فضای نمونه‌ای و نسبت آن با استنباط آماری

سیامک نوربلوچی*

چکیده

نخست مباحثی دربارهٔ تعریف، وجود و یکتایی فضاهای نمونه‌ای و تبعات آنها را مطرح می‌کنیم. می‌بینیم مسألهٔ مرزبندی برای فضای نمونه‌ای روشن نشده است. فضای نمونه‌ای جزئی اعتباری است و از این حیث فضای نمونه‌ای «مناسب» نامشخص و نایکتاست.

سپس مسألهٔ ضرورت فضای نمونه‌ای، برای به انجام رساندن استنباط آماریِ متکی بر مدل احتمال مطرح می‌شود. اثر تغییر، تعویض و تقریب آن به واسطه افزایش دانش (نمونه‌گیری، شرطی کردن) به اجمال مورد بحث قرار می‌گیرد.

۱ پیشگفتار

این مقاله دارای سه بخش است. بخش نخست مقدمات مسأله و موجبات و انگیزهٔ پرداختن به آن را مطرح می‌کند. بخش دوم به معرفی فضای نمونه‌ای و اجزای وابسته به آن می‌پردازد. چند پرسش دربارهٔ فضای نمونه‌ای در بخش سوم مورد بحث قرار می‌گیرد و پیشنهادهایی برای مطالعهٔ بیشتر مسأله‌های مطروحه عرضه می‌شود.

۱.۱ آشنایی با مسأله

احتمال یک پیشامد در کتب مقدماتی معمولاً به عنوان نسبت تعداد حالات مساعد به تعداد حالات ممکن معرفی می‌شود. نخستین نتیجهٔ ضروری تعریف احتمال یکنواخت لاپلاسی، تعریف احتمال برحسب تعداد اعضای فضای نمونه‌ای و زیرمجموعه‌های مختلف آن است. در واقع، برای محاسبه این احتمال، برای هر پیشامد دلخواه، فقط دانستن تعداد اعضای فضا و تمیز وضع تعلق اعضا به پیشامد مورد نظر کفایت می‌کند. امّا چنانچه بخواهیم محاسبه احتمال هر پیشامدی، مقدور باشد، داشتن فهرست کامل اعضای فضا، تنها جزء لازم و کافی ساختن مدل احتمال است.

در تعریف فراوانی در دراز مدت برای احتمال نیز اگر بخواهیم احتمال هر پیشامد را محاسبه کنیم، شرطی که در عمل محتملاً مطلوب نیست، فضای نمونه‌ای جزئی لازم امّا ناکافی برای محاسبهٔ (تقریبی) احتمال است. دانستن تعداد تکرارهای آزمایش یا حجم جامعه نیز ضرورت دارد. نکتهٔ ممیّز دیگر بین این دو تعریف احتمال در ملزومات محاسبهٔ احتمال یک پیشامد معیّن مفروض است: در محاسبهٔ احتمال یکنواخت یک پیشامد، باید تعداد اعضای فضا معلوم باشد، امّا در تعریف دوّم تعداد تکرار آزمایش و نه عدد اصلی فضای نمونه‌ای ضرورت دارد.

در محاسبهٔ احتمال ذهنی هر پیشامد، هیچ دانشی دربارهٔ فضای نمونه‌ای، حداقل به طور مستقیم، جز تشخیص پیشامد مفروض، مورد نیاز نیست. مثال زیر ممیّزات پیشگفته را روشنتر می‌سازد.

مثال ۱. در ریختن تاس، احتمال آمدن شش با مدل لاپلاسی، $\frac{1}{6}$ است. محاسبه $\frac{1}{6}$ منوط به دانستن این نکته است که تاس شش وجهی است. محاسبهٔ احتمال آمدن شش، با تعریف فراوانی در دراز مدت به تقریب، نیازمند دانستن تعداد دفعاتی است که شش آمده و تعداد دفعاتی است که آزمایش تکرار شده است. ولی دانستن اینکه تاس شش وجهی است ضروری نیست! در ابراز درجه اعتقاد[1] برای رخداد شش، دانستن کلیه حالات و تعداد وجوه ضروری نیست. هر چند دانش یا حتی اطلاعی جزئی دربارهٔ

*) دکتر سیامک نوربلوچی، گروه آمار دانشگاه شهید بهشتی

1) belief

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

آن ممکن است در صورت بندی احتمال ذهنی آمدن شش، و البته بسیاری از اطلاعات دیگر، ذی مدخل باشد.

غرض از ذکر نکات فوق، نمایش تأثیر فضای نمونه‌ای در محاسبهٔ احتمال است. در شیوه‌های استنباط آماری متکی بر مفهومی از احتمال، موارد اختلاف فضاهای نمونه‌ای برای کلیه اعضای مدل آماری مطرح بوده و از آنجا بایستی در استنباطهای منتج از آنها مؤثر باشد.

به سنّت احتمال لاپلاسی، رسم شده است فضای نمونه‌ای را در مدل احتمال ذکر کنند و باز مرسوم است که در مدل آماری یک آزمایش تصادفی»، فضاهای نمونه‌ای مدلهای احتمال را مشخص می‌کنند.اینکه این فضاها معلوم‌اند یا یکسان‌اند یا نامعلوم و متفاوت‌اند، برای استنباط دربارهٔ جامعهٔ واقعی «مناسبترین» و «مربوط‌ترین» مجموعه‌های حالات ممکن هستند یا خیر، از جمله پرسشهای مهم استنباط‌اند. مثال زیر نوع معضلات مطروحه را به اجمال نمایش می‌دهد.

مثال ۲. نمی‌دانیم چه درصدی از جوانان کشوری معتاد به مواد مخدرند. می‌خواهیم به استنباط آماری متکی بر احتمال دربارهٔ این نسبت مجهول بپردازیم. نخستین پرسش این است که چه چیزی را مشاهده کنیم. آیا از تک تک افراد کشور یا نمونه‌ای از ایشان بپرسیم که معتادند یا خیر (مشاهده ۱)، به آزمایش خون و دامنهٔ مقادیر متمایز بالقوه ممکن جوابهای آزمایش هر فرد اکتفا کنیم (مشاهده ۲)، به تعیین مصرف روزانه (یا هفتگی) مواد مخدر بپردازیم (مشاهده ۳)، واردات و تولیدات (سالانه و ...) این مواد را مشاهده کنیم (مشاهده ۴) آیا علاوه بر مشاهداتی این چنین، ثبت استان محل سکونت و سن افراد نیز ضروری است (مشاهده‌های ۵ و ۶) و چه بسیار اطلاعات کمکی دیگر که ممکن است در استنباط مورد نیاز باشند. کدام فضاهای نمونه‌ای حاصل از این مشاهده‌ها بیشتر با مسأله مناسبت دارند، و کدام مشاهده(ها) مناسبترند. پس از تصمیم‌گیری در این موارد، مسألهٔ بعدی نحوهٔ مراجعه و ثبت مشاهدات است. این نحوهٔ مراجعه نیز فضای نمونه‌ای را تغییر می‌دهد: نمونه‌گیری یا تمام شماری را برگزینیم؟ در صورت نمونه‌گیری، نمونه‌گیری دو جمله‌ای، پواسن، دو جمله‌ای منفی... کدام یک ارجح‌اند؟ ثبت تفصیلی مشاهده‌ها از تک‌تک افراد (نمونه یا جامعه) با فضای حاصلضربی (در نمونه‌گیری مستقل) یا با ثبت خلاصه‌هایی از مشاهده‌ها، فضاهای نمونه‌ای ساده‌تر را ترجیح دهیم؟ داشتن اطلاعات اضافی دربارهٔ میزان معتادان دستگیر شده و امثال آن در فضای نمونه‌ای بر هر یک از اعضای مدل آماری چه تأثیری دارد؟

بررسی و البته نه پاسخ به برخی از این نوع پرسشها، موضوع مقاله حاضر است.

۲.۱ مقدمات

دو صورت‌بندی عمده برای هر مساله آماری بر اساس مفهوم احتمال، بسط یافته است:

الف) صورت‌بندی متکی بر احتمال ساختگی و مصنوع در نمونه‌گیری کلاسیک از جامعه‌های متناهی و موارد مشابه،

ب) صورت‌بندی متکی بر احتمال غیر مصنوع (ذهنی، رفتاری، فراوانی، منطقی و ...).

به هر صورتی، در ساختن مدل احتمالِ عددی، دو جزء اساسی زیر را باید تعریف کرد:

الف) مجموعهٔ کلیهٔ حالات بالقوه ممکن،

ب) متناظرکردن عددی با هر حالت، که این عدد به معنایی احتمال حالت مربور است.

از آنجا که غرض از ساختن مدل احتمال بیان احکامی دربارهٔ حالات بالقوه ممکن است، تعبیهٔ امکان محاسبهٔ احتمال این احکام ضروری است، لهذا ساده‌ترین صورت از زبانهای منطقی را که شامل احکام مورد لزوم نهایی باشد در نظر گرفته، احتمالها را به قسمی در یکدیگر ادغام می‌کنند که حداقل با آن سازگار باشد. برای این منظور حداقل ساختار زبان منطق گزاره‌ای را برای خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های حالات ممکن در شروع بسط مدل احتمال مفروض دانسته، آن را عالم سخن مدل احتمال اختیار می‌کنند. این خانواده در واقع مجموعه‌ای از مجموعه مصادیق گزاره‌هایی درباره حالات ممکن است که تحت عملهای مکمل یابی (نقیض گزاره متناظر) و مثلاً، اجتماع مجموعه‌ها (ساختن گزاره مرکب با استفاده از یای منفصله) بسته است. توجه می‌کنیم این دو اعمالی هستند که زبان منطقی مورد اشاره با آنها صورت‌بندی می‌شود.

برای سهولت در مراجعات بعدی، این خانواده را با $\mathbb{F}$ نشان داده، s بر حالتی از مجموعه حالات بالقوه ممکن، S، و $P(F)$ بر احتمال منتسب به $F \in \mathbb{F}$ دلخواه دلالت خواهد کرد. فهرست تفضیلی احتمالهای منتسب به اعضای $\mathbb{F}$، مجموعهٔ S و $\mathbb{F}$ انتخاب شده مدل احتمال، $\mathcal{M}$ برای «پدیده تصادفی» یا معرفت اجمالی ما را تشکیل می‌دهند. بدین‌ترتیب مدل احتمال، $\mathcal{M}$ عبارت است از:

$$\mathcal{M} = (\{P(F), F \in \mathbb{F}\}, \mathbb{F}, S)$$

استنباط آماری متکی بر احتمال بر اساس مدل آماری گسترش می‌یابد. $\mathcal{E}$ مدل آماری یک آزمایش مجموعه‌ای از مدل‌های احتمال است.

$$\mathcal{E} = \{\mathcal{M}_۱, \mathcal{M}_۲, \dots\}$$

$\mathcal{E}$ حداقل دو عضو دارد و ضرورتاً شمارا نیست. اگر بتوان تناظری با زیرمجموعه‌ای از اعداد (معمولاً حقیقی) برای اعضای $\mathcal{E}$ برقرار کرد، $\mathcal{E}$ مدل آماری پارامتری و برد تناظر، Θ، فضای پارامتر خوانده می‌شود. در ساختن $\mathcal{E}$، امید این است که جامعهٔ اصلی عضوی از آن باشد. یکی از اهداف استنباط آماری نزدیک شدن به این عضو ناشناخته است، بدین لحاظ،

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

تناظر معمولاً یک به یک است که در این صورت تناظر را تشخیص دهنده[2] می‌خوانند، زیرا در این حالت است که به کمک تناظر و اعضای Θ می‌توان مدلهای موجود در $\mathcal{E}$ را از یکدیگر تمیز داد. متأسفانه در بسیاری موارد تناظر یک به یک نیست.

۲ طبیعت فضای نمونه

فضای نمونه‌ای را به کمک متغیر تصادفی تعریف می‌کنند. متغیر تصادفی کدگذاری طبیعی یا قراردادی حالات ممکن موجود در S است. امّا آنچه مقدمتاً ضروری است تشکیل S است. وقتی قد افراد، عملکرد محصول، میزان کلسترول خون یا مقاومت مفتولی مسی را اندازه‌گیری می‌کنیم سوای قراردادی که برای مقیاسهای اندازه‌گیری پذیرفته‌ایم، متغیر تصادفی همان فضای حالات ممکن را به عنوان فضای نمونه‌ای به دست می‌دهد. هنگامی که جنس افراد را ثبت می‌کنیم، فضای نمونه‌ای $\{۰, ۱\}$ ناشی از کدگذاری قراردادی حالات بالقوه است.

فرض کنید X متغیر تصادفی تعریف شده روی S و $\mathcal{X}$ برد آن و $P(x)$ احتمال حاصل برای مشاهدهٔ کد شدهٔ x باشد. چنانچه تمام شماری کرده و جنس تک‌تک افراد جامعه‌ای را معلوم کرده باشیم وفراوانی نسبی مردان $x = ۱$ و زنان $x = ۰$ را به دست آورده باشیم، جدول زیر

$\mathcal{M}$	x	۰	۱
	$P(x)$	۰٫۵۱	۰٫۴۹

می‌تواند یک مدل احتمال برای انتخاب تصادفی فردی از جامعه باشد. در ساختن مدل آماری برای یک آزمایش چند مدل آماری داریم، مثلاً مدل زیر یک مدل آماری برای این آزمایش گزینش تصادفی عضوی از این جامعه است:

	x	۰	۱
$\mathcal{E}$	$P_1(x)$	۰٫۵۱	۰٫۴۹
	$P_2(x)$	۰٫۴	۰٫۶
	$P_3(x)$	۰٫۷	۰٫۳

اصل اساسی زیرپایه استنباط آماری و شرط اولیه ساختن مدل آماری $\mathcal{E}$ است.

اصل صفر: جامعه مورد بررسی عضوی از $\mathcal{E}$ است و $\mathcal{E}$ حداقل باید دارای دو عضو باشد. اگر M_1 و M_2 دو مدل در $\mathcal{E}$ باشند، اغلب فرض می‌شود که عدم اطلاع، دربارهٔ جامعه فقط محدود به نحوه قرارگرفتن احتمالهای غیر صفر روی مقادیر متمایز فضا یا فضاهای نمونه‌ای است و به این لحاظ تفاوت مدلهای موجود در $\mathcal{E}$ در توزیع‌های مختلف روی فضای نمونه‌ای مشترکی است که از اجتماع تکیه‌گاه‌های این توزیع ساخته می‌شود. چنانچه عدم اطلاع ما دربارهٔ جامعه به حدی باشد که $\mathcal{X}$ را به خوبی نشناسیم، در مدل $\mathcal{E}$ دارای انواع فضاهای نمونه‌ای خواهیم بود.

مثال ۳. فرض کنید $\mathcal{E} = \{B(n,p) : ۰ < p < ۱\}$ که در آن n تعداد «پرتابهای، سکه» معلوم است در این حالت $\mathcal{X} = \{۰, ۱, \ldots, n\}$ برای همهٔ اعضای $\mathcal{E}$ ثابت است. خانوادهٔ توزیعها دارای تکیه‌گاه یکسان $\mathcal{X}$ است. چنانچه n تعداد پرتابهای سکه کاملاً معلوم نباشد، چه p معلوم و چه نامعلوم باشد، فضاهای نمونه‌ای متفاوتی در مدل آماری وجود خواهند داشت. پس در واقع مدلهایی با تکیه‌گاههای یکسان معادل داشتن معرفت تام دربارهٔ فضای نمونه‌ای است. چند اصل مهم در ساختن مدل آزمایش، مورد قبول همه آمارشناسان است:

اصل اوّل: دانش بیشتر باید استنباط آماری بهتر حاصل کند.

اصل دوّم: کلیه اطلاعات موجود دربارهٔ پدیدهٔ تصادفی باید به کار رود.

اصل سوّم: هر چه اطلاعات بیشتری در ساختن مدل به‌کار رود، حالات بالقوه ممکن افزایش نمی‌یابند.

اصل چهارم: افزایش دانش، به کاهش تعداد اعضای مدل منجر می‌شود.

کلیه فعالیت‌های مدل‌سازی در شروع، خارج از مدل و دربارهٔ مدل به انجام می‌رسد. در واقع عمل استنباط آماری با توجه به اصول ۰ تا ۴ به کوچک کردن بیشتر مدل مورد توافق، از درون مدل و بر اساس مشاهده‌هایی است که اطلاعات جزئی بیشتری از درون مدل دربارهٔ جامعه مورد بررسی عرضه می‌دارند.

