همتوزیعی

جواد بهبودیان*

چکیده

دو متغیر تصادفی یا دو بردار تصادفی X و Y را که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند همتوزیع می‌گویند و با نماد $X \stackrel{D}{=} Y$ نشان می‌دهند اگر دارای یک توزیع احتمال مشترک باشند. این رابطه در بعضی کتابهای آمار و احتمال و مقاله‌های علمی به کار می‌رود و می‌توان به کمک آن بعضی مطالب را به آسانی بیان یا اثبات نمود.

در این مقاله با چند مثال ساده مفهوم و ویژگیهای همتوزیعی تشریح می‌گردد. برای این منظور دو قضیه اساسی به کار می‌رود و در مورد متغیرهای تصادفی متقارن و تبادلپذیر با توجه به موضوع همتوزیعی مطالبی مطالعه می‌شوند. در پایان قانون حذف و همتوزیعی بررسی می‌شود.

۱ پیشگفتار

مفهوم همتوزیعی در بعضی کتابهای آمار و احتمال و مقاله‌ها به کار می‌رود و می‌توان به وسیله آن پاره‌ای از مطالب را به آسانی بیان یا اثبات نمود. با این حال معنی این مفهوم و سودمندی آن کمتر مورد توجه قرار می‌گیرد.

هدف از نوشتن این مقاله، تشریح همتوزیعی و بیان ویژگیها و کاربرد آن با چند مثال ساده از دیدگاه نظریهٔ احتمال است.

پیش از اینکه همتوزیعی را تعریف کنیم، نخست دو مثال می‌آوریم تا مطلب به خوبی روشن شود.

مثال ۱- در ظرفی ۳ مهرهٔ سفید $W_{۱}$ و $W_{۲}$ و $W_{۳}$ و ۳ مهرهٔ سیاه $B_{۱}$ و $B_{۲}$ و $B_{۳}$ موجود است که گذشته از رنگ و شماره یکسان هستند. از این ظرف ۴ مهره با هم به تصادف بیرون می‌آوریم و فرض می‌کنیم X و Y به ترتیب تعداد مهره‌های سفید و سیاه در این نمونه ۴ تائی باشند. مثلاً برای نمونه $e = \{W_{۱}, W_{۲}, W_{۳}, B_{۱}\}$ که یکی از $\binom{۶}{۴} = ۱۵$ پیشامد ساده و همشانس در این مثال است. داریم $X(e) = ۳$ و $Y(e) = ۱$. از راه شمارش، ملاحظه می‌شود که جدول توزیع احتمال X و جدول توزیع احتمال Y به صورت زیر هستند:

$Y = y$	۱	۲	۳
$P(Y = y)$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$

$X = x$	۱	۲	۳
$P(X = x)$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$

ملاحظه می‌شود که X و Y هر دو ۱ را با احتمال $\frac{۱}{۵}$، ۲ را با احتمال $\frac{۳}{۵}$ و ۳ را با احتمال $\frac{۱}{۵}$ می‌پذیرند. از اینرو می‌گوییم X و Y همتوزیع هستند، یعنی تابع توزیع احتمال هر دو چنین است:

$$F(z) = \begin{cases} ۰ & z < ۱ \\ \frac{۱}{۵} & ۱ \leq z < ۲ \\ \frac{۴}{۵} & ۲ \leq z < ۳ \\ ۱ & z \geq ۳ \end{cases}$$

با توجه به تساوی تعداد مهره‌های همرنگ، به طور شهودی هم می‌توانستیم همتوزیعی X و Y را بدون محاسبه بپذیریم.

یادآور می‌شویم که دو متغیر تصادفی همتوزیع لزوماً برابر یا مستقل نیستند، زیرا برای همین مثال، نمونه یادشده در بالا نشان می‌دهد که $X(e) \neq Y(e)$.

