از شگفتیهای اعداد بزرگ

ناصر رضا ارقامی*

آیا می‌دانید که به احتمال قریب به یقین هم‌اکنون مولکولی از هوا در ریهٔ شما قرار دارد که زمانی در ریهٔ ژولیوس سزار بوده است؟

نمی‌دانم چند وقت پیش در کدام مجله یا کتاب جمله‌ای معادل جمله فوق را خوانده‌ام، ولی به یاد دارم که چقدر شگفت‌زده شدم و به خود قول دادم که در فرصت مناسب صحت و سقم این ادعا را بررسی کنم. با توجه به تعداد بسیار بسیار زیاد مولکولهای هوا صحت آن بعید به نظر می‌رسید. ولی واقعیت این است که دلیل صحت جملهٔ فوق همین زیادی تعداد مولکولهای هوا است! عموماً مسائلی که درک شهودی انسان را به مبارزه می‌طلبند زیبا و جالب‌اند، به ویژه اگر پای احتمال در بین باشد، و این مسأله یکی از بهترینِ آنهاست.

همان‌طور که ذیلاً خواهیم دید کلید حلِ این معما عدد آووگادرو است. این عدد که عبارت است از تعداد مولکولهای موجود در هر مولکول گرم از یک جسم مادی، برابر است با $A = ۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$. اکنون ببینیم که احتمال فوق تا چه حد قریب به یقین است.

می‌دانیم که اگر از ظرفی که حاوی R مهرهٔ سیاه است، n مهره را $(n < R)$ به طور تصادفی و بدون جایگذاری انتخاب کنیم، احتمال اینکه لااقل یک مهره سفید انتخاب شود برابر $p - ۱$ است که

احتمال اینکه هیچ‌یک از مهره‌های انتخاب شده سفید نباشد$= p$

$$p = \frac{(N-n)!(N-R)!}{N!(N-R-n)!}$$

حال فرض کنید که

N : تعداد مولکولهای هوا موجود در جو حاضر

R : تعداد مولکولهای موجود در جو حاضر که زمانی در ریهٔ ژولیوس سزار بوده‌اند

n : تعداد مولکولهای هوای موجود در ریهٔ شما در زمان حاضر

در این صورت $p - ۱$ احتمال این خواهد بود که هم‌اکنون مولکول هوائی که زمانی در ریهٔ ژولیوس سزار بوده است در ریهٔ شما باشد. به دلیل بزرگ‌بودن اعداد n, R, N نمی‌توان مقدار دقیق p را به کمک وسایل محاسباتی معمولی معین کرد، لذا سعی می‌کنیم مقدار p را به طور تقریبی حساب کنیم.

با توجه به اینکه اعداد N، $N-n$، $N-R$، $N-R-n$ همگی اعداد بسیار بزرگی هستند با استفاده از تقریب استرلینگ $\left(k! \approx \sqrt{۲\pi} k^{k+\frac{۱}{۲}} e^{-k}\right)$ می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
p &\approx \frac{(N-n)^{N-n+\frac{۱}{۲}}(N-R)^{N-R+\frac{۱}{۲}}}{N^{N+\frac{۱}{۲}}(N-R-n)^{N-R-n+\frac{۱}{۲}}} \\
&= \frac{(۱-\frac{n}{N})^{N-n+\frac{۱}{۲}}(۱-\frac{R}{N})^{N-R+\frac{۱}{۲}}}{(۱-\frac{R+n}{N})^{N-R-n+\frac{۱}{۲}}} \\
&= \frac{(۱-\frac{n}{N})^{N}(۱-\frac{n}{N})^{-n+\frac{۱}{۲}}(۱-\frac{R}{N})^{N}(۱-\frac{R}{N})^{-R+\frac{۱}{۲}}}{(۱-\frac{R+n}{N})^{N}(۱-\frac{R+n}{N})^{-R-n+\frac{۱}{۲}}} \\
&\approx \frac{e^{-n}(۱-\frac{n}{N})^{-n}e^{-R}(۱-\frac{R}{n})^{-R}}{e^{-(R+n)}(۱-\frac{R+n}{N})^{-R-n}} \\
&= \frac{(۱-\frac{R+n}{N})^{N(\frac{R+n}{N})}}{(۱-\frac{n}{N})^{N(\frac{n}{N})}(۱-\frac{R}{N})^{N(\frac{R}{n})}} \\
&\approx \frac{e^{-\frac{(R+n)^{۲}}{N}}}{e^{-\frac{n^{۲}}{N}}e^{-\frac{R^{۲}}{N}}} = e^{-\frac{۲Rn}{N}}
\end{aligned}$$