اولین نتیجه‌ای که از مقدمات بالا می‌گیریم این است که: دانستن $\mathcal{X}$ به استنباط بهتر منجر می‌شود. این را که مراد، از استنباط «بهتر» چیست، می‌توان به صورتی دقیقتر عرضه کرد که در انتهای بخش بعد در مواردی به این کار پرداخته‌ایم.

می‌دانیم روی مجموعه‌ای از حالات ممکن می‌توان انواع متغیرهای تصادفی را تعریف کرد. تشخیص حالتهای ممکن آزمایش از غیر آن و انتخاب تعریفی جامع و مانع برای حالت ممکن و این که کدام جنبه از پدیدهٔ تصادفی را باید مطالعه کرد تا حالات ممکن آن حصر شود، مسأله‌ای بسیار مهم است، زیرا پرداختن به Sی که به معنایی حتی‌المقدور به موضوع تحقیق نزدیک باشد، امری واضح نیست. انتخاب S مناسب، یا به عبارت معادل، تصمیم‌گیری دربارهٔ آن وجه از پدیده تصادفی که فکر می‌کنیم با وضع مجهول مورد استنباط دارای رابطه‌ای آگاهی دهنده است (در صورت وجود) و سپس تشخیص حالات ممکن آن و نهایتاً ساختن متغیرهای تصادفی، از جمله فعالیت‌هایی هستند که نیازمند تفکر، تجربه و در عین حال اغماض و تساهل‌اند.

معمولاً مسأله فضای نمونه‌ای و متغیرهای تصادفی سازنده آن مفروض گرفته می‌شود. حال آنکه، صورت‌بندی لازم تارسیدن به این مقدمات یکی از دشواریهای مساله است.

2) identifiable

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

مثال ۴. می‌خواهیم دربارهٔ تعداد دختران خانواده‌های دو فرزندی مطالعه‌ای انجام دهیم. در تعریف مشخص خانوادهٔ دو فرزندی که به اصطلاح واحد تولید کننده داده‌ها خواهد بود، پس از آنکه معلوم کردیم مراد از خانوادهٔ دو فرزندی چیست، حالات ممکن چنین خانواده‌هایی را می‌توان در چهار گروه زیر عرضه کرد:

ـ خانواده‌ای که فرزند اول پسر و فرزند دوم پسر است (پ،پ)
ـ « « دختر « پسر « (د،پ)
ـ « « پسر « دختر « (پ،د)
ـ « « دختر « دختر « (د،د)

که مجموعهٔ حالات ممکن متناظر عبارت خواهد بود از:
$S_1 =$ {(د،د) و (پ،د) و (د،پ) و (پ،پ)} . اگر ترتیب ولادت را در ساختن فضای نمونه‌ای مورد غفلت قرار دهیم (تعمداً یا سهواً) می‌توانیم صرفاً خانواده‌ها را به سه حالت خانواده‌های دو فرزندی بی‌دختر، یک دختر، دو دختر محدود کنیم (S_2).

S_1، S_2 دو فضای حالات ممکنهٔ برای مسأله‌ای واحدند. اینکه کدام یک از این دو فضا باید به عنوان فضای مدل استنباطی به کار رود، مسأله‌ای است که به هیچ وجه روشن نیست. شاید فضای مناسبتر حتی پیچیده‌تر از اینها باشد و مثلاً این اطلاع اضافی که دو فرزند خانواده، والدین مشترکی دارند یا خیر را در بر بگیرد، که در این صورت فهرست حالات ممکنه مفصلتر خواهد شد. ترتیب ولادت، اشتراک والدین و اطلاعات بسیار دیگری که هنگام ساختن فضای حالات بالقوه ممکن و از آنجا فضای نمونه‌ای که بایستی در S گنجانده یا حذف شوند، مبحثی است که یکی از مهمترین مباحث اصولی استنباط آماری، مبحث آماره‌های کمکی، حول آن تکوین یافته است.

توجه کنید بر اساس تعریف احتمال یکنواخت، احتمال خانواده‌ای با دو دختر با فضای نمونه‌ای S_1، $\frac{1}{4}$ است ولی با فضای نمونه S_2 برابر با $\frac{1}{3}$ است که به قول هاجز و لهمن (۱۳۷۲) «با هیچ بحث نظری ریاضی نمی‌توان یکی از این دو را بر دیگری ترجیح داد.»

اینکه کدام یک از این دو مدل احتمال به توزیع واقعی چنین خانواده‌هایی در جامعه‌ای مفروض نزدیکتر است یا توزیع واقعی جامعه است، پرسشی است که چنانچه برای پاسخ آن به جامعهٔ مفروض مراجعه کنیم (نمونه‌گیری یا به طریقی دیگر)، درواقع به پرسش عمده استنباط آماری گرفتار شده‌ایم. به عبارت دیگر، گزینش فضای نمونه‌ای خود یک مسأله استنباطی است که البته واضح است راه‌حلی ماقبل التجربی نمی‌تواند داشته باشد (قابل توجه هواداران سنتّی بیز).

بر اساس احتمال در درازمدت، مراجعه به خانواده‌ها و ثبت تعداد دختران پس از تأمین شرایط یکسان برای تکرارها (مراجعه به هر خانواده) که مثلاً کودکان والدین مشترک داشته‌اند، ترتیب ولادت‌ها مشابه بوده است و ... در نمونه‌ای بزرگ عددی به‌دست می‌آید که هنگام تقسیم آن بر «تکرار کل آزمایش» محقّق حیران می‌شود! آیا تکرار کل آزمایش برابر است با:

ـ کل خانواده‌های دو فرزندی مورد مراجعه،
ـ کل خانواده‌های دو فرزندی که والدین یکسانی دارند،
ـ کل خانواده‌های دو فرزندی و ترتیب ولادت‌ها یکسان است و ... ؟

تقسیم بر هر یک از این «تکرارها» تقریب متفاوتی برای احتمالها به دست می‌دهد. کدام یک از این مجموعه‌ها، مجموعه است که به مسأله مورد تحقیق، «ربط» بیشتری دارد؟ پاسخ به این معضل درگرو تشخیص آن Sی است که به مسأله «مربوط‌تر» باشد. داشتن مفهومی از «مربوط بودن»[3] و تأثیر آن در انتخاب فضای نمونه‌ای مناسب از مباحث کلاسیکی است که منشاء آن درکارهای فیشر است. مثال عملی دیگری را مطرح می‌کنیم که غرض آن نمایش وابستگی معنای احتمال در درازمدت به تشخیص فضای نمونه‌ای است.

مثال ۵. می‌خواهیم احتمال قبول‌شدن را در آزمون سراسری دانشگاه‌های کشور بیابیم. واضح است که مدل لاپلاسی، حداقل به صورت خام، از آنجا که توانایی‌های فردی را نمی‌تواند در نظر بگیرد چندان مناسب نیست. استفاده از مفهوم فراوانی احتمال نیازمند تأمین شرایط فی‌الواقع غیر عملیاتی بسیاری است: در این مدل بایستی کلیه اوضاع ضروری برای قبول‌شدن یا حتی شرکت افراد درآزمون را یکسان گرفته و شرکت هر فرد (یا فعالیت مشابه دیگر) را در آزمون تکرار «مستقل» (در اینجا به مفهومی متقدّم بر مفهوم احتمالی آن) آزمایشی بگیریم و سپس با فضای حالاتی با دو عضو {رد، قبول} $= S_0$ به شمارش هر دو مورد بپردازیم. امّا شمارش فراوانی‌های دو حالت رد یا قبول را برای کدام مجموعه به انجام برسانیم؟ کل ثبت‌نام کنندگان، افراد حاضر در جلسه آزمون مرحله اول، افراد حاضر در جلسه آزمون مرحله دوم، آیا تفکیک گروه‌های آزمایشی و سهمیه‌ها در محاسبه احتمال ضروری است؟ متوجه می‌شویم که عطف نظر به یک از این جامعه‌ها معادل با تعریف فضای حالات (و فضای نمونه‌ای) جدیدی است. مثلاً:

$S_1 =$ {(رد، حاضر در جلسه مرحله۱) ،
(رد، غایب در جلسه مرحله۱) ، (قبول، حاضر در جلسه مرحله ۱)}

$S_2 =$ {(رد، رد مرحله ۱)، (رد، قبولی در مرحله۱)،
(قبول، قبول در مرحله۱)}

نمونه‌هایی از بسیاری فضاهای قابل تعریف برای ساختن مدل احتمال برای مسأله‌اند.