*- دکتر جواد بهبودیان، بخش آمار، دانشگاه شیراز

از طرف دیگر به عنوان یک مثال نقض، نابرابری زیر نشان می‌دهد که X و Y مستقل نیستند:

$$\frac{۳}{۵} = P(X = ۲, Y = ۲) \neq P(X = ۲)P(Y = ۲) = (\frac{۳}{۵})^{۲}.$$

با این حال دو متغیر تصادفی برابر، همواره همتوزیع‌اند و دو متغیر تصادفی مستقل می‌توانند همتوزیع یا ناهمتوزیع باشند. در مثال ۱، X و Y یک بعدی هستند. اینک به مثال زیر که در آن X و Y دوبعدی، یعنی بردار تصادفی، هستند توجه نمایید.

مثال ۲ـ در ظرفی ۲ مهرهٔ سفید $W_۱$ و $W_۲$، دو مهرهٔ سبز $G_۱$ و $G_۲$، یک مهرهٔ سرخ R و یک مهرهٔ سیاه B موجود است. از این ظرف ۴ مهره با هم به تصادف بیرون می‌آوریم. فرض کنید $X_۱$ و $X_۲$ به ترتیب تعداد مهره‌های سفید و سیاه و $Y_۱$ و $Y_۲$ به ترتیب تعداد مهره‌های سبز و سرخ در این نمونه ۴تائی باشند. از راه شمارش، یا به طور شهودی می‌توان نشان داد که بردار تصادفی $X = (X_۱, X_۲)$ و $Y = (Y_۱, Y_۲)$ دارای یک جدول توزیع احتمال مشترک‌اند. این جدول به صورت زیر است:

بردار	(۰,۱)	(۱,۰)	(۱,۱)	(۲,۰)	(۲,۱)
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۵}$	$\frac{۶}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$

جدول توزیع احتمال مشترک دو بردار تصادفی X و Y

از اینرو می‌گوییم دو بردار تصادفی X و Y همتوزیع‌اند.

۲ تعریف همتوزیعی و قضیهٔ اساسی آن

در این بخش نخست همتوزیعی را برای دو متغیر تصادفی و نیز برای دو بردار تصادفی تعریف می‌کنیم و سپس دو قضیهٔ مهم را برای تشخیص همتوزیعی یادآور می‌شویم.

تعریف همتوزیعی برای دو متغیر تصادفی.ـ دو متغیر تصادفی X و Y را که روی یک فضای احتمال تعریف شده‌اند همتوزیع می‌گویند و با نماد $X \stackrel{D}{=} Y$ نشان می‌دهند اگر دارای یک توزیع مشترک باشند. به زبان دیگر

$$X \stackrel{D}{=} Y \Longleftrightarrow F_X(z) = F_Y(z), \quad \forall z \in R.$$

بدیهی است که دو متغیر تصادفی همتوزیع دارای یک تابع چگالی مشترک هستند. در ضمن تابع مشخصهٔ آنها وگشتاورهای همرتبه آنها در صورتی که وجود داشته باشند برابرند.

اگر X و Y دو بردار تصادفی باشند، در تعریف همتوزیعی توزیع توأم مؤلفه‌ها را به کار می‌بریم. مثلاً برای بردارهای دو بعدی، همتوزیعی را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$(X_۱, X_۲) \stackrel{D}{=} (Y_۱, Y_۲) \Longleftrightarrow F_{X_۱,X_۲}(z_۱, z_۲) = F_{Y_۱,Y_۲}(z_۱, z_۲)$$
$$\forall z_۱, z_۲ \in R.$$

به آسانی می‌توان دید که رابطهٔ همتوزیعی یک رابطه هم‌ارزی است، یعنی داریم:

$X \stackrel{D}{=} X$	بازتابی
$X \stackrel{D}{=} Y,\ Y \stackrel{D}{=} Z \Longrightarrow X \stackrel{D}{=} Z$	ترایابی
$X \stackrel{D}{=} Y \Longleftrightarrow Y \stackrel{D}{=} X$	تقارن

بنابراین مجموعهٔ تمام بردارهای تصادفی k بعدی را می‌توان به کمک رابطهٔ همتوزیعی به کلاسهای همتوزیع افراز نمود.

