

## برآورد تعداد تانکهای دشمن

غلامحسین شاهکار\*

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^N (1+x)^k &= (1+x)^n \sum_{k=0}^{N-n} (1+x)^k \\ &= (1+x)^n \frac{(1+x)^{N-n+1} - 1}{(1+x) - 1} \\ &= \frac{1}{x} [(1+x)^{N+1} - (1+x)^n] \end{aligned}$$

و ضریب  $x^n$  در بسط چندجمله‌ای بالا  $\binom{N+1}{n+1}$  است لذا داریم:

$$\sum_{k=n}^N \binom{k}{n} = \binom{N+1}{n+1}$$

با قرار دادن این عبارت در (۱) به دست می‌آوریم:

$$E(Y) = \frac{n \binom{N+1}{n+1}}{\binom{N}{n}} = \frac{n \frac{(N+1)!}{(n+1)!(N-n)!}}{\frac{N!}{n!(N-n)!}} = \frac{n(N+1)}{n+1}$$

برای برآورد  $N$  یعنی تعداد کل تانکهای نیروی متخاصم، معادله  $E(Y) = \frac{n(N+1)}{n+1}$  را نسبت به  $N$  حل کرده و به جای  $E(Y)$  برآورد آن

یعنی  $(\max_{1 \leq i \leq n} X_i)$  را قرار می‌دهیم. داریم:

$$\hat{N} = \left[ \frac{n+1}{n} (\max_{1 \leq i \leq n} X_i) \right]$$

در جریان جنگی،  $n$  تانک از کل  $N$  تانک دشمن به وسیله نیروهای خودی به غنیمت گرفته شده‌اند. تانکهای دشمن با اعداد ۱ تا  $N$  شماره‌گذاری شده و شماره تانکهای به غنیمت گرفته شده را شناسایی کرده‌ایم. می‌خواهیم  $N$  یعنی تعداد تانکهای دشمن را برآورد کنیم. فرض کنید  $X_1, X_2, \dots, X_n$  شماره تانکهای به غنیمت گرفته شده باشد.  $E[Y = \max_{1 \leq i \leq n} X_i]$  را محاسبه کرده و با استفاده از آن  $N$  را برآورد می‌کنیم. داریم:

$$P(Y = k) = \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}}, \quad k = n, n+1, \dots, N$$

زیرا اگر ما کسیم شماره تانکهای به غنیمت گرفته شده یعنی  $Y, k$  باشد در این صورت  $n-1$  شماره دیگر همه زیر  $k-1$  قرار دارند. پس

$$\begin{aligned} E(Y) &= \sum_{k=n}^N k P(Y = k) = \sum_{k=n}^N k \frac{\binom{k-1}{n-1}}{\binom{N}{n}} \\ &= \frac{1}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \frac{k(k-1)!}{(n-1)!(k-n)!} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=n}^N \binom{k}{n} \end{aligned} \quad (۱)$$

برای محاسبه عبارت  $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n}$  توجه کنید که  $\binom{k}{n}$  ضریب  $x^n$  در بسط چندجمله‌ای  $(1+x)^k$  است و در نتیجه  $\sum_{k=n}^N \binom{k}{n}$  ضریب  $x^n$  در بسط چندجمله‌ای  $\sum_{k=n}^N (1+x)^k$  است. چون

\* دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد