آنالیز ترکیبی ترازو و وزنه‌ها

خسرو فضلی*

چکیده

در مقالهٔ حاضر تحت شرایط ویژه‌ای به این سؤال پاسخ می‌دهیم که با یک ترازوی دو کفه‌ای و تعدادی وزنهٔ مشخص، چند مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

مقدمه

فرض کنید یک ترازوی دوکفه‌ای و تعدادی وزنه در اختیار داریم. چند مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد؟ مثلاً با وزنه‌های ۱، ۳ و ۹ کیلوگرمی می‌توان ۱۳ مقدار مختلف و با سه وزنهٔ ۱، ۱ و ۳ کیلوگرمی می‌توان ۷ مقدار مختلف را توزین کرد.

برای بررسی مسأله، ابتدا حالتی را در نظر می‌گیریم که وزنه‌ها متمایز هستند. بنابراین فرض کنید n وزنهٔ متمایز $x_1, x_2, \ldots, x_n$ کیلوگرمی در اختیار داریم. برای توزین یک چیز M کیلوگرمی آنرا در کفه راست ترازو گذاشته و سپس هر وزنهٔ x_i را به یکی از صورتهای زیر به کار می‌بریم:

۱) x_i را در کفهٔ چپ می‌گذاریم،

۲) x_i را در کفه راست می‌گذاریم،

۳) x_i را به کار نمی‌بریم.

بنابراین هر مقدار قابل توزین M کیلوگرمی در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$M = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n \qquad (1)$$

که هر α_i عضو مجموعهٔ $\{-1, 0, 1\}$ است. اگر $\alpha_i = 1$ یعنی x_i را در کفهٔ چپ، اگر $\alpha_i = -1$ یعنی x_i را در کفهٔ راست گذاشته‌ایم و اگر $\alpha_i = 0$ یعنی x_i را به کار نبرده‌ایم. بنابراین حداکثر 3^n مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد، زیرا هر Mای که در معادلهٔ (۱) صدق کند، با انتخاب مقادیری برای $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ از مجموعه $\{-1, 0, 1\}$ به دست می‌آید. اما باید به دو نکته توجه داشت. اول اینکه برخی از مقادیر $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ منجر به مقادیر غیرمثبت M می‌شوند که مورد نظر نیستند. نکتهٔ دوم که اهمیت زیادی دارد این است که، امکان دارد مقادیر مختلف $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ منجر به مقداری یکسان برای M بشوند. شرایطی که از چنین امکانی جلوگیری می‌کند در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۱. اگر مقادیر $x_1, x_2, \ldots, x_n$ در دستگاه نامعادلات

$$\begin{cases} x_2 > 2x_1 \\ x_3 > 2(x_1 + x_2) \\ \vdots \\ x_n > 2(x_1 + \cdots + x_{n-1}) \end{cases}$$

صدق کنند، آنگاه می‌توان $\frac{3^n-1}{2}$ مقدار مختلف را توزین کرد.

برهان. ابتدا نشان می‌دهیم تحت این شرایط نمایش M به صورت معادلهٔ (۱) یکتاست. برای این منظور فرض کنید ضرایب $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ که در مجموعهٔ $\{-1, 0, 1\}$ قرار دارند، به قسمی باشند که

*- خسرو فضلی، گروه ریاضی، دانشگاه کردستان

$$\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\cdots+\alpha_nx_n=\beta_1x_1+\beta_2x_2+\cdots+\beta_nx_n.$$

نشان می‌دهیم برای هر i، $i=1,2,\ldots,n$، $\alpha_i=\beta_i$.

