱۱۸۷ r_{t-۱} + a_t, a_t = \sigma_t \varepsilon_t, \\ \sigma_t^۲ &= ۰/۱۲۰۱۵ + ۰/۵۷۶۷ a_{t-۱}^۲ + ۰/۴۲۲۲۶ \sigma_{t-۱}^۲ \end{aligned} \quad (۵)$$

نوشته می‌شود که در آن $\{\varepsilon_t\}$ دارای توزیع t−استیودنت استاندارد شده با درجه آزادی ۲/۷۵۵ است. معیار اطلاع آکائیک[۲۰] (AIC) که به‌صورت

$$AIC = -۲\log(likelihood) + ۲k$$

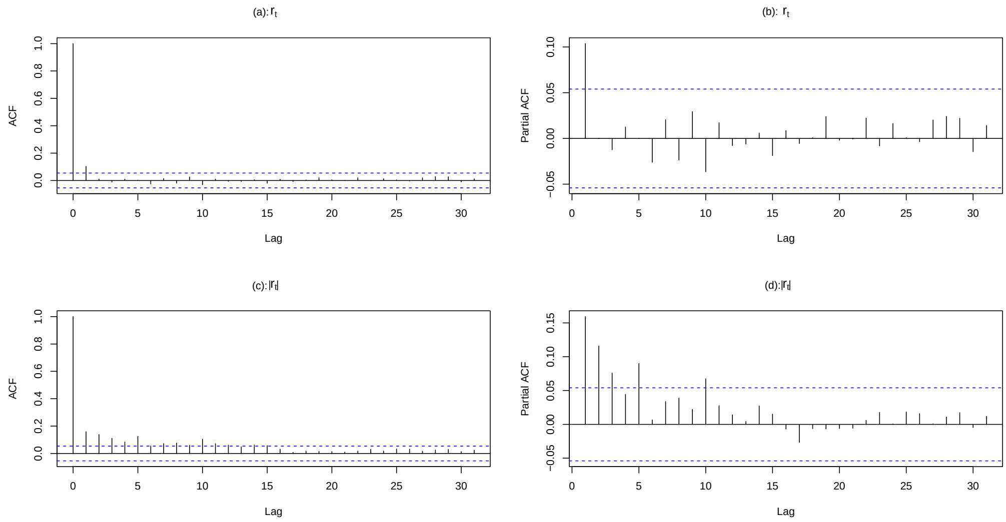
تعریف می‌شود و در آن k تعداد پارامترهای مدل است، همچنین معیار اطلاع بیزی (BIC) که به‌صورت

$$BIC = -۲\log(likelihood) + klog(n)$$

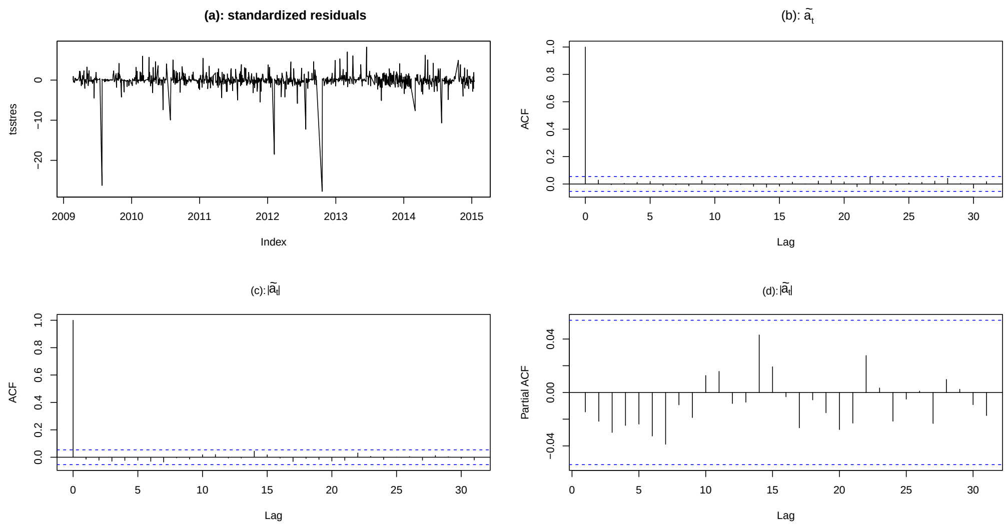
تعریف می‌شود و در آن k تعداد پارامترهای مدل است، دو معیار ارزیابی مدل‌ها هستند.