تشخیص همتوزیعی از راه تابع توزیع اغلب دشوار است و معمولاً از تابع مشخصه استفاده می‌شود. می‌دانیم که تابع مشخصه متغیر تصادفی دلخواه W، تابعی مختلط از متغیر حقیقی t به صورت زیر است:

$$C_W(t) = E(e^{itW}) = E(\cos tW) + iE(\sin tW)$$

قضیهٔ معروف یکتائی که اثبات آن درکتابهای احتمال یافت می‌شود (مثلاً مرجع ۱)، بهترین وسیله برای تشخیص همتوزیعی است. ما این قضیه را برای دو متغیر تصادفی به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیهٔ یکتائی.ـ دو متغیر تصادفی همتوزیع‌اند اگر و تنها اگر توابع مشخصهٔ آنها برابر باشند، یعنی

$$X \stackrel{D}{=} Y \Longleftrightarrow C_X(t) = C_Y(t), \quad \forall t \in R.$$

این قضیه در مورد دو بردار تصادفی هم درست است.

قضیهٔ دیگری که در مورد همتوزیعی کاربرد فراوان دارد، قضیهٔ زیر است که ما آن را قضیهٔ اساسی همتوزیعی می‌نامیم.

قضیهٔ اساسی همتوزیعی.ـ اگر g یک تابع دلخواه روی تکیه‌گاه مشترک دو متغیر تصادفی همتوزیع X و Y باشد، آنگاه دو متغیر تصادفی $g(X)$ و $g(Y)$ نیز همتوزیع هستند. به زبان دیگر

$$X \stackrel{D}{=} Y \Longrightarrow g(X) \stackrel{D}{=} g(Y)$$

این قضیه در حالت کلی که X و Y دو بردار تصادفی k بعدی و g یک تابع حقیقی یا مختلط h متغیری ($h \leq k$) باشد نیز درست است. ما تنها قضیه را در حالت خاصی که X و Y یک بعدی و g یک تابع صعودی با وارون g^{-1} باشد ثابت می‌کنیم.

برهان نشان می‌دهیم که برای هر عدد حقیقی t تساوی زیر برقرار است:

$$P(g(X) \leq t) = P(g(Y) \leq t)$$

برای این منظور می‌نویسیم $z = g^{-1}(t)$. حال چون $g(t)$ صعودی است داریم:

$$P(g(X) \leq t) = P(X \leq g^{-1}(t)) = P(X \leq z) = F_X(z)$$
$$P(g(Y) \leq t) = P(Y \leq g^{-1}(t)) = P(Y \leq z) = F_Y(z).$$

با توجه به همتوزیعی X و Y، تساوی مطلوب در بالا ثابت می‌شود.

به مثالهای زیر توجه نمایید:

$$X \stackrel{D}{=} Y \Longrightarrow |X| \stackrel{D}{=} |Y|$$

در این مثال $g(t) = |t|$.

$$(X_1, X_2) \stackrel{D}{=} (Y_1, Y_2) \Longrightarrow \max(X_1, X_2) \stackrel{D}{=} \max(Y_1, Y_2)$$

در این مثال $g(t_1, t_2) = \max(t_1, t_2)$.

$$(X_1, X_2, X_3) \stackrel{D}{=} (Y_1, Y_2, Y_3) \Longrightarrow (X_3, X_1) \stackrel{D}{=} (Y_3, Y_1).$$

در این مثال $g(t_1, t_2, t_3) = (t_3, t_1)$.

در بخشهای ۳ و ۴ کاربرد همتوزیعی بهتر روشن می‌شود.

۳ تقارن و همتوزیعی

تعریف متغیر تصادفی متقارن- متغیر تصادفی X را نسبت به عدد ثابت c متقارن می‌گویند هرگاه $X - c \stackrel{D}{=} c - X$. اگر $c = 0$، X را متقارن می‌نامند. بدیهی است که هرگاه $E(X)$ وجود داشته باشد، $E(X) = c$. مثلاً $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ نسبت به μ متقارن است، یعنی $X - \mu \stackrel{D}{=} \mu - X$، ولی $X \sim N(0, \sigma^2)$ متقارن است یعنی $X \stackrel{D}{=} -X$.

