

## معدل‌گیری از داده‌های نادقیق

ماشالله ماشین‌چی\*

### چکیده

در زندگی روزمره با اطلاعاتی مواجه می‌شویم که در قالب مفاهیم نادقیق بیان شده‌اند و نه با اعداد. در صورتی که اطلاعات برحسب اعداد باشند، می‌توان با روشهای رایج آماری آنها را معدل‌گیری کرد. در این مقاله دو روش برای معدل‌گیری داده‌های نادقیق ارائه می‌کنیم. در یک روش، داده‌های نادقیق را به صورت عناصری از یک شبکه تلفی کرده و سپس عمل معدل‌گیری را توسط یک همسوساز در این شبکه انجام می‌دهیم. در روش دیگر، ابتدا داده‌های نادقیق را در قالب مجموعه‌های مشکک مدل‌سازی کرده و سپس آنها را با استفاده از اصل توسعه معدل‌گیری می‌کنیم. در هر دو روش برای معدل‌گیری به یک همسوساز مناسب نیاز داریم که این مفهوم را در اینجا معرفی کرده و خواصی از آن را بررسی می‌کنیم. با ارائه چند مثال به بیان دو روش می‌پردازیم تا عیب و حسن و همین‌طور چگونگی کاربرد روشها آشکار گردد.

### ۱ مقدمه

در بسیاری از مسائل آماری، اقتصادی و روزمره با اطلاعاتی مواجه می‌شویم که نیاز به معدل‌گیری آنها داریم. در صورتی که این داده‌ها به صورت عدد بیان شوند توسط معیارهای تمرکز مثل میانگین حسابی، میانگین هندسی، میانگین هارمونیک و غیره، که در علم آمار به خوبی شناخته شده‌اند، می‌توان دادها را به اصطلاح همسو کرد و عمل معدل‌گیری را انجام داد [۱]. اما در بسیاری از موارد داده‌های به دست آمده از نوع عددی نیستند و اغلب

به صورت مفاهیم نادقیق [۲ و ۳] مثل: خیلی خوب، متوسط، حول و حوش ۱۸ و غیره در دسترس قرار می‌گیرند. به طور نمونه این مطلب در مکالمات روزمره بسیار مشهود است و بیشتر اطلاعاتی که بین افراد رد و بدل می‌شود از نوع نادقیق‌اند. با این همه ما از این اطلاعات هم استنتاجهای مناسبی را انجام می‌دهیم. مورد دیگری که می‌توان اشاره کرد، این است که اصولاً جمع‌آوری داده‌های عددی ممکن نیست، مانند آمار بلایای طبیعی در یک منطقه دور افتاده یا در مواردی که پاسخ دهندگان رغبت کمتری به دادن اطلاعات دقیق عددی داشته باشند مانند تهیه آمار درباره میزان درآمد افراد. سرانجام در مواردی تهیه داده‌های نادقیق آسانتر و کم‌خرج‌تر است. لذا در این مقاله فرض می‌کنیم که داده‌های مفروض نادقیق‌اند و می‌خواهیم این داده‌ها را همسو کرده و معدل آنها را به دست آوریم. بنابراین سؤال این است که چگونه می‌توان این معدل‌گیری را انجام داد؟

در این مقاله ما دو روش برای انجام معدل‌گیری ارائه می‌کنیم. در یک روش فرض می‌کنیم که داده‌های ما دارای یک ساختار شبکه‌ای [۱۵] مناسب‌اند یا از یک شبکه مناسب بایستی انتخاب شوند. سپس با ارائه مفهوم یک همسوساز روی این شبکه‌ها معدل‌گیری را انجام می‌دهیم. لذا در این روش داده‌های نادقیق صرفاً به عنوان عناصری از یک شبکه تلفی می‌شوند. البته روش استفاده از شبکه‌ها برای استنتاج از مفاهیم نادقیق اخیراً توسط برخی نویسندگان [۵، ۴] ارائه شده و نشان داده شده که چنانچه این مفاهیم نادقیق به طریق مناسبی انتخاب شوند، دارای ساختارهای شبکه‌ای جالبی به نام جبر پرچین (hedge algebra) می‌باشند. ما در اینجا به نحوی از این ایده استفاده کرده‌ایم. در روش دیگر مفاهیم نادقیق را

\* دکتر ماشالله ماشین‌چی، دانشکده ریاضی و کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر کرمان

تذکر ۱.۲ اگر فرض کنیم که  $h: L^2 \rightarrow L$  یک عمل دوتایی شرکتپذیر روی  $L$  باشد، آنگاه با فرض

$$h(a, b, c) = h(a, h(b, c)), \forall a, b, c \in L$$

می‌توان  $h$  را به یک همسوساز روی  $L$  توسعه داد.