[20] Criterion Information Akaike

معیار اطلاع آکائیک به‌عنوان معیار ارزیابی مدل برازش داده شده در معادله (۵) برابر ۳/۱۲۴ است. واریانس غیرشرطی مدل برابر ۰/۰۰۱ است. از آزمون لیونگ باکس برای تشخیص نیکویی برازش مدل مربوطه، استفاده شده است. با توجه به p−مقدار ۰/۹۸۱ برای سری $\tilde{a}_t$ و p−مقدار ۰/۷۴۳ برای سری $|\tilde{a}_t|$ می‌توان دریافت که همبستگی بین مقادیر سری مانده‌های استاندارد شده و نیز همبستگی بین مقادیر قدرمطلق سری مانده‌های استاندارد شده وجود ندارد. در نتیجه مدل AR(۱) برای برازش میانگین سری و مدل $GARCH$(۱,۱) برای برازش تلاطم سری مناسب است. همبستگی‌نگار و نمودار خودهمبستگی جزئی سری مانده‌های استاندارد شده و قدرمطلق آن‌ها در شکل ۳ رسم شده است.



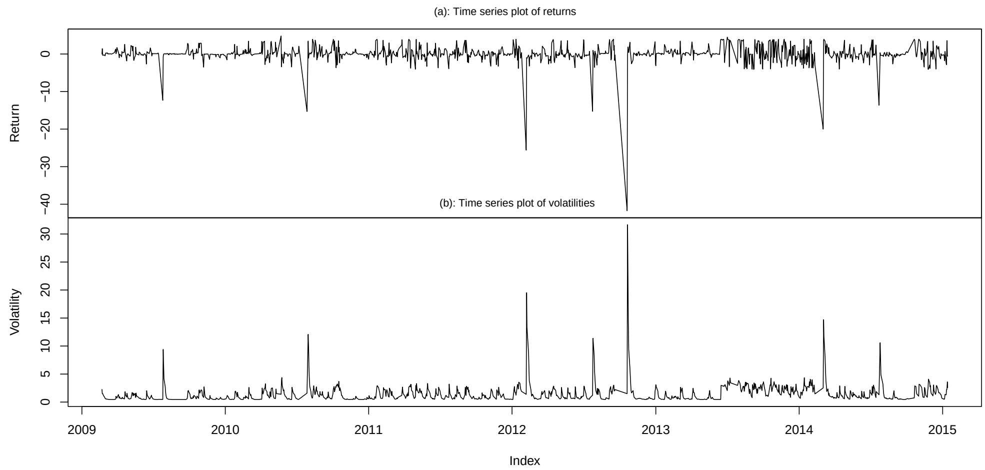
شکل۲. همبستگی‌نگار درصد سری زمانی بازده سهام بانک ملت (a)، نمودار خودهمبستگی جزئی سری بازده (b)، همبستگی‌نگار قدرمطلق سری بازده (c)، نمودار خودهمبستگی جزئی قدرمطلق سری بازده (d).



شکل۳. نمودار سری زمانی مانده‌های استاندارد شده مدل برازش داده شده به درصد سری زمانی بازده سهام بانک ملت (a)، همبستگی‌نگار سری زمانی مانده‌های استاندارد شده (b)، همبستگی‌نگار قدرمطلق سری مانده‌های استاندارد شده (c)، نمودار خودهمبستگی جزئی قدرمطلق سری مانده‌های استاندارد شده (d).