علاوه بر مشکل تعیین و تعریف اعضای فضا، نوع و ماهیت اعضا نیز تابع درجه شناخت، از موضوع یا ماهیت مسأله مورد تحقیق است که البته نهایتاً در انتخاب و توسعه روش استنباطی نهایی ذی مدخل است.

کدگذاری رایج نتایج آزمایشی برنولی (مثال ۱) یا فضای اوضاع ممکنه یک زنجیرهٔ مارکف دو حالتی، صورتی از یک متغیر تصادفی اسمی است

---

3) relevancy

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

بدین معنا که اعضای فضا صرفاً جهت اسم‌گذاری وضعی معین برگزیده شده‌اند.

نحوهٔ توزین عملکرد یک رقم زراعی فضای نمونه‌ای عرضه می‌دارد که اعداد حاصل از آن صرفاً دلالت بر یکی از انواع بسیارِ عملکردهای ممکن الوجود در مزرعه می‌کنند، عملکردهایی که فارغ از هر نحوه و قاعدهٔ توزین و مقیاس عددی وزن، حجم یا سطح‌اند، یعنی: چیزی هستند در مزرعه، رقمی «پرمحصول‌تر» و دیگری «کم‌محصول‌تر» و ... که برای تبادل اطلاعات برای ایجاد قدرت تفکری دقیقتر از مقیاسی چون کیلوگرم، تن و ... استفاده شده است. در این گونه موارد، فضای نمونه‌ای صرفاً ناشی از انتخاب مقیاس نیست، بلکه فرآیند کیل‌گیری که دارای مراحل خاص خشک کردن گندم، جدا کردن کاه و سایر فعالیتهای مشابه است نیز در ساختن فضای نمونه سهیم‌اند.

تعداد دانه‌های موجود در یک غلاف لوبیا، فضای نمونه‌ای را به‌دست می‌دهد که فارغ از مقیاس اندازه‌گیری است. طبقه‌بندی درآمد، درجه‌بندی وخامت بیماری‌ها و ... نوع دیگری از فضای نمونه‌ای هستند که علاوه بر کدگذاری اسمی حالات ممکن، نوعی ترتیب در فضای نمونه‌ای را گزارش می‌دهند. درجه حرارت، فشار هوا و مواردی این چنین که صفری طبیعی ندارند نوع دیگری از روش‌های استنباطی را طلب خواهند کرد.

واضح است که می‌توان فضای نمونه‌ای را مجموعه‌ای از اعداد ندانست، انتساب احتمال به فضاهایی که ساختارهایی مشابه اعداد حقیقی دارند سال‌هاست گسترش یافته است و مبتدای مباحث استنباط‌های محض قرار گرفته‌اند. استفاده از مجموعه‌های فازی نیز به شرط عدم تمییز واضح اعضای فضا، خود مبحث مستقلی است که منجر به ابداع انواع روش‌های استنباطی شده است.

۳ فضای نمونه‌ای و چند پرسش

در این بخش، با طرح چند سئوال به بررسی تأثیر تغییر فضای نمونه‌ای به واسطهٔ تکنیک‌های کلاسیک آمار می‌پردازیم. ایده‌های بزرگانی چون فیشر ودیوید باسو راهگشای ما بوده‌اند.

آیا فضای نمونه‌ای برای مساله‌ای مفروض یکتاست؟

پرسشی که مطرح کرده‌ایم به صورت دقیق‌تر این است که چنانچه بر چگونگی ثبت داده‌ها و نوع مشاهده‌ها توافق کردیم، آیا باز هم امکان دارد فضاهای نمونه‌ای متفاوتی حاصل شوند؟ این‌که در مساله‌ای مفروض می‌توان انواع داده‌های مختلف و مشاهده‌های متفاوت را ثبت کرد، نکته‌ای بود که در بخش قبل بدان اشاره شد.

گیرید $x_1, \dots, x_k$ مقادیر متمایز صفت مورد بررسی در جامعه‌ای متناهی با N عضو باشد. هر طرح نمونه‌گیری از این جامعه فضای نمونه‌ای خاص خود را تولید می‌کند. مثلاً اگر بخواهیم با نمونه‌ای به حجم s، سطح زیر کشت گندم را در بهره‌برداری‌های کشور بررسی کنیم، در طرح نمونه‌ای تصادفی ساده بدون جایگذاری از بهره‌برداری‌ها، فضای نمونه‌ای دارای $\binom{N}{s}$ عضو است که هر عضو آن متناظر با زیرمجموعه‌ای از برچسب‌های متمایز کلیهٔ افراد جامعه است. برای همین جامعه و مشخصه، در صورت استفاده از طرحهای پیچیده‌تر، فضاهای نمونه‌ای متفاوتی به‌دست می‌آیند.

این عدم یکتایی مخصوص جامعه‌های متناهی نیست. مسأله مطالعه p، نسبت مجهول صفتی دو حالتی، در جامعه‌ای نامتناهی را در نظر بگیرید. طرح نمونه‌گیری دو جمله‌ای، فضای نمونه‌ای $\{0, 1, \dots, n\}$ را حاصل می‌کند، حال آنکه نمونه‌گیری دو جمله‌ای منفی، فضای نمونه‌ای $\{0, 1, 2, \dots\}$ را ایجاد می‌نماید. طرحهای دیگر فضاهای دیگری را به وجود می‌آورند.

این پرسش که کدام فضای نمونه‌ای، فضای «مناسب‌تر» است، پرسش سختی است. گیرید مساله‌ای داریم که مطالعهٔ آنها منوط به استنباط دربارهٔ θ است. فضای مقادیر θ مجموعهٔ Θ است. دو آزمایش $\mathcal{E}_1 = (\Theta, \mathcal{X}_1, \mathcal{P}_1)$ و $\mathcal{E}_2 = (\Theta, \mathcal{X}_2, \mathcal{P}_2)$ قبل از شروع نمونه‌گیری مطرح‌اند. مسأله، انتخاب یکی از این دو آزمایش است. توجه کنید هر دو آزمایش دارای فضای پارامتر واحدی هستند، ولی فضای نمونه‌ای (و البته توابع احتمال) متفاوتی دارند.

برای مقایسه دو آزمایش، دو نحوهٔ برخورد مجزا می‌توانیم اختیار کنیم:

الف) بدانیم دربارهٔ θ چه می‌خواهیم.

ب) ندانیم دربارهٔ θ چه می‌خواهیم.

در حالت اول، مثلاً اگر قصد ما برآورد θ باشد و شیوهٔ برآورد برگزیده ما هم شیوهٔ نااریبی باشد، می‌توانیم نوعی ارجحیت بر اساس این ملاک برای مساله عرضه کنیم، مثلاً آن آزمایشی را برگزینیم که در آن

الف) θ برآوردپذیر باشد،

ب) برآورد $UMVU$ آن (در صورت وجود) دارای واریانس کمتر در مقایسه با آزمایش‌دیگر باشد.

اگر بخواهیم دربارهٔ θ آزمون فرض انجام دهیم و فرض ساده‌ای را در مقابل فرض سادهٔ جانشینی آزمون کنیم و روش آزمون، روش نیمن ـ پیرسن باشد، آن مدل آماری‌ای را می‌پذیریم که توان تواناترین آزمون سطح α، برای هر α، در آن بیشتر باشد. [به بهمن ۱۹۸۶، فصل‌سوم، بخش ۴ رجوع کنید].

در حالت دوم که نمی‌دانیم واقعاً چه فعالیت استنباطی معینی را می‌خواهیم دربارهٔ θ اجرا کنیم، می‌توانیم محتاطانه عمل کنیم و مثلاً آن $\mathcal{E}_i$یی را برتر بدانیم که برای کلیهٔ مسائل تصمیم قابل تعریف، و در هر مساله‌ای، برای کلیه قواعد تصمیم موجود در آن مسأله، مقدار پارامتر مجهول θ هر چه باشد، مخاطره کمتری موجود باشد، یا از دو آزمایش، آن آزمایش را ارجح بدانیم که مقدار اطلاع آن، با مفهومی از اطلاع، کمتر از دیگری نباشد.