اگر X نسبت به c متقارن باشد به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر عدد حقیقی t،

$$F(c+t) = 1 - F(c-t) + P(X = c-t).$$

به ویژه برای یک متغیر تصادفی پیوسته که نسبت به c متقارن است داریم:

$$F(c+t) = 1 - F(c-t)$$
$$f(c+t) = f(c-t).$$

تمام گشتاورهای فرد یک متغیر تصادفی متقارن در صورتی که وجود داشته باشند برابر صفرند.

برای اثبات این موضوع، نخست با توجه به $X \stackrel{D}{=} -X$ و استفاده از تابع $g(t) = t^{2k+1}$، بنابر قضیهٔ همتوزیعی داریم $X^{2k+1} \stackrel{D}{=} (-X)^{2k+1}$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که

$$E(X^{2k+1}) = E((-X)^{2k+1}) = -E(X^{2k+1})$$

لذا

$$E(X^{2k+1}) = 0.$$

قضیه تقارن- متغیر تصادفی X متقارن است اگر و تنها اگر تابع مشخصهٔ آن یک تابع حقیقی باشد.

برهان برای اثبات این قضیه از دو نکته استفاده می‌کنیم:

۱) تابع مختلط، تابعی حقیقی است اگر و تنها اگر با مزدوج خود برابر باشد.

۲) برای تابع مشخصهٔ هر متغیر تصادفی W داریم:

$$\begin{aligned} C_{-W}(t) &= C_W(-t) = E(e^{-itW}) \\ &= E[\cos(-tW)] + iE[\sin(-tW)] \\ &= \overline{C_W(t)}. \end{aligned}$$

حال اگر X متقارن باشد، با استفاده از قضیهٔ همتوزیعی داریم:

$$\begin{aligned} X \stackrel{D}{=} -X &\Longrightarrow e^{-itX} \stackrel{D}{=} e^{itX} \\ &\Longrightarrow E(e^{itX}) = E(e^{-itX}) \\ &\Longrightarrow C_X(t) = \overline{C_X(t)} \end{aligned}$$

بنابراین $C_X(t)$ یک تابع حقیقی است.

بر عکس اگر $C_X(t)$ یک تابع حقیقی باشد، داریم

$$C_X(t) = \overline{C_X(t)} = C_X(-t) = C_{-X}(t)$$

پس بنا به قضیهٔ یکتائی نتیجه می‌گیریم که $X \stackrel{D}{=} -X$، یعنی X متقارن

است. با قضیهٔ بالا می‌توان بسیاری از ویژگیهای متغیر تصادفی متقارن را ثابت نمود، ولی استفاده از قضیه همتوزیعی برای اثبات ویژگیهای زیر آسانتر است.

۱) اگر X متقارن و $g(t)$ یک تابع فرد باشد، $g(X)$ نیز متقارن است.

برای اثبات این موضوع داریم

$$X \overset{D}{=} -X \Longrightarrow g(X) \overset{D}{=} g(-X)$$
$$\Longrightarrow g(X) \overset{D}{=} -g(X).$$

۲) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از متغیر تصادفی متقارن X باشد، هر ترکیب خطی از این نمونهٔ تصادفی نیز متقارن است.

برای اینکه نشان دهیم $c_1X_1 + \cdots + c_nX_n$ متقارن است. با استفاده از $(X_1, \ldots, X_n) \overset{D}{=} (-X_1, \ldots, -X_n)$ و تابع خطی n متغیری $g(t_1, \ldots, t_n) = c_1t_1 + \cdots + c_nt_n$ و قضیهٔ همتوزیعی، داریم

$$C_1X_1 + \cdots + C_nX_n \overset{D}{=} -C_1X_1 - \cdots - C_nX_n$$

۳) اگر U و V مستقل و همتوزیع (نه لزوماً متقارن) باشند، $U - V$ متقارن است. برای اینکه نشان دهیم $U - V$ متقارن است از $(U, V) \overset{D}{=} (V, U)$ و تابع دو متغیری $g(t_1, t_2) = t_1 - t_2$، با استفاده از قضیهٔ همتوزیعی، داریم $U - V \overset{D}{=} V - U$.