نمودارهای (a) و (b) در شکل ۳، نمودار سری زمانی مانده‌های استاندارد شده به همراه همبستگی‌نگار سری $\tilde{a}_t$ رسم شده است. با توجه به این نمودارها می‌توان دریافت که سری رفتاری تصادفی حول میانگین صفر را دارد و نیز با توجه به همبستگی‌نگار آن می‌توان دریافت

که بین مقادیر سری همبستگی وجود ندارد و مدل $AR(۱)$ مدل مناسبی برای براش به میانگین سری زمانی بوده است. در نمودارهای (c) و (d) در شکل ۳، همبستگی‌نگار و نمودار خودهمبستگی جزئی توان دوم مانده‌های استاندارد شده نمایش داده می‌شود. با توجه به اینکه مقادیر ACF و $PACF$ در تمام تأخیرها داخل باند اطمینان هستند می‌توان دریافت که مدل $GARCH(۱,۱)$ برازش داده شده مدل مناسبی برای توصیف تلاطم سری بوده است. نمودار تلاطم برآورد شده به همراه سری زمانی بازده در شکل ۴ رسم شده است.



شکل۴. نمودار درصد سری زمانی بازده سهام بانک ملت (a)، نمودار سری زمانی تلاطم برآورد شده از مدل $AR(۱)+GARCH(۱,۱)$ با فرض توزیع خطا $t-$ استیودنت (b).

همان طور که از این شکل مشخص است زمانی که تغییرات در سری زمانی بازده زیاد است، تلاطم برآورد شده در آن زمان‌ها بیشتر می‌باشد و نشان دهنده این موضوع است که مدل برای برازش به تلاطم سری خوب عمل کرده است. از این مدل برای پیش‌بینی مقادیر آینده سری و نیز تلاطم استفاده شده است. پیش‌بینی خارج از نمونه‌ای ۱ تا ۵ گامی انجام شده است. آخرین مشاهده به عنوان مبدأ پیش‌بینی (h) در نظر گرفته شده که مربوط به تاریخ ۲۰۱۵/۰۱/۱۴ است پیش‌بینی ۱ گام رو به جلو مربوط به تاریخ ۲۰۱۵/۰۱/۱۵ و پیش‌بینی ۲ گام رو به جلو مربوط به تاریخ ۲۰۱۵/۰۱/۱۶ و ... است.

برای مدل $GARCH(۱,۱)$ داریم

$$\sigma^{۲}_{h+۱} \quad = \quad ۰/۱۲۰ + ۰/۵۷۶ a^{۲}_{h} + ۰/۴۲۲ \sigma^{۲}_{h}. \qquad (۶)$$

در نتیجه پیش‌بینی ۱ گام رو به جلو به‌صورت

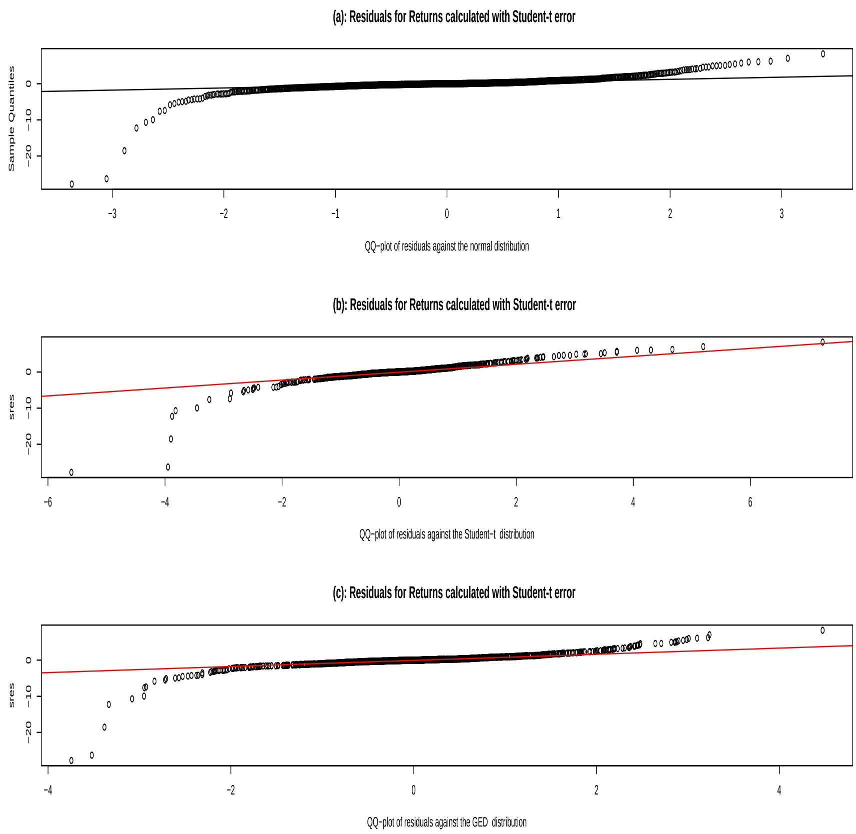
$$\sigma^{۲}_{h}(۱) = ۰/۱۲۰ + ۰/۵۷۶ a^{۲}_{h} + ۰/۴۲۲ \sigma^{۲}_{h}, \qquad (۷)$$