نکته مهم در این گونه مرتب کردن کامل آزمایشها، مسألهٔ امکان مرتب‌سازی است که معمولاً برای ملاکهای مقبول، مانند مخاطره، $R(\theta, \delta)$ و ملاک اطلاع، $I(\theta)$، موجود نیست و انتساب عددی واحد که نمایشگر مخاطره

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

برای کل آزمایش $\mathcal{E}$ یا اطلاع برای آن باشد، به جهت دستورالعملهای اختیاری متفاوت ساختن ملاک عددی، چندان مفید نیستند. به این لحاظ ترتیب جزئی آزمایشها مسیری است که مورد استفاده قرارگرفته و معمول شده است.

مسألهٔ مقایسه آزمایشها و ملاکهای مختلف مقایسه آنها و ارتباط بین ملاک‌ها، موضوع مقالات وکتابهای متعددی بوده است که از سالهای ۱۹۵۰ با کارهای بلکول شروع شده است. یکی ازکامل‌ترین مراجع این مطالعات، کتاب مقایسه آزمایشها (۱۹۹۰) تألیف تورگرسن، آمارشناس فقید نروژی است.

حالت خاصی از مبحث مقایسه آزمایشها، مبحث آمارهٔ کمکی است که از نظر تاریخی به طور مستقل در حیطه جداگانه‌ای گسترش یافته است ولی می‌توان آن را به کمک ابزارهای این گونه بررسی‌ها مطالعه کرد.

آیا داشتن فضای نمونه‌ای برای به انجام رساندن استنباط آماری ضروری است؟

پاسخ به این پرسش درگرو نگرش، به مسأله استنباط آماری است. چنانچه شیوه‌های استنباطی ماقبل‌التجربی را برای مطالعهٔ جامعه مورد بررسی برگزینیم و مایل باشیم با توجه به تمام مدل و نمونه‌های بالقوه ممکن مدل و نه فقط مشاهده‌ای که در دست داریم به داوری بپردازیم، داشتن فضای نمونه مسلماً ضروری است. ساختن فاصلهٔ اطمینان، آزمون‌های $UMPI$، $UMPU$، UMP، برآوردهای نااریب، مقایسه مخاطره‌ها و ... از جمله مواردی هستند که مستلزم داشتن فضای نمونه‌اند. چنانچه شیوهٔ استنباطی ما فقط متکی بر مشاهدهٔ موجود باشد، فضای نمونه‌ای و در واقع تمام احتمال روی آن مؤلفه‌های زائدی هستند. مثلاً در روش حداکثر درستنمایی، روش بیزی کلاسیک به فضای نمونه‌ای نیازی نداریم. در شیوهٔ کلاسیک بیزی محاسبه احتمال پسین صرفاً درگرو دانستن احتمال پیشین و تابع درستنمایی است. تابع درستنمایی نمایش «احتمال‌های مفروض» برای مشاهدهٔ موجود است که البته تعیین آن می‌تواند کاملاً مستقل از فضای نمونه‌ای انجام گیرد.

باید توجه کرد در حالت‌هایی که تابع پیشین، نمایش اطلاع پیش‌تجربی ما دربارهٔ پارامتر نبوده بلکه صرفاً براساس ملاکی برای استفاده در قضیه بیز بسط یافته است که ملاک مزبور وابسته به تعریف مدل و فضای نمونه‌ای است، در روش بیزی نیز، داشتن فضای نمونه ضروری است. مورد زیر این مدعا را روشن می‌کند.

برای تحلیل‌های بیزی استفاده از پیشینهای «بی‌اطلاع»[4] توسط جفریز[5] پیشنهاد شده است. پیشینهای مرجع برناردو نیز بر اساس ملاکهای پیش ـ تجربی اطلاع گسترش یافته است. در هر دو مورد، دانستن فضای نمونه‌ای برای تحلیل بیزی ضروری است که البته این کار در تعارض با اصل درستنمایی است. از آنجا که قضیه معروف برین بام بیان می‌دارد که پذیرش اصل بسندگی و اصل شرطی کردن الزاماً به پذیرش اصل درستنمایی منجر می‌شود، این شیوه‌های بیزی متکی بر تمام فضای نمونه‌ای در تعارض آشکار با اصل‌های بسندگی و شرطی کردن می‌باشند.

سئوال بعدی که طبیعتاً مطرح می‌شود این است که:

اگر فضای نمونه ضروری باشد، فضای نمونه‌ای «مناسب» برای ما کدام است؟

به عبارت دیگر اگر اصل درستنمایی را نپذیریم، از کدام فضای نمونه‌ای استفاده کنیم به قسمی که بتوانیم براساس ملاکی، استنباط بهتری از مجموعه اطلاعات موجود (مدل، مشاهده، دانش عام) حاصل کنیم؟

در بخش مربوط به عدم یکتایی فضاهای نمونه‌ای به این پرسش در حالتی که تعویض فضای نمونه‌ای به کمک تغییر نحوهٔ نمونه‌گیری انجام می‌شد پرداختیم. در واقع به تعبیری، تغییر طرح نمونه‌گیری که به جهت استنباط بهتر انجام می‌گیرد، انتخاب فضای نمونه‌ای مناسبتر است. در این جا حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن مدل $\mathcal{E}$ برای آزمایش پذیرفته شده است، امّا هنوز فکر می‌کنیم می‌توانیم مدل را بهبود بخشیم. مثال زیر مراد از «مناسب‌تر» بودن مدل را نمایش می‌دهد.

مثال ۶. مدل آماری زیر را برای جامعه‌ای پذیرفته‌ایم.

X	۱	۲	۳	
$P_\theta(x)$	$\frac{1-\theta}{4}$	$\frac{1+\theta}{4}$	$\frac{1}{2}$	$0 < \theta < 1$

واضح است که مشاهدهٔ $x = 3$، نسبت به تغییرات θ، حساس نیست، به تعبیر فراوانی برای احتمال، θ هر چه باشد، تعداد اعضای جامعه که x آنها برابر ۳ است، معلوم و برابر $\frac{1}{2}$ افراد جامعه است به عبارت دیگر، اوضاعی که با θ اندیس شده‌اند در وجود فیزیکی اعضایی با $x = 3$ هیچ تأثیری ندارند. در نتیجه، طبیعی است که چنین مشاهده‌ای نتواند برای استنباط دربارهٔ θ مفید واقع شود و بنابراین حذف آن از فضای نمونه‌ای نبایستی در استنباط ما اثری بگذارد. برای فضای نمونه‌ای جدید، $\mathcal{X}_1 = \{1, 2\}$، تابع احتمال جدید روی این فضا معلوم نیست. چنانچه تقلیل خطی تابع احتمال قبلی روی این فضای جدید را به‌کار بریم، مدل آماری زیر را خواهیم داشت:

X	۱	۲	
$P_\theta(x/\mathcal{X}_1)$	$\frac{1-\theta}{2}$	$\frac{1+\theta}{2}$	$0 < \theta < 1$

توجه کنید، θ هر چه باشد، $P_\theta(\mathcal{X}_1) = \frac{1}{2}$. این خاصیت عدم وابستگی احتمال زیر مجموعه $\mathcal{X}_1$ (که فضای نمونه‌ای جدید است) به θ، ناشی از عدم وابستگی احتمال $x = 3$ به θ است. می‌توان این شرط اخیر را حذف کرد و مجموعهٔ A را چنان برگزید که برای آن احتمال $P_\theta(A)$ معلوم باشد و سپس آن را به عنوان شرط برگزید و آنگاه فضای نمونه‌ای جدید را ساخت. این تعمیم ساده را با مثال زیر توضیح می‌دهیم.