۴) اگر U یا V متقارن و مستقل باشند، UV متقارن است.

فرض کنید U متقارن باشد. برای اینکه نشان دهیم UV متقارن است از $(U, V) \overset{D}{=} (-U, V)$ و تابع دو متغیری $g(t_1, t_2) = t_1t_2$، با استفاده از قضیهٔ همتوزیعی داریم $UV \overset{D}{=} -UV$.

۵) اگر $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از متغیر تصادفی متقارن X و $Y_1 \geq \ldots \geq Y_n$ آماره‌های ترتیبی باشند، آنگاه $Y_1 \overset{D}{=} -Y_n$.

برای اثبات این رابطه، از $(X_1, \ldots, X_n) \overset{D}{=} (-X_1, \ldots, -X_n)$ و از تابع n متغیری

$$g(t_1, \ldots, t_n) = \min(t_1, \ldots, t_n),$$

با استفاده از قضیهٔ همتوزیعی داریم:

$$\min(X_1, \ldots, X_n) = \min(-X_1, \ldots, -X_n)$$

یا $Y_1 \overset{D}{=} -Y_n$. با روش بالا می‌توان نشان داد که برای توزیع متقارن روابط کلیتر زیر نیز درست‌اند:

$$(Y_i, Y_j) \overset{D}{=} (-Y_{n-i+1}, -Y_{n-j+1}), \qquad Y_k \overset{D}{=} -Y_{n-k+1}.$$

۴ تبادلپذیری

تعریف بردار تصادفی تبادلپذیر. بردار تصادفی $(X_1, \ldots, X_n)$ را تبادلپذیر می‌گویند هرگاه برای هر جایگشت $(a_1, \ldots, a_n)$ از $(1, \ldots, n)$ داشته باشیم $(X_1, \ldots, X_n) \overset{D}{=} (X_{a_1}, \ldots, X_{a_n})$.

به عنوان مثال، با فرض $\rho \neq 0$، با یک تبدیل می‌توان نشان داد که برای $(Z_1, Z_2) \sim N(0, 0, 1, 1, \rho)$ داریم $(Z_1, Z_2) \overset{D}{=} (Z_2, Z_1)$ ولی برای $(X_1, X_2) \sim N(0, 0, 1, 4, \rho)$ داریم $(X_1, X_2) \overset{D}{\neq} (X_2, X_1)$. بنابراین (Z_1, Z_2) تبادلپذیر است ولی (X_1, X_2) چنین نیست. برای مثالهای دیگر به مرجع ۲ رجوع شود.

بردار تصادفی تبادلپذیر دارای ویژگیهای زیر است:

۱) تمام مؤلفه‌های یک بردار تبادلپذیر همتوزیع‌اند ولی لزوماً مستقل نیستند.

برای اثبات این موضوع از تعریف تبادلپذیری با استفاده از تابع $g(t_1, \ldots, t_n) = t_1$ و قضیهٔ همتوزیعی برای هر a_1 در مجموعه $\{1, \ldots, n\}$ داریم $X_1 \overset{D}{=} X_{a_1}$. به طور کلی به آسانی می‌توان نشان داد که هر k مؤلفه از یک بردار تصادفی تبادلپذیر با هر k مؤلفهٔ دیگر همتوزیع است. مثلاً اگر $(X_1, \ldots, X_5)$ تبادلپذیر باشد، داریم

$$(X_1, X_3) \overset{D}{=} (X_2, X_4)$$

و

$$(X_1, X_3, X_5) \overset{D}{=} (X_2, X_4, X_1).$$

۲) یک بردار تصادفی تبادلپذیر است، اگر و تنها اگر چگالی توأم مؤلفه‌های آن یک تابع چند متغیری متقارن باشد، یعنی برای هر جایگشت $(a_1, \ldots, a_n)$ داشته باشیم

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{a_1}, \ldots, x_{a_n})$$

برای اثبات این موضوع کافی است از تعریف تبادلپذیری استفاده کنیم.