نوشته می‌شود که در آن $a_h = r_h - \hat{\mu}_h$ مانده معادله میانگین در گام h می‌باشد. نقطه‌ی شروع برای $\sigma^{۲}_{h}$ را برابر ۰ یا واریانس غیرشرطی در نظر می‌گیریم. پیش‌بینی بازده و تلاطم سری زمانی بانک ملت در جدول ۲ مشاهده می‌شود.

جدول ۱. پیش‌بینی بازده و تلاطم برای بازده سهام بانک ملت.

گام	۱	۲	۳	۴	۵
بازده	$-۱/۵۶e^{-۱}$	$-۴/۰۸e^{-۲}$	$-۱/۰۶e^{-۲}$	$-۲/۷۸e^{-۳}$	$-۷/۲۷e^{-۴}$
تلاطم	۱/۷۴۰	۱/۷۸۱	۱/۸۱۰	۱/۸۴۲	۱/۸۷۵

برای تشخیص مناسب بودن توزیع خطا ی $t-$ استیودنت و نیز مقایسه با توزیع خطاهای نرمال و خطای تعمیم یافته، نمودار چندک- چندک سری مانده‌های استاندارد شده مدل در شکل ۵ رسم شده است.



شکل۵. نمودار چندک- چندک سری مانده‌های استاندارد شده مدل برازش داده شده به درصد سری زمانی بازده روزانه سهام بانک ملت در مقابل توزیع نرمال استاندارد ،(a) در مقابل توزیع تی اسیودنت با درجه آزادی برآورد شده از مدل ،(b) در مقابل توزیع خطای تعمیم یافته با درجه آزادی ۱/۳ .(c)

با توجه به نمودار (a) در شکل ۵، دم‌ها از خط فاصله دارند ولی در مرکز تمرکز بیشتری دارند که نشان‌دهنده استفاده از توزیع دم پهن و کشیده است. در مورد درصد سری زمانی بازده سهام بانک ملت از توزیع t- استیودنت استفاده شده است که مانده‌های استاندارد شده در مقابل توزیع t- استیودنت با درجه ی آزادی برآورد شده ۲/۹۲۸ در نمودار (b) رسم شده که می‌توان مشاهده کرد برازش مناسب است. همچنین مانده‌ها در مقابل توزیع خطای تعمیم‌یافته با درجه آزادی دلخواه ۱/۳ در نمودار (c) رسم شده که در این مورد نیز برازش مناسب به نظر می‌آید. برای سنجش حساسیت مدل به توزیع خطا، مدل با فرض سه توزیع خطای t- استیودنت، نرمال و توزیع خطای تعمیم‌یافته (تی سی، ۲۰۱۳) مجدداً به سری زمانی بازده برازش داده شده است که نتایج برآورد پارامترها در جدول ۲ خلاصه شده است.

با توجه به جدول ۲ مشخص است که تحت فرض سه توزیع، مقادیر برآورد پارامترها نزدیک به هم هستند. مقایسه مدل‌های دیگر این دسته از مدل‌های ناهمواریانس شرطی متقارن و نامتقارن با استفاده از معیار AIC و BIC در جدول ۳ ارائه شده است. مشاهده می‌شود که مدل $AR(1)+GARCH(1,1)$ نسبت به دیگر مدل‌ها عملکرد بهتری در برازش به داده‌های درصد بازده سهام بانک ملت دارد.