طبیعی است که هر عمل  $n$ -تایی  $h$  روی  $L$  نمی‌تواند یک همسوساز مناسب برای عمل معدل‌گیری باشد. برای به دست آوردن یک همسوساز جالب بایستی شرایطی معقول را بر  $h$  اعمال کرد. در اینجا با الهام گرفتن از خواص میانگین حسابی به عنوان یک همسوساز، شرایط زیر را اعمال می‌کنیم که در صورت نیاز به هر کدام از آنها در جای خود به ذکر آن می‌پردازیم.

$$\text{ش ۱. } h(1, 1, \dots, 1, 1) = 1, h(0, 0, \dots, 0, 0) = 0$$

ش ۲. اگر  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in L^n$  و  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in L^n$  به طوری که  $a_i \leq b_i$  یعنی  $\underline{a} \leq \underline{b}$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  آنگاه  $h(\underline{a}) \leq h(\underline{b})$  به عبارتی  $h$  به طور یکنوا صعودی است.

ش ۳.  $h$  متقارن است. یعنی برای هر  $(a_1, \dots, a_n) \in L^n$  داریم

$$h(a_1, \dots, a_n) = h(a_{p(1)}, \dots, a_{p(n)})$$

که در آن  $p$  یک تابع جایگشت روی مجموعه  $\{1, 2, \dots, n\}$  است.

ش ۴.  $h$  خود توان  $^2$  است. یعنی به ازای هر  $a \in L$  داریم

$$h(a, \dots, a, a) = a$$

تذکر ۲.۲ با توجه به ش ۴ می‌بینیم که در این حالت ش ۱ نتیجه می‌شود. به عنوان مثال، تعداد زیادی از همسوسازهای محسوس را می‌توان ارائه کرد. از جمله میانگین تعمیم یافته که در بخش ۱.۳ و معدل‌گیر وزنی که در بخش ۲.۳ ارائه شده‌اند. اما دسته دیگری از همسوسازها را که کاربرد زیادی نیز دارند، و به نام نرم‌های مثلثی شبکه‌ای نیز معروف‌اند، به لحاظ نیاز در تعریف زیر ارائه می‌کنیم.

تعریف ۲.۲ تابع  $f: L \times L \rightarrow L$  را در یک  $L$ -نرم گوئیم، اگر دارای خواص زیر باشد

$$(۱) f(x, 1) = x \quad \forall x \in L \text{ به ازای هر}$$

$$(۲) f(y, x) = f(x, y) \quad \forall x, y \in L \text{ به ازای هر}$$

$$(۳) \text{ اگر } y \leq z \text{ آنگاه } f(x, y) \leq f(x, z) \text{ به ازای هر } x, y, z \in L$$

$$(۴) f \text{ شرکتپذیر است، یعنی } f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z)) \text{ به ازای هر } x, y, z \in L$$

به صورت مجموعه‌های مشکک [۲] مدل‌سازی می‌کنیم و سپس با استفاده از اصل توسیع به همسوسازی اطلاعات و معدل‌گیری آنها می‌پردازیم. در هر حال در هر دو روش نیازمندیم تا مفهوم همسوساز را معرفی کنیم. لذا در این مقاله ابتدا همسوسازهای شبکه‌ای را معرفی کرده و سپس برخی همسوسازهای خاص مثل میانگین تعمیم یافته، معدل‌گیری وزنی و معدل‌گیر ترتیبی را نیز ارائه می‌کنیم. این همسوسازهای اخیراً به طور وسیعی مورد مطالعه و استفاده قرار گرفته‌اند [۶-۱۳]. در این مقاله با ارائه چند مثال به بیان دو روش می‌پردازیم تا عیب و حسن و همین طور چگونگی کاربرد دو روش را آشکار نماییم.

