جیمز استرلینگ و فرمول تقریبی او برای $n!$

جواد بهبودیان *

ممکن است با جیمز استرلینگ (۱۷۷۰-۱۶۹۲) چندان آشنا نباشید. او یک ریاضیدان انگلیسی بود که در دانشگاه اکسفورد تحصیل می‌کرد ولی به خاطر عقاید سیاسی از آنجا اخراج و روانه ونیز شد. سپس تحصیلات و تدریس خود را در ایتالیا دنبال کرد و پس از ده سال از ترس اینکه ترور شود به لندن بازگشت و به ونیزی شهرت یافت.

حساب تفاضلهای محدود، بسط مک لورن، اعداد استرلینگ و چند توزیع گسسته را به او نسبت می‌دهند. شما او را تنها از راه فرمول تقریبی زیر، که به گفته‌ای کار دموآور (۱۷۵۴-۱۶۷۷) ریاضیدان فرانسوی ـ انگلیسی بوده است، می‌شناسید.

$$n! \approx \sqrt{۲\pi n}e^{-n}n^n$$

این فرمول که در محاسبات تقریبی کاربرد فراوان دارد، در اغلب کتابهای حسابان، آمار و احتمال دیده می‌شود. ولی دانشجویان اغلب آن را فراموش می‌کنند و به ندرت اثبات آن را می‌بینند.

اینک به اثبات احتمالی زیر، که در [۱] و [۳] آمده است و بهترین روش برای به خاطر سپردن فرمول بالاست، توجه کنید.

فرض کنید X دارای توزیع پواسن با پارامتر $\lambda = ۱$ باشد. نمونه تصادفی $X_۱, \ldots, X_n$ را از X در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که $Y = X_۱ + \cdots + X_n$ دارای توزیع پواسن با میانگین $\mu = n$ و واریانس $\sigma^۲ = n$ است. برای nهای بزرگ، بنابر قضیهٔ حد مرکزی، Y تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین $\mu = n$ و واریانس $\sigma^۲ = n$ است. از این رو می‌توان نشان داد که برای nهای بزرگ تابع چگالی توزیع $P(n)$ (پواسن با پارامتر n) و تابع چگالی توزیع $N(n,n)$ (نرمال با میانگین n و واریانس n) در نقطه n تقریباً برابرند. به سخنی دیگر

$$\frac{e^{-n}n^n}{n!} \approx \frac{۱}{\sqrt{۲\pi n}}e^{-\frac{۱}{۲n}(n-n)^۲} = \frac{۱}{\sqrt{۲\pi n}}$$

از این تساوی تقریبی می‌توان $n!$ را به صورت فرمول استرلینگ به دست آورد.

مراجع

[1] Dennis P. Walsh (1995), "Equating Poisson and Normal Probability Functions to Derive Stirling's Formula", American Statistician, **49**, 270-271.

[2] National Council of Teachers of Mathematics (1969), "Historical Topics for the Mathematics Classrom", NCTM, 828.

[3] Tein-Chung Hu (1988) "A Statistical Method of Approach of Stirling's Formula", American Statistician, **42**, 204-205.

*) بخش آمار دانشگاه شیراز