جدول ۲. برآورد پارامترهای مدل $AR(1)+GARCH(1,1)$برازش داده شده به سری زمانی درصد بازده روزانه سهام بانک ملت با فرض سه نوع توزیع خطا.

توزیع خطا	ϕ_1	α_0	α_1	β_1	AIC
نرمال	۰/۵۲۹	۰/۶۲۳	۰/۴۳۴	۰/۵۶۴	۴/۲۳۰
t- استیودنت	۰/۲۶۱	۰/۱۲۰	۰/۵۷۶	۰/۴۲۲	۳/۰۲۴
خطای تعمیم‌یافته	۰/۱۴۴	۰/۲۹۰	۰/۵۶۵	۰/۴۳۳	۳/۰۵۳

جدول ۳. مقادیر معیارهای اطلاع برای مدل‌های مختلف برازش داده شده.

مدل	*AIC*	*BIC*
$ARCH(۱)$	۴/۳۶	۴/۳۷
$EGARCH(۱,۱)$	۴/۰۵	۴/۰۷
$GARCH(۱,۱)+t$	۲/۱۸	۲/۱۰
$GARCH(۱,۱)$	۴/۲۰	۴/۲۲
$GARCH(۲,۱)$	۴/۲۰	۴/۲۱
$GJR-GARCH(۱,۱)$	۴/۱۱	۴/۱۲

۶ بحث و نتیجه‌گیری

شناسایی رفتار بازده‌های متغیرهای مالی برای ارزیابی سرمایه‌گذاری، انتخاب پورتفوی، مدیریت ریسک، سیاست‌گذاری پولی و تعیین سیاست‌های مرتبط با ارزش در معرض ریسک اهمیت دارد. از سوی دیگر، ویژگی‌های تجربی مشترک متغیرهای مالی، از جمله خوشه‌بندی تلاطم، تأثیر نافذ و پهن بودن دم توزیع بازده، تمایل فزاینده‌ای به استفاده از مدل‌های خانواده *ARCH* برای مدل‌سازی نوسانات بازده‌ی دارایی‌ها در میان پژوهشگران ایجاد کرده است. این پژوهش دو هدف اصلی را دنبال می‌کند: نخست، بررسی ویژگی‌های مشترک میان متغیرهای مالی که به مدل‌سازی میانگین و تلاطم آن‌ها راهنمایی می‌کند؛ دوم، ارزیابی کیفیت مدل‌های خانواده *ARCH* در تبیین رفتار تلاطم متغیرهای مالی. در این راستا، ابتدا مدل‌های تلاطم متقارن و نامتقارن با در نظر گرفتن معیار تأثیر نافذ برآورد شدند. سپس، روند برازش مدل مطلوب شامل انتخاب مدل، برآورد پارامترها، تحلیل مانده‌های مدل و پیش‌بینی، تشریح گردید. در نهایت، برای انتخاب مدل بهینه، از معیارهای مطلوبیت مدل استفاده شد. برای ارزیابی مدل و رهیافت‌های پیشنهادی، از داده‌های روزانه سهام بانک ملت بهره گرفته شده است. تحلیل حساسیت مدل پیشنهادی نسبت به توزیع خطاها بررسی گردید و نشان داده‌شد که مدل تحت فرض‌های مختلف توزیعی پایدار است.

مراجع

[۱] محمدی، شاپور؛ راعی، رضا؛ تهرانی، رضا؛ و فیض‌آباد، آرش. (۱۳۸۸). مدل‌سازی نوسان در بورس اوراق بهادار تهران. فصلنامه تحقیقات مالی، ۱۱(۲۷)، ۹۷-۱۱۰.

[۲] کشاورز حداد، غلامرضا؛ صمدی، بهرام. (۱۳۸۸). برآورد و پیش‌بینی تلاطم بازدهی در بازار سهام تهران و مقایسه دقت روش‌ها در تخمین ارزش در معرض خطر: کاربردی از مدل‌های خانواده *FIGARCH*. تحقیقات اقتصادی، ۴۴(۸۶)، ۱۹۳-۲۳۵.