4) noninformative 5) Jeffrens

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

مثال ۷. X دارای مدل آماری زیر است:

X	۱	۲	۳	۴
$P_1(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
$P_2(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$

توجه کنید در این حالت هیچیک از نقاط فضای نمونه‌ای دارای احتمال معلومی نیستند امّا احتمال مجموعه $\mathcal{X}_1 = \{1, 2\}$ معلوم و برابر با $\frac{3}{4}$ است. اگر استدلال قبلی را بپذیریم، مدل‌های جدید عبارت‌اند از:

X	۱	۲
$P_1(x/\mathcal{X})$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
$P_2(x/\mathcal{X})$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

مدل الف

X	۳	۴
$P_1(x/\mathcal{X}_1^c)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$P_2(x/\mathcal{X}_1^c)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

مدل ب

اگر مشاهده‌ای به دست آید یا متعلق به $\mathcal{X}_1$ است یا به $\mathcal{X}_1^c$، به توصیه فیشر برای استنباط باید از مدل کوچکتری که مشاهده به آن تعلق دارد، استفاده کرد. در این جا فضای نمونهٔ اصلی یعنی $\{1, 2, 3, 4\}$ را می‌توان به کمک متغیر نشانگر $I = \begin{cases} 1 & x \in \mathcal{X}_1 \\ 0 & x \notin \mathcal{X}_1 \end{cases}$ به صورت زیر نشان داد:

$$\{(1, 1), (2, 1), (3, 0), (4, 0)\}$$

که البته تجزیه زیر را داریم:

$$P_\theta(x) = \begin{cases} P_\theta(x/\mathcal{X}_1)P(\mathcal{X}_1) & x \in \mathcal{X}_1 \\ P_\theta(x/\mathcal{X}_1^c)P(\mathcal{X}_1^c) & x \in \mathcal{X}_1^c \end{cases}$$

که بنابه اصل درستنمایی، تحلیل بر اساس مدل شرطی، مشابه تحلیل بر اساس مدل غیرشرطی است. توجه می‌کنیم که فضای نمونهٔ اصلی و مدل آماری متناظر با آن را می‌توان مدلی در مرحله‌ای در نظر گرفت که در مرحلهٔ اول با احتمال معلوم $\frac{1}{4}$ فضای نمونه‌ای $\mathcal{X}_1$ و با احتمال $\frac{3}{4}$ فضای نمونه‌ای $\mathcal{X}_1^c$ برگزیده می‌شود و سپس درون فضای نمونه‌ای برگزیده شده، استنباط دربارهٔ θ به انجام می‌رسد (اصل شرطی کردن). اگر اصل شرطی کردن را بپذیریم، استنباط بهتر بر اساس یکی از مدلهای الف یا ب صورت می‌گیرد:

این حالت، مشابه وضعی است که در شروع ساختن فضای نمونه‌ای با آن مواجهیم ومی‌توان برای انتخاب فضای «نمونه مناسب‌تر» از آن بهره جست. آیا در ثبت حالات ممکن، آن حالاتی را نیز که ثبت آنها تأثیری در تغییر تعداد موارد ندارد، ثبت کرده‌ایم؟ مثال «معروف» بار هندوانه را در نظر بگیرید.

مثال ۸. کامیونی از دشت عبّاس N هندوانه بار زده است. در مقصد می‌خواهیم دربارهٔ M، تعداد هندوانه‌های محبوبی موجود در این کامیون، استنباط کنیم و مثلاً برآورد، برآورد فاصله‌ای یا آزمون فرضی دربارهٔ M انجام دهیم. نمونه‌ای به حجم n بدون جایگذاری برمی‌گزینیم. فضای نمونه‌ای فضای توزیع فوق هندسی رایج است.

امّا امکان داشت این کامیون به مقصد نرسد. این اطلاع خود مشاهده‌ای از یک تابع نشانگر دو حالتی است که چنانچه آن را ثبت کنیم فضای نمونه‌ای $X_1 \times \{0, 1\}$ خواهد بود. اگر تعداد هندوانه‌های محبوبی موجود در کامیون تحت تأثیر سقوط، عدم سقوط کامیون به درّه نباشد، ذهن می‌پذیرد که به شرط رسیدن کامیون به مقصد در مدل فوق هندسی حاصل به استنباط بپردازیم و از فضای نمونه‌ای تقلیل یافته استفاده کنیم.

توجه کنید تقلیل فضای نمونه در گرو معلوم بودن احتمال پیشامد شرط بود. امّا این‌که برای تقلیل بایستی همواره چنین باشد نتیجه‌ای است که ناشی از تعجیل در اختتام بحث است: در واقع اگر احتمال پیشامد شرط تابعی از θ باشد ولی کلیهٔ احتمالهای شرطی حالات مختلف را به یک نسبت ثابت تغییر دهد، در این صورت نیز می‌توان به تقلیل فضای نمونه‌ای پرداخت.

مثال زیر علاوه بر آن‌که حالت اخیر را به نمایش می‌گذارد. مشکل بودن تحلیل یک مسألهٔ آماری را نیز نمایش می‌دهد. دانستن این نکته که استنباط آماری از عهده کامپیوتر و نرم‌افزارهای مشابه خارج است عین اعتلای تحلیل‌های رایج و انگشت نمای امروزی است!

مثال ۹. آزمایش بسیار ساده زیر را در نظر بگیرید:

x	۱	۲	۳	۴	۵	۶
θ_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
θ_2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{9}$	0	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
θ_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{12}$

توجه کنید در مثالهای واقعی، مدلها بسیار پیچیده‌تر از این‌ها هستند و البته کلیه مسائلی که تاکنون مطرح کردیم، با ابعاد بسیار غامض‌تری در آنها رخ می‌نمایند.

مجموعه‌های اطمینان زیرمجموعه‌هایی از فضای پارامترند که به توسط مشاهده انتخاب می‌شوند. مدل فوق را می‌توانیم مدلی برای آزمایش ریختن تاس شش وجهی (حداکثر) در نظر بگیریم. چنانچه پس از ریختن تاس خال یک را ببینیم، مجموعه اطمینان حاصل با ضریب اطمینان $\frac{1}{6}$ مجموعهٔ $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ است. واضح است این ضریب اطمینان ناشی از ضعف روش نیمن ـ پیرسن است.

می‌دانیم عدد یک، عددی فرد است در نتیجه شاید مدل شرطی $\{P_\theta(x), \theta \in \Theta\}$ برای ساختن مجموعه اطمینان مناسب‌تر باشد. در این حالت ضریب اطمینان مجموعهٔ مذکور حداقل $\frac{1}{3}$ خواهد بود که با ضریب اطمینان شهودی و دقیقاً برابر یک برای همین مجموعه تفاوت بسیار دارد.

در حالت فوق $A = \{1\}$ مجموعه‌ای کمکی است، ولی مجموعهٔ شرط $C = \{1, 3, 5\}$ مجموعه‌ای است که احتمال مشاهدات ممکن را در کلیه مدلهای احتمال آزمایشی همواره افزایش داده است و ضریب اطمینان $\frac{1}{6}$ را به ترتیب به $\frac{1}{3}$ (برای $\theta = \theta_1$) و $\frac{1}{2}$ (برای $\theta = \theta_2, \theta_3$) تغییر داده است.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

عدم استفاده از فرد بودن یک عدد به نظر معقول نمی‌آید و در نتیجه گزارش ضریب اطمینان $\frac{۱}{۲}$ موجه نیست.

مجموعه‌هایی چون C را زیرمجموعهٔ مربوط[۶] و در این حالت مربوط مثبت، می‌خوانند. البته در این مثال مجموعه مربوط هم نمی‌تواند به کمک استنباط بیاید زیرا مشاهده، مشاهده‌ای نیست که شامل اطلاعی دربارهٔ جامعه باشد!