از تساوی فوق داریم:

$$(\alpha_1-\beta_1)x_1+(\alpha_2-\beta_2)x_2+\cdots+(\alpha_n-\beta_n)x_n=0 \qquad (2)$$

یا

$$(\beta_1-\alpha_1)x_1+(\beta_2-\alpha_2)x_2+\cdots+(\beta_n-\alpha_n)x_n=0 \qquad (3)$$

واضح است که $\alpha_i-\beta_i\in\{-2,-1,0,1,2\}$. ابتدا نشان می‌دهیم $\alpha_n-\beta_n=0$. اگر چنین نباشد یکی از موارد زیر را داریم:

الف) $\alpha_n-\beta_n=-1$

در این صورت معادلهٔ (۲) به شکل زیر درمی‌آید:

$$(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-x_n=0$$

از طرفی با توجه به شرایط قضیه

$$\begin{aligned}&(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-x_n\\&<(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-2x_1-\cdots-2x_{n-1}\\&=(\alpha_1-\beta_1-2)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}-2)x_{n-1}\\&\le(2-2)x_1+\cdots+(2-2)x_{n-1}=0\end{aligned}$$

یعنی

$$(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-x_n<0$$

که تناقض است. بنابراین $\alpha_n-\beta_n\neq-1$.

با همین روش و با به کارگیری معادلهٔ (۳) می‌توان نشان داد که

$$\alpha_n-\beta_n\neq1.$$

ب) $\alpha_n-\beta_n=-2$

در این صورت معادلهٔ (۲) به صورت زیر درمی‌آید

$$(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-2x_n=0$$

از طرفی

$$\begin{aligned}&(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-2x_n\\&<(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}-4x_1\\&\quad-4x_2-\cdots-4x_{n-1}\\&=(\alpha_1-\beta_1-4)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}-4)x_{n-1}\\&\le(2-4)x_1+\cdots+(2-4)x_{n-1}=-2x_1+\cdots-2x_{n-1}\\&\le0\end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین $\alpha_n-\beta_n\neq-2$.

با همین روش و با به کارگیری معادلهٔ (۳) می‌توان نشان داد که

$$\alpha_n-\beta_n\neq1.$$

پس بنابر (الف) و (ب) داریم $\alpha_n-\beta_n=0$. بنابراین در این صورت معادلهٔ (۲) به صورت زیر در می‌آید:

$$(\alpha_1-\beta_1)x_1+\cdots+(\alpha_{n-1}-\beta_{n-1})x_{n-1}=0$$

با توجه به استدلال قبلی و مجموعهٔ نامعادلاتی که در قضیه آمده است می‌توان نشان داد که $\alpha_{n-1}-\beta_{n-1}=0$ یعنی $\alpha_{n-1}=\beta_{n-1}$. بنابراین با تکرار استدلال بالا، داریم:

$$\alpha_1=\beta_1,\ \alpha_2=\beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n=\beta_n.$$

پس متناظر با هر $(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ که $\alpha_i\in\{-1,0,1\}$ مقداری یکتا برای M از معادلهٔ (۱) به دست می‌آید. بنابراین 3^n مقدار مختلف برای M داریم که یکی از آنها ۰ است و به ازای $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_n=0$ حاصل می‌شود. پس 3^n-1 مقدار غیرصفر داریم که نیمی از آنها مثبت‌اند. در نتیجه می‌توان $\frac{3^n-1}{2}$ مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.

مثال: با وزنه‌های $x_1=1$، $x_2=3$، $x_3=9$، $x_4=27$ و $x_5=81$ می‌توان ۱۲۱ مقدار مختلف را توزین کرد، زیرا این مقادیر در شرایط قضیهٔ (۱) صدق می‌کنند و بنابراین $121(=\frac{3^5-1}{2})$ مقدار مختلف داریم.

حال فرض کنید k_1 تا وزنهٔ x_1 کیلوگرمی، k_2 تا وزنه x_2 کیلوگرمی، ... و k_n تا وزنهٔ x_n کیلوگرمی داریم و برای هر i، $k_i\ge1$. تعمیم قضیهٔ ۱ به صورت زیر است:

قضیه ۲. فرض کنید $k=\max\{k_1,\ldots,k_n\}$ و مقادیر x_1، x_2، ...، x_n در دستگاه نامعادلات زیر صدق کنند:

$$\begin{cases} x_2 > 2kx_1 \\ x_3 > 2k(x_1+x_2) \\ \vdots \\ x_n > 2k(x_1+\cdots+x_{n-1}) \end{cases}$$

در این صورت با این وزنه‌ها می‌توان $\frac{[\prod_{i=1}^{n}(2k_i+1)]-1}{2}$ مقدار مختلف را توزین کرد.

