ماتریسها و احتمالهای شرطی و کاربردهایی از آن

علی مشکانی*

۱ مقدمه

در این یادداشت پس از تعریف ماتریس تصادفی و ویژگیهای آن نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روابطی را که شامل احتمالهای شرطی‌اند به کمک این نوع ماتریسها به اختصار نشان داد. سپس کاربردهایی از آن را بیان می‌کنیم.

ماتریس

$$\mathbf{P} = [p_{ij}], \qquad i, j = ۱, ۲, \ldots \tag{۱}$$

را ماتریس تصادفی می‌نامیم اگر دارای دو ویژگی بنیادی زیر باشد:

۱) درایه‌های آن نامنفی باشند، یعنی به ازای هر i و j، $p_{ij} \geq ۰$،

۲) مجموع درایه‌های هر سطر برابر ۱ باشد، یعنی برای هر i، $\sum_j p_{ij} = ۱$.

ویژگی (۲) را با در نظر گرفتن بردار $C = [۱, \ldots]^t$ می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{P}C = C \tag{۲}$$

که نشان می‌دهد ۱، یک مقدار ویژه $\mathbf{P}$ و C یک بردار ویژه از راست متناظر با این مقدار است. از این دو خاصیت نتیجه می‌شود که

۳) حاصلضرب دو ماتریس تصادفی یک ماتریس تصادفی است.

در واقع اگر A و B دو ماتریس تصادفی باشند و AB حاصلضرب آنها برابر D فرض شود، داریم:

$$BC = C$$

طرفین تساوی را از سمت چپ در A ضرب می‌کنیم، حاصل می‌شود

$$A(BC) = AC$$

یا

$$(AB)C = AC = C$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$DC = C$$

پس D در (۲) صدق می‌کند و (۱) نیز آشکارا برقرار است. به ویژه اینکه هر توانی از $\mathbf{P}$ نیز یک ماتریس تصادفی است.

دو متغیر تصادفی گسسته X و Y را که به ترتیب دارای مقادیر ممکن $(a_۱, a_۲, \ldots)$ و $(b_۱, b_۲, \ldots)$ اند در نظر گرفته ماتریس تصادفی $\mathbf{P}$، با فرض $P(Y = b_j) > ۰$ و بردارهای سطری A و B را تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P(X = a_۱ | Y = b_۱) & P(X = a_۲ | Y = b_۱) & \cdots \\ P(X = a_۱ | Y = b_۲ & P(X = a_۲ | Y = b_۲) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

همچنین قرار می‌دهیم:

$$B = [P(Y = b_۱), P(Y = b_۲), \ldots],$$
$$A = [P(X = a_۱), P(X = a_۲), \ldots]$$

قضیه زیرا را داریم:

*) دکتر علی مشکانی، گروه آمار دانشگاه فردوسی مشهد

قضیه. تابع احتمال متغیر تصادفی X از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$A = B\mathbf{P} \qquad (3)$$

برهان. به ازای هر i داریم:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P[Y = b_j]P[X = a_i|Y = b_j] = P(X = a_i)$$

رابطه (۳) را می‌توان به بیش از دو متغیر تصادفی تعمیم داد. سه متغیر تصادفی X و Y و Z را در نظر می‌گیریم و علاوه بر بردارهای A و B و ماتریس P بردار $C = [P(z = c_1), P(z = c_2), \ldots]$ و ماتریس

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} P(Y = b_1|Z = c_1) & P(Y = b_2|Z = c_1) & \ldots \\ P(Y = b_1|Z = c_2) & P(Y = b_2|Z = c_2) & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

را تعریف می‌کنیم، قضیه زیر را داریم:

قضیه ۲. توزیع احتمال متغیر تصادفی X از رابطه زیر به دست می‌آید.

$$A = C\mathbf{QP} \qquad (4)$$

برهان. بنابر (۳)، $B = CQ$، با به‌کار بستن مجدد همین تساوی داریم، $A = B\mathbf{P}$ و از آنجا $A = C\mathbf{QP}$ و شرکت‌پذیری از همگرایی کلیه مجموعها و نامنفی بودن درایه‌های ماتریسها در این محاسبات نتیجه می‌شود.

روابط (۳) و (۴) را می‌توان به سادگی به تعداد دلخواهی از متغیرهای تصادفی تعمیم داد که برای توضیح آن به ذکر یک مثال می‌پردازیم.