یک را فراموش کرده، مشاهدهٔ دیگری می‌گیریم، این بار ۲ به‌دست می‌آید. برای ضریب اطمینان $\frac{۱}{۲}$، مجموعهٔ اطمینان برابر $\{\theta_۱,\theta_۳\}$ است. مشکل بی‌اعتباری بدیهی ضریب اطمینان را نداریم. امّا آیا واقعاً ضریب اطمینان $\frac{۱}{۲}$ را باید گزارش کرد یا با توجه به اینکه می‌دانیم ۲ عددی زوج است، مدل شرطی عبارت است از $\theta = \theta_۱,\theta_۲,\theta_۳$، $P_\theta\{x = ۳/\text{زوج}\} = \frac{۱}{۴}$، که در مقایسهٔ با ضرب اطمینان $\frac{۱}{۲}$ قبلی، ضریب اطمینان مقبول‌تری است. نکتهٔ مهمی که قصد داریم، بر آن تکیه کنیم، این است که مجموعهٔ شرطی $C = \{۲,۴,۶\}$ دارای احتمال معلومی نیست و در نتیجه مجموعهٔ کمکی نیست، امّا بدون آن‌که θ معلوم باشد. ضریب اطمینان دیگری برای θ به‌دست می‌دهد. طبق اصل درستنمایی و همچنین اصل شرطی کردن، استنباط بر اساس مدل $P_\theta(x/C)$ توصیه شده است. در حالت حاضر احتمال C معلوم نیست ولی اختیار کردن آن به عنوان شرط، موجب بهره‌برداری از فضای نمونه‌ای کوچکتری می‌شود که می‌دانیم مشاهدهٔ ما به آن تعلق دارد و عدم استفاده از این اطلاع در صورت‌بندی آماری مسأله نباید مبنای مستحکمی داشته باشد.

مسألهٔ ساختن مجموعهٔ اطمینان به پایان نرسیده است، دیدیم:

$$P_\theta(\{x : x \neq ۱\}) = \frac{۵}{۶} \qquad \text{هر چه } \theta \text{ باشد،}$$

لذا $\{x : x \neq ۱\}$ مجموعه‌ای کمکی است و بنا به توصیه فوق‌الذکر، فضای نمونه‌ای مربوط‌تری است. مدل آماری جدید با این فضا عبارت است :

	۲	۳	۴	۵	۶
$\theta_۱$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$
$\theta_۲$	$\frac{۴}{۱۵}$	۰	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۶}{۱۵}$
$\theta_۳$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۲}{۱۰}$	$\frac{۳}{۱۰}$	۰	$\frac{۱}{۱۰}$

که می‌بینیم مجموعهٔ اطمینان $\{\theta_۱,\theta_۲\}$ متناظر با مشاهده ۲ این بار دارای ضریب اطمینان $\frac{۱}{۵}$ است!

به کار گرفتن اطلاع زوج بودن ۲، فضای نمونه‌ای این مدل را هم تغییر می‌دهد و مدل زیر را به دست می‌دهد:

	۲	۴	۶
$\theta_۱$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$
$\theta_۲$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۱}{۲}$
$\theta_۳$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۶}$

چه اتفاق ناگواری! مشاهده ما، یعنی $X = ۲$ در این مدل برای استنباط مفید نیست!

چنانچه ۴ را مشاهده کرده بودیم، فضای نمونه‌ای فوق را باز هم می‌توانستیم تقلیل دهیم، زیرا مجموعه $\{۴,۶\}$ کمکی است و تحلیل را می‌توان براساس این فضای نمونه‌ای صورت‌بندی کرد:

	۴	۶
$\theta_۱$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$
$\theta_۲$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$
$\theta_۳$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۱}{۴}$

که می‌توان مجموعه اطمینان و ضریب آن را به سادگی محاسبه کرد.

با مشاهده‌ای «عینی» و بر اساس مدل‌ها و اصول معروف آماری، فضاهای نمونه‌ای «مناسب» ضریب اطمینان مشخصی حاصل نکرده‌اند. کاملاً واضح است ملاکی که مناسب‌ترین فضای نمونه‌ای را تعیین کند برای ادامه کار ضروری است. ملاکی که از آن بی‌خبرم.

آنچه در این مثال پیش آمده است، مختص به مثال حاضر نیست. در معروف‌ترین مدل‌های آماری، مثلاً در مدل نرمال نیز این وضعیت رخ می‌دهد. به عبارت روشن‌تر، این فاصله‌های اطمینان رایج با ضریب اطمینان $۱ - \alpha$، چندان قابل اطمینان نیستند. در محاسبهٔ واریانس برآوردها و ریسکهای مختلف عین همین معضلات رخ می‌نماید که خوانندهٔ علاقه‌مند باید به مقاله‌ها و آثار متعدد در این حیطه مراجعه کند.

کوچک کردن فضای نمونه چه اثری در استنباط دارد؟

کوچک کردن فضای نمونه، کاهش حالات ممکن الوقوع پیشامد تصادفی است. چنانچه آن‌را ذاتی پدیده تصادفی بدانیم سوال فوق پاسخ واضحی دارد. امّا همواره در تعریف احتمال نوعی مفهوم شناخت‌شناسی مستتر است چنانچه جهل دربارهٔ حالات ممکن کاهش یابد، آنگاه کوچک کردن فضای نمونه‌ای و مطالعهٔ اثر آن روی پدیده تصادفی پرسشی است که پاسخ می‌خواهد.

گیرید مدل $\mathcal{E} = \{\mathcal{X},\Theta,\mathcal{P}\}$ را برگزیده‌ایم و آگاهی می‌یابیم که $\mathcal{X}$ نادرست است و زیرمجموعهٔ آن $\mathcal{X}_۱$، حالات ممکن را در بردارند. دو حالت می‌تواند برای ما رخ داد چنانچه از پیش دربارهٔ $\mathcal{X}$ مشکوک بوده‌ایم، این نکته را در مدل $\mathcal{E}$ رعایت کرده‌ایم و در $\mathcal{P}$ تعدادی توزیع احتمال موجود است که روی $\mathcal{X}_۱^c$ احتمال صفر را قرار داده‌اند. حال که شک ما برطرف شده است و مجموعهٔ حالات ممکن را $\mathcal{X}_۱$ می‌دانیم $\mathcal{E}$ به زیر مدل $\mathcal{E}_۱ = (\mathcal{X},\Theta_۱,\mathcal{P}_۱)$ تقلیل می‌یابد که در آن $\mathcal{P}_۱ \subset \mathcal{P}$ و $\Theta_۱ \subset \Theta$.

حالت دوم این است که شک دربارهٔ $\mathcal{X}$ در هنگام ساختن $\mathcal{E}$ ملحوظ نشده است و پس از ساختن $\mathcal{E}$ یقین حاصل شده است که فضای حالات ممکن $\mathcal{X}_۱$ است. در چنین حالتی مسأله دشوار می‌شود. یا باید مدل $\mathcal{E}$ را کناری گذارد و مدل جدیدی با توجه به اطلاعات موجود دربارهٔ صفت و

6) relevant

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

جامعهٔ مورد مطالعه ساخت یا آنکه مدل قبلی را به مدل جدیدی روی این فضای کوچکتر تحویل کرد. چگونگی تحویل توابع احتمال موجود روی $\mathcal{X}$ به احتمالهای جدید روی $\mathcal{X}_1$ خود مسأله ساده‌ای نیست ولی راه ـ کار معمول ساختن مدلهای شرطی و به‌کاربردن توابع احتمال $P_\theta(x/\mathcal{X}_1)$ است. این مدل شرطی می‌تواند بسیار بیشتر از مدل اولیه عضو داشته باشد یا در تناظر یک به یک با مدل اولیه باشد یا آنکه تعداد اعضای آن کمتر از مدل اصلی باشد.

مثال ۱۰. گیرید X دارای توزیع معلومی با چگالی $f(x)$ روی اعداد حقیقی مثبت است. فضای نمونه‌ای R و توزیع احتمال معلوم است پس فقط یک عضو دارد. متوجه می‌شویم که صفت مورد مطالعه X، دارای کران بالا است و در نتیجه به یقین مقادیر بزرگتر از کران مزبور قابل حصول نیستند. فراوانی‌های این مقادیر صفرند. اگر این کران مقدار معلوم B باشد، در مدل جدید فقط یک عضو

$$h(x) = f(x|X \le B) = \frac{f(x)}{\int_0^B f(x)dx} \qquad 0 < x \le B$$

وجود دارد. امّا اگر این کران بالا مقدار مجهول θ باشد، آنگاه مدل

$$\mathcal{P} = \{h_\theta(x)\ 0 < x \le \theta,\ 0 < \theta\}$$

مدل جدید که تعداد اعضای آن خیلی بیشتر از مدل نیز شرطی است. توجه کنید که در این مدل فضای نمونه‌ای واحدی برای کلیه اعضای خانوادهٔ موجود نیست بخشی از عدم اطلاع ما دربارهٔ جامعه به دلیل عدم شناخت، فضای نمونه‌ای است. مدل اخیر موسوم به خانواده مقادیر فرین است. در این خانواده اگر θ معلوم باشد مدلی به‌دست می‌آید که دارای یک عضو است.

به حالت نخست برگردیم که در آن $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$ به $\Theta_1 \subset \Theta$ منجر می‌شود در این حالت، اگر $q(\theta, \delta)$ کمیتی باشد که بهینگی قاعده استنباطی δ را اندازه‌گیری می‌کند، نامساوی (یاتساوی) $q(\theta, \delta) \le q(\theta, \delta')$، به ازای هر عضو Θ، مسلماً به ازای هر عضو Θ_1 نیز صادق است، با این تفاوت که تعداد δ' هایی که بر δ ارجحیت دارند، وقتی خود را به مجموعهٔ Θ_1 محدود کنیم، بیش از حالتی است که با فضای پارامتر Θ، در جستجوی قاعده‌ای «بهتر» هستیم. مثالهای زیر این نکته ساده را روشن‌تر می‌سازد:

مثال ۱۱. گیرید بهینگی δ را با نااریبی آن برای برآورد $\gamma(\theta)$ اندازه‌گیری می‌کنیم:

$$E_\theta(\delta(X) - \gamma(\theta)) = 0, \theta \in \Theta \ \text{برای هر}$$

واضح است هر برآورد کننده‌ای که در آزمایش $\mathcal{E}$ نااریب است در آزمایش $\mathcal{E}_1$ نیز نااریب است امّا ممکن است برآوردکننده‌های وجود داشته باشند که در $\mathcal{E}_1$ برای $\gamma(\theta)$ نااریب‌اند امّا در $\mathcal{E}$ برای $\gamma(\theta)$ نااریب نیستند. در نتیجه اگر برآوردکننده‌های نااریب را بر حسب واریانس آنها مرتب کنیم در مدل $\mathcal{E}_1$ برآوردکننده نااریبی با حداقل واریانس، واریانسی بیش از واریانس برآورد نااریب با حداقل واریانس در مسأله $\mathcal{E}$ ندارد.

مثال ۱۲. کلاس کامل (کامل کمینه) قواعد تصمیم در مسأله $\mathcal{E}$ زیرمجموعه‌ای از کلاس کامل قواعد تصمیم مسأله $\mathcal{E}_1$ است.

در حالتی که تقلیل فضای نمونه‌ای الزاماً به کاهش تعداد اعضاهای خانواده منجر نمی‌گردد چنانچه به استفاده از مدل شرطی تقلیل نیابد، بحث مقایسه بین مدلها یا آزمایشها مطرح می‌شود. اگر مدل به مدل شرطی تحویل گردد و $\mathcal{X}_1$ مجموعه‌ای باشد که در مدل $\mathcal{E}_1$ دارای احتمال معلومی است، موضوعی است که در قبلاً دربارهٔ آن مختصری بحث شد. برای مطالعه اثر آماره‌های کمکی در مسأله تصمیم‌گیری به مرجع [۱] مراجعه کنید. امّا چنانچه احتمال $\mathcal{X}_1$ تابعی از θ باشد بحثی است که در اینجا به آن اشاره می‌کنیم.

فرض کنید $\mathcal{X}_1 \subset \mathcal{X}$ فضای نمونهٔ جدیدی است که به ازای عضو θ از $\mathcal{E}$ دارای احتمال $P_\theta(\mathcal{X}_1)$ است و از آنجا $P_\theta(x/\mathcal{X}_1) = \frac{P_\theta(x)}{P_\theta(\mathcal{X}_1)}$ است. واضح است که اگر هر قاعده‌ای که در $\mathcal{E}$ وجود دارد را روی $\mathcal{X}_1$ محدود کنیم قاعده‌ای در مدل جدید به دست می‌آید و متناظر با هر قاعدهٔ مدل جدید، حداقل یک قاعده در مدل $\mathcal{E}$ وجود دارد که روی $\mathcal{X}_1$ با آن مساوی است.

اگر برای δیی دلخواه در آزمایش $\mathcal{E}$، قاعدهٔ δ^* را که عبارت است از

$$\delta^*(x) = \begin{cases} \delta(x) & x \in \mathcal{X}_1 \\ 0 & x \in \mathcal{X}_1^c \end{cases}$$

تعریف کنیم آنگاه به شرط آنکه $P_\theta(\mathcal{X}_1) > 0$ برای کلیه θها باشد، قابلیت قبول δ^* در آزمایشهای شرطی کوچک، قابلیت قبول δ در $\mathcal{E}$ را تضمین می‌کند.

بسیاری از ملاکهای بهینگی دیگر را که براساس عدم تساوی دیسک‌ها بیان می‌شوند می‌توان با گزاره‌هایی مشابه به حالتی که فضای نمونه تقلیل یافته است، توسعه داد.

چند پرسش عامی که در این مقاله مطرح کردیم، پاسخهای مشخصی دریافت نکرده‌اند. در واقع هر کدام در یک صورت‌بندی مشخص بررسی تفضیلی معینی را طلب می‌کنند. غرض اصلی، معرفی ساختار عام مشکلاتی است که در نحوهٔ حل رایج مسائل استنباطی موجودند. در فهرست مراجع، چند منبع فارسی موجود فارسی و لاتین آمده است. آشنایی با این مشکلات شاید به درک عمیقتر مباحث آماری کمک کند.

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]

مراجع

[۱] آقابیگ، داوود. مجموعه‌های مربوط در نظریهٔ تصمیم، رساله کارشناسی‌ارشد، گروه آمار، دانشگاه شهید بهشتی ۱۳۷۱.

[۲] جزایی، مجید. مقایسه آزمایشها و ملاکهای اطلاع، رساله کارشناسی‌ارشد، گروه آمار دانشگاه شهید بهشتی ۱۳۷۱.

[۳] راد، محسن، آماره‌های کمکی، رساله کارشناسی‌ارشد، گروه آمار دانشگاه شهید بهشتی ۱۳۶۸.

[۴] هاجز و لهمن، مفاهیم پایه‌ای احتمال و آمار، مترجم سیامک نوربلوچی، انتشارات آوای نور، تهران ۱۳۷۲.

[5] Ghosh, J. K., *Statistical Information and Likelihood.* A Collection of Critical Essays by Dr. D. Basu, Springer- Verlag, N. Y., 1988.

[6] Buehler, R. J. "*Some Validity Criteria for Statistical Inferences*". Ann. Math. Statist. **30**, 845-863, 1959.

[7] Hajek, J. "*On Basic Concepts of Statistics*"In Proc of Fifth Berkeley Symp. Math. Statist. and Probab., Univ. of Calif Press, Berkeley.

باز هم دربارهٔ رکوردها

دو مسأله و یک شگفتانه

فرض کنید که $X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع (iid) با توزیع $F(x)$ باشند به طوری که F پیوسته است.

مسألهٔ ۱. فرض کنید که $A_k = \{X_k > \sup_{j<k} X_j\}$ عبارت از این پیشامد باشد که رکوردی در زمان k رخ می‌دهد. گرچه وقوع رکوردی در زمان k موجب می‌شود که وقوع رکوردی در زمان $k+1$ کمتر محتمل به نظر رسد، امّا A_kها مستقل‌اند.

مسألهٔ ۲. فرض کنید که

Y_i = تعداد اندیسهای j باشد به طوری که $j \le i$ و $X_j > X_i$

ثابت کنید که Y_iها متغیرهای تصادفی مستقل‌اند با

$$P(Y_i = j) = \frac{1}{i} \quad , \quad 0 \le j < i - 1$$

و حالا یک

شگفتانه. فرض کنید که $X_0, X_1, X_2, \ldots$ متغیرهای تصادفی مستقل و همتوزیع باشند (لزومی ندارد که توزیع مشترک آنها پیوسته باشد) و فرض کنید که مقادیر $X_0, X_1, X_2, \ldots$ پیشنهادهایی باشند که برای خرید اتومبیلی که می‌خواهید بفروشید، دریافت می‌کنید. فرض کنید که

$$N = \inf\{n : X_n > X_0\}$$

بنابه تقارن مشاهده می‌شود که $P(N > n) \ge \frac{1}{n}$. بنابراین متوسط (امید ریاضی) زمانی که باید منتظر بمانید تا پیشنهادی بهتر به شما ارائه شود، ∞ است!

ا. آ

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-23]