حال برای محاسبهٔ تقریبی $\frac{n}{N}$، فرض کنید در حال حاضر حداقل یک لیتر هوا در ریهٔ شما باشد در این صورت

$$\frac{n}{N} \geq V^{-۱}$$

*- دکتر رضا ارقامی، گروه آمار، دانشگاه فردوسی مشهد

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

که V حجم کل جو زمین بر حسب لیتر است، در صورتی‌که همه جو را تحت فشاری که نزدیک سطح زمین حکمفرماست تصور کنیم. اگر همه جو زمین را به اندازه‌ای متراکم کنیم که در همه جای آن فشار نزدیک یک اتمسفر برقرار باشد، آنگاه ارتفاع جو به زحمت از ۲۰ کیلومتر تجاوز خواهد کرد. در واقع محاسبات دقیق‌تر نشان می‌دهد که ارتفاع جو تحت شرایط فوق در حدود ۱۵/۵ کیلومتر خواهد بود (کتاب فیزیک سال اول متوسطهٔ نظام قدیم صفحه ۱۰۶). پس

$$V = \frac{۴}{۳}\pi[(r+d)^۳ - r^۳]$$

که در آن r = شعاع کره زمین = $۶/۴ \times ۱۰^۷$ دسیمتر و d = ارتفاع جو تحت شرایط فوق = ۲×۱۰^۵ دسیمتر. در نتیجه

$$V = ۱/۰۳ \times ۱۰^{۲۲}$$

بنابراین

$$\frac{n}{N} = V^{-۱} = ۹/۶۸ \times ۱۰^{-۲۳}$$

حال برای محاسبهٔ تقریبی R، فرض کنید که ژولیوس سزار در هر دقیقه لااقل ۱۰ بار برای لااقل ۵۰ سال تنفس کرده و در هر بار دم و بازدم لااقل نیم لیتر هوا را جابه‌جا کرده باشد. در این صورت وی در طول عمر خود حجمی معادل

$$V = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۶۰ \times ۲۴ \times ۳۶۵ \times ۵۰ = ۱۳۱۴۸۱۰^۵$$

لیتر هوا را به وسیلهٔ تنفس جابه‌جا کرده است. البته به دو دلیل زیر صحیح است که حجم کل هوایی را که زمانی در ریهٔ ژولیوس سزار بوده است و هم‌اکنون در جود وجود دارد، برابر V فرض کنیم.

۱) بسیاری از مولکولهای مورد بحث چندین بار به ریهٔ وی وارد و خارج شده‌اند.

۲) قسمت قابل اعتنائی از هوای موجود در جو فعلی در آن زمان در جو نبوده است و به صورت ترکیبات مختلف در سطح یا در عمق زمین وجود داشته است. همچنین عمده‌ای از مولکولهای هوای آن زمان اکنون در جو حضور نداشته بلکه به صورت ترکیبات یا غیر آن در سایر قسمتهای زمین وجود دارند. ناگفته نماند که تعداد قابل اغماضی نیز زمین را برای همیشه ترک کرده‌اند.

لذا فرض کنید که

۱) لااقل کسر δ از جو زمان ژولیوس سزار هم اکنون در جو موجود باشد.

۲) حجم کل مولکولهایی که زمانی در ریهٔ ژولیوس سزار بوده‌اند لااقل برابر γv باشد.

۳) تعداد مولکولهای جو (N) نسبت به زمان سزار تغییر قابل ملاحظه‌ای نکرده است.

با مفروضات فوق و با فرض $\delta = ۰/۰۱$ و $\gamma = ۰/۱$ داریم

$$R \geq \frac{\gamma\delta A}{۲۲/۴} = ۳/۵۸ \times ۱۰^{۲۷}$$

که عدد ۲۲/۴ حجم یک مولکول گرم هوا در شرایط متعارفی بر حسب لیتر (دسیمتر مکعب) است. پس

$$p \approx e^{-۲R\frac{A}{N}} < e^{-۶/۷۰۱۰^۵} \approx ۱۰^{-۲۹۰۹۴۷}.$$

حتی اگر برای δ مقداری بسیارکوچکتر از ۰/۰۱ فرض کنیم بازهم p احتمالی بسیاربسیارکوچک و $p-۱$ بسیاربسیار نزدیک واحد خواهد بود. ملاحظه می‌شود که صفت قریب به یقین کاملاً برازندهٔ این احتمال است.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]