مثال ۱. کیسه‌ای شامل دو گلوله سفید و یک گلوله سیاه است. گلوله‌ای به تصادف بیرون آورده و آن را همراه با گلوله‌ای همرنگ خودش به کیسه برگردانده این فرایند را تکرار می‌کنیم. فرض کنید X_n تعداد گلوله‌های سفید در کیسه بعد از استخراج nام باشد ($n = 1, 2, \ldots$)، به سادگی می‌توان روابط زیر را تحقیق کرد:

$$\Pi_1 = [P(X_1 = 2), P(X_1 = 3)] = [\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}]$$

$$\Pi_2 = [P(X_2 = 2), P(X_2 = 3), P(X_2 = 4)]$$
$$= \Pi_1 \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \end{bmatrix} = [\tfrac{2}{12}, \tfrac{4}{12}, \tfrac{6}{12}]$$

$$\Pi_3 = [P(X_3 = 2), P(X_3 = 3), P(X_3 = 4), P(X_3 = 5)]$$
$$= \Pi_2 \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} \end{bmatrix} = [\tfrac{6}{60}, \tfrac{12}{60}, \tfrac{18}{60}, \tfrac{24}{60}].$$

مثال ۲. گلوله‌هایی را متوالیاً بین چهارخانه توزیع می‌کنیم. فرض کنید X برابر تعداد خانه‌های خالی بعد از توزیع n گلوله باشد. تابع توزیع احتمال X_n را به ازای nهای مختلف پیدا کنید. به‌سادگی می‌توان روابط احتمال شرطی بین X_n و X_{n-1} را تعیین کرد. ماتریسی را که درایه (i,j)ام آن برابر $P[X_n = j|X_{n-1} = i]$ است، $(i, j = 0, 1, 2, 3)$، در نظر می‌گیریم، این ماتریس برابر است با

$$\mathbf{P} = [p_{ij}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{4} & \frac{2}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$$

برای $n = 2$ داریم:

$$[P(X_2 = 0), P(X_2 = 1), P(X_2 = 2), P(X_2 = 3)]$$
$$= [0, 0, 0, 1]\mathbf{P}$$

و به طور کلی

$$[P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)]$$
$$= [0, 0, 0, 1]\mathbf{P}^{n-1}$$

بعضی مقادیر محاسبه شده تابع احتمال X_n در جدول زیر درج شده است.

$P(X_n = i)$	۱	۲	۳	۴	۵
$P(X_n = 0)$	۰	۰	۰	$\frac{6}{64}$	$\frac{60}{256}$
$P(X_n = 1)$	۰	۰	$\frac{6}{16}$	$\frac{36}{64}$	$\frac{150}{256}$
$P(X_n = 2)$	۰	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{16}$	$\frac{21}{64}$	$\frac{45}{256}$
$P(X_n = 3)$	۱	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{256}$

۲ کاربرد

در یک زنجیر مارکف ناهمگن ماتریس احتمال تغییر وضعیت n قدمی را با

$$\mathbf{P}_n = [p_{ij}(n)]$$

نشان می‌دهیم که در آن $p_{ij}(n) = P[Y_{n+1} = j|Y_n = i]$. همچنین بردار سطری

$$\Pi_n = [P(Y_n = i_1),\ P(Y_n = i_2), \ldots] \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

را تعریف می‌کنیم. بنا به قضایای فوق داریم:

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n \mathbf{P}_n \qquad (5)$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$\Pi_1 = \Pi_0\mathbf{P}_0, \Pi_2 = \Pi_0\mathbf{P}_0\mathbf{P}_1, \ldots, \Pi_{n+1} = \Pi_0\mathbf{P}_0 \ldots \mathbf{P}_n \qquad (6)$$

مثالهای ۱ و ۲ با این حالت مطابقت می‌کنند یعنی ناهمگن زمانی‌اند. اگر زنجیر مارکف همگن باشد، ماتریس احتمال تغییر وضعیت را با $\mathbf{P}$ نشان می‌دهیم و در این صورت رابطه (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\Pi_n = \Pi.\mathbf{P}^n, \qquad n = ۱, ۲, \ldots \qquad (۷)$$

مراجع

[۱] نظریه مقدماتی احتمال و فرایندهای تصادفی ـ ترجمهٔ ابوالقاسم میامئی، محمدقاسم وحیدی اصل از انتشارات دانشگاهی، تهران، ۱۳۶۳.

[2] j. Higgins, "*Concepts in Probability and Stochastic Modeling,*" Duxbury Press (1995).