[۳] فلاح مرتضی‌نژاد، سید احمد؛ محتشمی برزادران، غلامرضا؛ صادق‌پور گیلده، بهرام؛ و امینی، محمد. (۱۴۰۰). تحلیل داده‌های بورس بر اساس تابع مفصل. اندیشه آماری، ۲۶(۱)، ۱۳۹-۱۵۳.

[4] Black, F., & Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, **81**, 637-654.

[5] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Economics*, **31**, 307-327.

[6] Bollerslev, T., Engle, R. F., & Nelson, D. B. (1994). ARCH models. *Handbook of Econometrics*, **4**, 2959-3038.

[7] Carroll, T., & Collins, J. (2006). Volatility models and the ISEQ index. Working paper, retrieved from euclid.ucc.ie/pages/staff/carroll/papers/iseqweb.pdf.

[8] Ding, Z., Granger, C. W. J., & Engle, R. F. (1993). A long memory property of stock returns and a new model. *Journal of Empirical Finance*, **1**, 83-106.

[9] Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1007.

[10] Engle, R. F., & Patton, A. J. (2001). What good is a volatility model. *Quantitative Finance*, **1**, 237-245.

[11] Glosten, L. R., Jagannathan, R., & Runkle, D. E. (1993). On the relation between the expected value and the volatility of the nominal excess return on stocks. *Journal of Finance*, **48**, 1779-1801.

[12] Hajrajabi, A. (2019). Markov switching model of nonlinear autoregressive with skew-symmetric innovations. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **89**, 559-575.

[13] Hajrajabi, A., & Fallah, A. (2019). Classical and Bayesian estimation of the autoregressive model with skew symmetric innovations. *Journal of Iranian Statistical Society*, **18**, 157-175.

[14] Hajrajabi, A., Yazdanian, A. R., & Farnoosh, R. (2018). Nonlinear autoregressive model with stochastic volatility innovations: Semiparametric and Bayesian approach. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **344**, 37-46.

[15] Higgins, M. L., & Bera, A. K. (1992). A class of nonlinear ARCH models. *International Economic Review*, **33**, 137-158.

[16] Liu, H., Lee, Y. H., & Lee, M. C. (2009). Forecasting China stock markets volatility via GARCH models under skewed-GED distribution. *Journal of Money, Investment and Banking*, **7**, 542-547.

[17] Nelson, D. B. (1991). Conditional heteroskedasticity in asset returns: a new approach. *Econometrica*, **59**, 347-370.

[18] Tsay, R. S. (2013). *An Introduction to Analysis of Financial Data with R*. John Wiley.

Application of Conditional Heteroscedasticity Models in Financial Time Series

A. Hajrajabi[1]* and S. Zamani Mehreyan[2]

[1,2] Department of Statistics, Imam Khomeini International University, Qazvin, Iran

Abstract:

Due to its inherently dynamic nature, the capital market is subject to greater uncertainty compared to other financial markets such as bank deposits and participation bonds; consequently, it is expected to yield higher returns. This characteristic has led to continuous interest among researchers and analysts in forecasting financial market volatility and the stock prices of companies listed on the stock exchange. This paper focuses on modeling the volatility of daily stock returns in the Iranian capital market by examining the common features of financial time series. Subsequently, the general methodology for fitting mean and volatility models to financial time series is outlined. Considering the presence of heteroscedasticity in many financial time series, both symmetric and asymmetric conditional heteroscedasticity models are introduced and analyzed. To evaluate the proposed models, stock data from Mellat Bank is utilized, and the fitting process of various models is presented along with a sensitivity analysis concerning different innovation distributions. So, after assessing the goodness-of-fit of the proposed model, in-sample forecasting of Mellat Bank's stock returns and volatility is performed and compared against the actual return series.

Keywords: Empirical Characteristics of Financial Time Series, Symmetric and Asymmetric Conditional Heteroscedasticity Models, Forecasting.

*Corresponding author: hajrajabi@sci.ikiu.ac.ir