۳) فرض کنید $X_1, \ldots, X_n$ یک نمونهٔ تصادفی از X با چگالی $g(x)$ باشد. بردار تصادفی $(X_1, \ldots, X_n)$، که مؤلفه‌های آن همتوزیع و

مستقل‌اند (بردار iid) اند، تبادل‌پذیر است. دلیل این موضوع متقارن بودن چگالی توأم زیر است.

$$f(x_1,\ldots,x_n)=\prod_{i=1}^{n} g(x_i)$$

بنابراین بردار iid تبادل‌پذیر است. ولی بردار تبادل‌پذیر در حالی که مؤلفه‌های همتوزیع دارد، لزوماً iid نیست زیرا ممکن است این مؤلفه‌ها مستقل نباشند. مثلاً فرض کنید X_1، ...، X_n یک نمونهٔ تصادفی با میانگین $\bar{X}$ باشد. بردار تصادفی $(X_1-\bar{X},\ldots,X_n-\bar{X})$ تبادل‌پذیر است.

برای اثبات این موضوع از تعریف همتوزیعی با استفاده از تابع

$$g(t_1,\ldots,t_n)=(t_1-\bar{t},\ldots,t_n-\bar{t})$$

و قضیهٔ همتوزیعی داریم:

$$(X_1-\bar{X},\ldots,X_n-\bar{X})\overset{D}{=}(X_{a_1}-\bar{X},\ldots,X_{a_n}-\bar{X}).$$

واضح است که مؤلفه‌های $(X_1-\bar{X},\ldots,X_n-\bar{X})$ با اینکه همتوزیع‌اند، مستقل نیستند. مثلاً برای یک نمونهٔ تصادفی از توزیع $N(\mu,\sigma^2)$ برای $i\neq j$ داریم:

$$\mathrm{Cov}(X_i-\bar{X},X_j-\bar{X})=-\frac{\sigma^2}{n}\neq 0$$

۴) بدون داشتن تابع توزیع، تنها با استفاده از تبادل‌پذیری، می‌توان بعضی محاسبات را به راحتی انجام داد. مثلاً فرض کنید $(X_1,\ldots,X_n)$ یک بردار تصادفی تبادل‌پذیر باشد، به طوری که $P(X_i>0)=1$.
بدون داشتن چگالی توأم این بردار، می‌توان نشان داد که

$$E\left(\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\right)=\frac{1}{n},\ i=1,\ldots,n$$

برای اثبات این تساوی می‌گوییم چون $1>\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}>0$، امید ریاضی بالا وجود دارد. با استفاده از تابع

$$g(t_1,\ldots,t_n)=\frac{t_i}{t_1+\cdots+t_n}$$

از رابطه $(X_1,\ldots,X_n)\overset{D}{=}(X_i,\ldots,X_n)$ و از قضیهٔ همتوزیعی داریم:

$$\frac{X_1}{X_1+\cdots+X_n}\overset{D}{=}\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n},\ i=1,\ldots,n$$

چون امید ریاضی دو طرف رابطه بالا برابرند، با توجه به رابطه زیر تساوی مطلوب به دست می‌آید.

$$E\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i}{X_1+\cdots+X_n}\right)=nE\left(\frac{X_k}{X_1+\cdots+X_n}\right)=1.$$

توجه کنید که شرط $P(X_i>0)=1$ در این مساله ضروری است. مثلاً برای نمونه تصادفی Z_2 و Z_1 از توزیع نرمال استاندارد، امید $\frac{Z_1}{Z_1+Z_2}$ نمی‌تواند برابر $\frac{1}{2}$ باشد، زیرا این متغیر تصادفی دارای توزیع کوشی است.