[3] P. Gordon, "*Theorie des Chaines de Markov finies*" Duno, Paris (1965).

آمار و سازمانهای آماری

فرهنگهای فارسی در معنای ریشه‌ای اصطلاح «آمار» متفق القول‌اند و عموماً آن را از ریشهٔ پهلوی و به معنای «محاسبه» و «شماره» ضبط کرده‌اند. به عنوان مثال [فرهنگ رشیدی] متعلق به ۱۰۶۴ می‌نویسد: آمار، یعنی «حساب، و آمارگیر یعنی محاسب، و آماره نیز آمده» ، و از لبیبی، شاعر اواخر قرن چهارم و اوایل قرن پنجم بیتی را نقل می‌کند که گفته:

اگر خواهی سپاهش را شماره   برون باید شد از حد اماره

دهخدا در [لغت‌نامه] آمار را به معنای شمار می‌داند و می‌نویسد که «آماره‌گیر» یعنی «نویسنده، محاسب، مستوفی». محمدمعین [برهان قاطع]، مصدر اوستائی و صورت پهلوی آن را به دست داده است.

اطلاعات تاریخی موجود نشان می‌دهد که این حسابگریها و شمارشها بیشتر در امور لشکری و کشوری بوده و دامنهٔ آنها به تدریج چنان وسعتی یافته که مشتقات دیگری از ریشهٔ «آمار» در زبان فارسی پدید آمده است. مثلاً کلمهٔ «شاهامار»، به معنی سرشماری سلطنتی، در نوشته‌های رسمی عهد هخامنشی و اشکانی دیده شده ([اسامی دهات کشور])، از اطلاعاتی که گزنفون و هرودت دربارهٔ عدد سپاهان هخامنشی، شیوهٔ سرشماری آنها، تعداد ولایات و ترتیب تنظیم مالیاتهای آنها می‌دهند [تاریخ ایران باستان] پیداست که کاربرد اداری و نظامی آمار برای به دست آوردن احصائیهٔ نفوس و منابع مالیات بندی و تنظیم دخل مملکت [دایرةالمعارف فارسی] در ایران و خارج از ایران سابقهٔ طولانی داشته است. از مصریهای قدیم (حدود ۳۰۵۰ ق‌م) و بابلیها و رومیها مدارکی مشتمل بر اطلاعات تفصیلی در باب سکنهٔ کشورهای تحت فرمان آنها در دست است. (همان کتاب).

پس احصائیهٔ نفوس یا شمارش منابع مالیات‌بندی اصولاً توسط دستگاههای حکومتی و به منظور کسب اطلاعات لازم برای ادارهٔ امور جاری کشور بوده و بیشتر جنبهٔ توصیفی و عملی داشته است. این کار معمولاً در چهارچوب دستگاههای دیوانی، مانند دستگاههای جنگی و دیوانهای مالیات یا دیگر امور کشوری، برای تنظیم و ترتیب دفاتر محاسباتی خود آنها انجام می‌گرفته است.

اما پیدایش علم آمار و ایجاد سازمانهای آمارگیری منظم را باید پدیده‌ای دانست که همراه با رشد تدریجی علوم و فنون جدید و تشکیل دولتهای نوین در کشورهای اروپائی شکل گرفته است، زیرا نخستین بار در کشورهای اروپائی بود که ثبت وقایع اجتماعی، علی‌الخصوص وقایع مربوط به جمعیت و اقتصاد، صورت منظم پیدا کرد. مثلاً ثبت وقایع مربوط به تولد و ازدواج و مرگ نخستین بار در برخی از مناطق اروپا مانند اوکسبورگ (۱۵۱۰) و لندن (۱۰۱۷) شروع شد. سپس این کار در غالب کشورهای پیشرفتهٔ اروپا مانند فرانسه (۱۵۷۹-۱۵۳۹) و انگلیس (قبل از ۱۵۴۷) و هلند (۱۵۹۰) عمومیت یافت و از آنجا به آمریکای شمالی (۱۶۳۸) کشیده شد (دایرةالمعارف علوم اجتماعی). در اواسط قرن هفدهم سرشماری ادواری شبیه به آنچه امروز معمول است آغاز شد و در قرن نوزدهم میلادی توجهی خاص به این امر مبذول گردید [دایرةالمعارف فارسی].

به نقل از دانشنامهٔ ایران و اسلام، ۱، بنگاه ترجمه و نشر کتاب، تهران، ۱۳۵۶.