برهان. هر چیز قابل توزین M کیلوگرمی در معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$M = \left(\sum_{j=1}^{k_1}\alpha_{1j}\right)x_1 + \left(\sum_{j=1}^{k_2}\alpha_{2j}\right)x_2 + \cdots + \left(\sum_{j=1}^{k_n}\alpha_{nj}\right)x_n$$

که $\alpha_{ij} \in \{-1, 0, 1\}$. اگر قرار دهیم $\alpha_i = \sum_{j=1}^{k_i}\alpha_{ij}$، معادلهٔ بالا به صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$M = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n$$

که برای هر i، $\alpha_i \in \{-k_i, \ldots, 0, \ldots, k_i\}$.

حال نشان می‌دهیم که تحت شرایط قضیهٔ ۲، ضرایب α_1، α_2، ...، α_n به صورتی یکتا، M را مشخص می‌کنند. یعنی اگر مجموعهٔ ضرایب دیگری مانند β_1، β_2، ...، β_n داشته باشیم که

$$M = \beta_1x_1 + \beta_2x_2 + \cdots + \beta_nx_n$$

آنگاه $\alpha_1 = \beta_1$، $\alpha_2 = \beta_2$، ... و $\alpha_n = \beta_n$.

بنابراین $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)x_i = 0$ و در ضمن برای هر i،

$$\alpha_i - \beta_i \in \{-2k_i, \ldots, 0, \ldots, 2k_i\}.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که $\alpha_n - \beta_n = 0$. اگر چنین نباشد حالتهای مختلفی داریم. اگر $\alpha_n - \beta_n = -1$، در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i - x_n \\ &< \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i - 2k(\sum_{i=1}^{n-1}x_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i - 2k)x_i \\ &\le 0 \end{aligned}$$

که تناقض است. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \neq -1$.

حال نشان می‌دهیم که $\alpha_n - \beta_n$ نمی‌تواند از ۱− کمتر باشد. زیرا در این صورت

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i + (\alpha_n - \beta_n)x_n \\ &< \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i - x_n \le 0 \end{aligned}$$

بنابراین اگر $\alpha_n - \beta_n \le -1$، به تناقض می‌رسیم. پس $\alpha_n - \beta_n \ge 0$.

حال فرض می‌کنیم $\alpha_n - \beta_n = 1$، داریم:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)x_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i + x_n \\ &> \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i + \sum_{i=1}^{n-1}2kx_i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i + 2k)x_i \\ &\ge 0 \end{aligned}$$

که بازهم به تناقض می‌رسیم. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \neq 1$.

همانند استدلال قبلی می‌توان نشان داد که $\alpha_n - \beta_n$ نمی‌تواند از ۱ نیز بزرگتر باشد. بنابراین $\alpha_n - \beta_n \le 0$. ولی دیدیم که $\alpha_n - \beta_n \ge 0$، پس $\alpha_n - \beta_n = 0$، یا $\alpha_n = \beta_n$. اینک با توجه به اینکه $\alpha_n - \beta_n = 0$، داریم:

$$0 = \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i - \beta_i)x_i = \sum_{i=1}^{n-1}(\alpha_i - \beta_i)x_i$$

حال با همین روش و مجموعه شرایط قضیه، می‌توان نشان داد که $\alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$ و بدین ترتیب سایر ضرایب مساوی‌اند.

پس معادله $M = \alpha_1x_1 + \alpha_2x_2 + \cdots + \alpha_nx_n$ به صورتی یکتا به وسیله ضرایب α_i مشخص می‌شود. چون $\alpha_i \in \{-k_i, \ldots, 0, \ldots, k_i\}$ پس $\prod_{i=1}^{n}(2k_i+1)$ مقدار مختلف برای M به دست می‌آید. یکی از این مقادیر صفر و نیمی از مقادیر غیرصفر، مثبت‌اند. بنابراین $\frac{[\prod_{i=1}^{n}(2k_i+1)]-1}{2}$ مقدار مختلف را می‌توان توزین کرد.