۵ قانون حذف و همتوزیعی

فرض کنید $X\overset{D}{=}Y$ و Z مستقل از X و مستقل از Y باشد، با استفاده از $(X,Z)\overset{D}{=}(Y,Z)$، از تابع $g(t_1,t_2)=t_1+t_2$ و از قضیهٔ همتوزیعی داریم $X+Z\overset{D}{=}Y+Z$. این رابطه را به کمک تابع مشخصه هم می‌توان ثابت کرد.

با این حال $X+Z\overset{D}{=}Y+Z$ مستلزم $X\overset{D}{=}Y$ نیست، یعنی در مورد رابطهٔ $\overset{D}{=}$ قانون حذف درست نیست. البته اگر به ازای تمام مقادیر t داشته باشیم $C_Z(t)\neq 0$، آنگاه قانون حذف درست است. برای اثبات این موضوع بنابر قضیهٔ یکتائی داریم:

$$\begin{aligned}X+Z\overset{D}{=}Y+Z&\Longrightarrow C_X(t)C_Z(t)=C_Y(t)C_Z(t)\\&\Longrightarrow C_X(t)=C_Y(t)\Longrightarrow X\overset{D}{=}Y.\end{aligned}$$

مثلاً اگر Z نرمال استاندارد یا تباهیده باشد، قانون حذف درست است.

برای اینکه نشان دهیم قانون حذف همواره درست نیست، نمی‌توان یک مثال نقض ساده پیدا کرد. با این حال برای اطمینان خاطر به این مثال توجه نمایید:

سه تابع مشخصه زیر را که به نوع پولیا شهرت دارند در نظر می‌گیریم (مرجع ۳).

$$C_X(t)=\begin{cases}1-|t| & |t|\leq \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4|t|} & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$C_Y(t)=\begin{cases}1-|t| & |t|\leq 1\\ 0 & |t|>1\end{cases}$$

$$C_Z(t)=\begin{cases}1-2|t| & |t|\leq \frac{1}{2}\\ 0 & |t|>\frac{1}{2}\end{cases}$$

با فرض مستقل بودن X و Z همچنین Y، Z داریم:

$$C_{X+Z}(t) = C_X(t)C_Z(t) = \begin{cases} (۱ - ۲|t|)(۱ - |t|) & |t| \leq \frac{۱}{۲} \\ ۰ & |t| > \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

$$C_{Y+Z}(t) = C_Y(t)C_Z(t) = \begin{cases} (۱ - ۲|t|)(۱ - |t|) & |t| \leq \frac{۱}{۲} \\ ۰ & |t| > \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

بنابر قضیهٔ یکتائی چون دو تابع مشخصه بالا برابرند داریم $X+Z \overset{D}{=} Y+Z$، ولی بنابر همین قضیه $X \overset{D}{\neq} Y$ زیرا $C_X(t) \neq C_Y(t)$.

قانون حذف تحت شرایطی ضعیفتر از $C_Z(t) \neq ۰$ ممکن است درست باشد، ولی بررسی این امر نیاز به آنالیز و احتمال پیشرفته دارد.

مراجع

[1] Chung, K. L. (1974), A Course in Probability Theory, 2nd Ed. Academic Press, New York, pp. 154.

[2] Feller, W. (1971), An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol. 2, John Wiley, New York, pp. 229-230.

[3] Lukacs, E. (1970), Chracteristic Functions, 2nd Ed., Griffin, London, pp.55.

شوخی

شخصی از یک حسابدار، یک ریاضیدان، یک مهندس، یک آماردان و یک بیمه‌گر پرسید، ۲ + ۲ چند می‌شود. حسابدار گفت "۴". ریاضیدان پاسخ داد «بستگی به پایهٔ عددی شما دارد.» مهندس خط‌کش محاسبه‌اش را بیرون آورد و گفت: «تقریباً ۳٫۹۹». آماردان پس از مراجعه به جدولهایش پاسخ داد: «۹۵% مطمئنم که این مقدار بین ۳٫۹۵ و ۴٫۰۵ قرار دارد». بیمه‌گر گفت: «می‌خواهید چند باشد؟».

[نقل از Chance, No. 1, 1995 ترجمهٔ م. عطائی]