## ۲ عملگر همسوساز شبکه‌ای<sup>۱</sup>

فرض کنید از سه استاد در مورد وضعیت تحصیلی یک دانشجو سؤال کنیم و آنان پاسخهای خود را به صورتهای نادقیق: خوب، تقریباً خوب و یا کم و بیش خوب بیان کنند. حال می‌خواهیم بدانیم که وضعیت این دانشجو روی هم رفته چطور است؟ برای بررسی مسائلی نظیر این موضوع نیاز به عملگرهای همسوساز شبکه‌ای داریم که در این بخش به معرفی آنها می‌پردازیم.

فرض کنید  $(L, \leq, \wedge, \vee)$  یک شبکه [۱۵] باشد، که در صورت نیاز و بدون تذکر فرض می‌کنیم  $L$  دارای کوچکترین عنصر  $0$  و بزرگترین عنصر  $1$  است. به عنوان مثال  $(p(X), \subseteq, \cap, \cup)$  یک شبکه است، که در آن  $X$  یک مجموعه ناتهی،  $p(X)$  مجموعه همه زیرمجموعه‌های  $X$  است و به علاوه  $\subseteq, \cap, \cup$  به ترتیب نمادهای زیرمجموعه بودن، اشتراک و اجتماع هستند. بدین ترتیب در این شبکه عنصر  $0$  همان مجموعه تهی  $\emptyset$  و عنصر  $1$  همان مجموعه  $X$  است. خواننده برای مطالعه در خصوص شبکه‌ها و مثالهای دیگر می‌تواند به [۱۷، ۱۵] مراجعه کند.

شبکه  $(L^n, \leq, \wedge, \vee)$  را که در آن  $L^n = L \times \dots \times L$  حاصلضرب دکارتی  $n$  نسخه،  $n$  عددی طبیعی، از  $L$  است می‌توان به طور طبیعی ساخت. بنابراین ترتیب روی  $L^n$  از ترتیب روی  $L$  به طور مؤلفه‌ای القاء می‌شود و به ازای هر  $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n) \in L^n$  و  $\underline{b} = (b_1, \dots, b_n) \in L^n$  به ترتیب  $\wedge, \vee$  را به صورت  $(a_1 \wedge b_1, \dots, a_n \wedge b_n)$  و  $(a_1 \vee b_1, \dots, a_n \vee b_n)$  تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱.۲ هر تابع  $h: L^n \rightarrow L$  را یک عملگر همسوساز وابسته به شبکه  $L$ ، یا به طور مختصر یک همسوساز گوئیم.

در واقع یک همسوساز عبارت است از عملی  $n$ -تایی روی شبکه  $L$ .

1) Lattice aggregation operator

2) idempotent

$a_* = h(a_*, \dots, a_*) \leq h(a_1, \dots, a_n) \leq h(a^*, \dots, a^*) = a^*$   
یعنی  $h$  در نامساوی (۱) صدق می کند. به علاوه اگر یک تابع همسوساز  $h$  در نامساوی (۱) صدق کند، آنگاه داریم

$$a = a \wedge a \wedge \dots \wedge a \leq h(a, \dots, a) \leq a \vee a \vee \dots \vee a = a$$

بنابراین  $h(a, \dots, a) = a$  و لذا خود توان است و ش ۴ برقرار است.

تذکر ۲.۳ با توجه به قضیه ۱.۲ ملاحظه می شود که کرانه های بالا و پایین نامساوی (۱) در قضیه ۲.۲ تنها عملگرهای همسوساز در کلاس نرمهای مثلثی شبکه ای هستند که دارای هر چهار شرط ش ۱ - ش ۴ می باشند. به علاوه اگر قرار دهیم

$$\text{Min}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n,$$

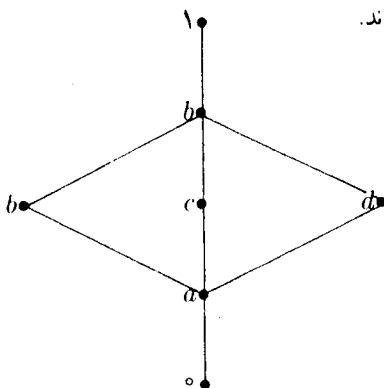
$$\text{Max}(a_1, \dots, a_n) = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n$$

آنگاه با توجه به خاصیت شبکه ها،  $\text{Min} \leq \text{Max}$  و به علاوه با توجه به قضیه ۲.۲ هر همسوساز  $h$  که بین دو همسوساز  $\text{Min}, \text{Max}$  قرار گیرد حتماً خودتوان است. بنابراین هر همسوساز روی  $L$  از  $\text{Min}$  قویتر و از  $\text{Max}$  ضعیفتر است.

به منظور کاربرد همسوساز شبکه ای به ارائه دو مثال می پردازیم.

مثال ۱.۲ فرض کنید نظر سه استاد را در مورد وضعیت یک دانشجو سؤال کرده ایم. این استادان پاسخهای خود را به صورت نادقیق: خوب ( $d$ )، تقریباً خوب ( $c$ ) و کم و بیش خوب ( $b$ ) بیان کرده اند. حال می خواهیم بدانیم وضعیت تحصیلی این دانشجو روی هم رفته چطور است؟

فرض کنید نظر هر سه استاد هم ارزش است و به علاوه به طور ذهنی فرض می کنیم که نمرات ارائه شده عناصری از یک شبکه اند. در اینجا با کمی دقت این طور استنباط می کنیم که نمرات  $d, c, b$  در این شبکه قابل مقایسه نیستند. لذا با این برداشتها شبکه  $L$  را که در شکل ۱ آمده است برای مطالعه این مسأله چنین در نظر می گیریم که در آن مابقی عناصر به صورت بسیار خوب (۱)، خوب ( $e$ )، کمی خوب ( $a$ ) و چنین نیست خوب (۰) تعبیر شده اند.



شکل ۱. شبکه نمرات  $L$  که بر اساس داده ها ساخته شده است.

در تعریف فوق  $f$  را یک  $L$ -نرم هم نرم گوئیم، اگر به جای خاصیت (۱) فرض زیر برقرار باشد:

$$f(x, 0) = x \quad (۱')$$

$L$ -نرمها و  $L$ -نرمها را نرمهای مثلثی شبکه ای گوئیم. حال با توجه به شرکت پذیری یک نرم مثلثی شبکه ای و تذکر ۱.۲ می توان از هر نرم مثلثی شبکه ای یک همسوساز ساخت که در ش ۱ - ش ۳ صدق می کند.

به عنوان مثال، چنانچه شبکه ما  $([0, 1], \leq, \min, \max)$  باشد، در این صورت اگر  $f$  یکی از اعمال دوتایی  $\min$  (مینیمم)،  $\max$  (ماکسیمم)،  $\text{prod}$  (حاصلضرب) روی بازه  $[0, 1]$  باشد، آنگاه  $f$  در هر حالت یک نرم مثلثی روی بازه حقیقی  $[0, 1]$  است که در آن  $\leq$  رابطه کوچکتر یا مساوی معمولی روی اعداد حقیقی است. البته مثالهای زیاد دیگری از نرمهای مثلثی می توان ارائه کرد که علاقه مندان می توانند به [۱۴] مراجعه نمایند. برای حالتی که شبکه  $L$  زنجیر شکل ۲ است جدول ۱ مثالی از یک نرم مثلثی روی  $L$  است که متفاوت با  $\wedge, \vee$  است. خواننده می تواند مثالهای متفاوت دیگری را نیز به دست آورد، چنانچه یک نرم مثلثی شبکه ای در ش ۳ صدق کند آنگاه قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱.۲ فرض کنید  $f$  یک نرم مثلثی شبکه ای باشد. آنگاه  $f(a, a) = a$  به ازای هر  $a \in L$  اگر و فقط اگر  $f = \wedge$  یا  $f = \vee$ .

اصولاً نرمهای مثلثی دسته خاصی از همسوسازها هستند که کاربرد وسیعی در تعریف اعمال اجتماع و اشتراک روی مجموعه های مشکک دارند [۱۴]. اما در حالت کلی می توان قضیه جالب زیر را در مورد هر همسوساز دلخواه ارائه کرد که این همسوساز را به دو همسوساز خاص  $\wedge, \vee$  روی شبکه  $L$  محدود می کند.

قضیه ۲.۲ فرض کنید  $h: L^n \rightarrow L$  یک همسوساز باشد. اگر  $h$  در ش ۲ و ش ۴ صدق کند آنگاه به ازای هر  $a_1, \dots, a_n \in L$

$$a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \leq h(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n \quad (۱)$$

به علاوه چنانچه یک همسوساز  $h$  در نامساوی (۱) صدق کند آنگاه  $h$  حتماً دارای خاصیت خودتوانی ش ۴ است.

برهان. فرض کنید  $h$  در ش ۲ و ش ۴ صدق کند. آنگاه با فرض

$$a^* = a_1 \vee a_2 \vee \dots \vee a_n, \quad a_* = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n$$

به راحتی می توان دید که

جدول ۱

$h$	$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\backslash$
$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$	$\circ$
$a$	$\circ$	$a$	$a$	$c$	$c$	$a$
$b$	$\circ$	$a$	$b$	$c$	$c$	$b$
$c$	$\circ$	$c$	$c$	$c$	$c$	$c$
$d$	$\circ$	$c$	$c$	$c$	$d$	$d$
$\backslash$	$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$	$\backslash$

حال با توجه به شرکتپذیری عمل  $h$  روی  $L$  می‌توانیم به راحتی آن را به یک همسوساز  $L \rightarrow L^2$ :  $h$  توسیع دهیم. این همسوساز دارای همه خواص ش ۱ - ۴ است و با همسوسازهای  $\text{Max}$  و  $\text{Min}$  فرق می‌کند. مثلاً  $\text{Min}(a, c) = a$  در حالی که  $h(a, d) = c$ . اما به هر حال طبق قضیه ۲.۲ داریم  $\text{Min} \leq h \leq \text{Max}$ . حال با توجه به  $h$  معدل نظرات برابر است با:

$$h(b, c, d) = h(b, h(c, d)) = h(b, c) = c = \text{کمی خوب}$$

که نتیجه معقولی است. اما روی هم رفته معدل‌گیری توسط این همسوساز همه جا رضایت‌بخش نیست. به عنوان مثال معدل ضعیف، متوسط، و کمی خوب به صورت زیر است

$$h(a, b, c) = h(a, h(b, c)) = h(a, c) = c = \text{کمی خوب}$$

که شاید نتیجه جالبی نباشد.

تذکر ۲.۴ همسوسازهای ارائه شده در مثالهای ۱.۲ و ۲.۲ ممکن است قانع‌کننده نباشند ولی ارائه آنها نشان دهنده روش استفاده از آنهاست و همان‌طور که ملاحظه شد ما با داده‌های نادقیق صرفاً به صورت عناصر یک شبکه برخورد کرده‌ایم. البته انتخاب این شبکه‌ها می‌تواند بسیار منطقی صورت گیرد. چنانچه اخیراً در مقالات [۵، ۴] این روش برای استدلال تقریبی توسط مفاهیم نادقیق به کار رفته و نشان داده شده که مفاهیم نادقیق مورد بحث در صورتی که مناسب انتخاب شوند دارای ساختار شبکه‌ای جالبی به نام جبر پرچین<sup>۱</sup> هستند. در اینجا ذکر یک نکته لازم است که هنوز برنگارنده کاملاً روشن نیست که اگر داده‌های نادقیق هموزن نباشند آنگاه انتخاب  $h$  در مثالهای ۲.۲ و ۱.۲ چگونه بایستی صورت گیرد؟ که خود نیاز به تحقیق بیشتر دارد.

حال مسأله برمی‌گردد به اینکه یک همسوساز  $L \rightarrow L^2$ :  $h$  که مناسب این مدل‌سازی باشد، به دست آوریم به طوری که حتی‌الامکان در همه شرایط ش ۱-۴ صدق کند. اگر فرض کنیم  $h = \text{Min}$  در این صورت

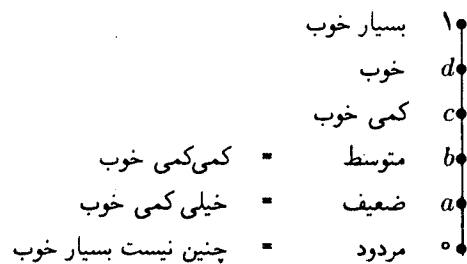
$$h(b, c, d) = \text{Min}(d, \text{Min}(c, d))$$

$$= \text{Min}(b, a) = a = \text{کمی خوب}$$

در این مسأله می‌توان گفت که همسوساز  $\text{Min}$  یک انتخاب بدبینانه است زیرا که ما در معدل‌گیری بدترین حالت را مدنظر قرار داده‌ایم و در مقابل همسوساز  $\text{Max}$  یک انتخاب خوشبینانه است، زیرا که در این حالت متمایل به ملاحظه حالت‌های بهتر هستیم. لذا ممکن است انتخاب‌های دیگری از همسوسازها، مدل‌سازی بهتری از مسأله را ارائه دهد.

در مثال ۱.۲ ما ارائه نمره توسط سه استاد را آزاد قرار دادیم. در حالی که ممکن است شبکه نمره‌های خود را از ابتدا مشخص کنیم و سپس هر نمره‌ای را تنها به عنوان انتخابی از این شبکه در نظر بگیریم. در مثال بعد ما این روش را به کار می‌بریم.

مثال ۲.۲ فرض کنید که نمرات فقط می‌توانند از یک شبکه، که تشکیل یک زنجیر متناهی [۱۵] می‌دهند، انتخاب شوند. یعنی همه نمرات با هم قابل مقایسه‌اند. ما در این مثال زنجیر  $L$  را به صورت شکل ۲ در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۲. شبکه نمرات  $L$  که از قبل ساخته شده است.

حال مانند مثال ۱.۲ از سه استاد می‌خواهیم تا نظرشان را در مورد وضعیت تحصیلی یک دانشجو بیان کنند ولی این دفعه مقید به انتخاب از عناصر زنجیر  $L$  اند.

فرض کنید پاسخ آنان به صورت خوب ( $d$ )، کمی خوب ( $c$ ) و متوسط ( $b$ ) باشد. حال می‌خواهیم معدل نظریات این استادان را در مورد این دانشجو به دست آوریم. مجدداً بایستی یک همسوساز مناسب برای این معدل‌گیری انتخاب کنیم. در اینجا با قدری کاوش عمل دوتایی  $L \rightarrow L^2$ :  $h$  را به صورت زیر به دست می‌آوریم:

1) hedge algebra

## ۳ برخی همسوسازهای خاص

اگر  $L$  شبکه اعداد حقیقی  $R^+$  یا بازه  $[0, 1]$  باشد، که رابطه  $\leq$  روی  $L$  همان ترتیب معمولی روی اعداد حقیقی است و  $\vee, \wedge$  نیز همان توابع  $\min$  و  $\max$  روی اعداد حقیقی اند، آنگاه نماد  $L_*$  را به جای  $L$  به کار می بریم. با این فرض داده های بیان شده در  $L_*$  به صورت اعداد حقیقی خواهند بود که برای معدل گیری آنها می توان از معدل گیرهای معمولی استفاده کرد. در این بخش ما به شرح این گونه همسوسازها می پردازیم. خواننده علاقه مند می تواند به مقاله های [۶-۱۳] و کتاب [۱۴] مراجعه کند.

## ۱.۳ میانگین تعمیم یافته

تعریف ۳.۱.۱ فرض کنید همسوساز  $L_* \rightarrow L_*^n$   $h_\alpha$  به صورت زیر تعریف شود:

$$h_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \left( \frac{a_1^\alpha + \dots + a_n^\alpha}{n} \right)^{1/\alpha} \quad (2)$$

که در آن پارامتر  $\alpha \in R$   $\alpha \neq 0$  و در حالتی که  $\alpha < 0$  فرض می کنیم که همه  $a_i$ ها مخالف صفرند. در این صورت  $h_\alpha$  را میانگین تعمیم یافته گوئیم. به علاوه  $h_\alpha$  دارای خواص زیر است:

(۱) اگر  $\alpha < 0$ ،  $a_i \rightarrow 0$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  آنگاه  $h_\alpha(a_1, \dots, a_n)$

(۲) اگر  $\alpha \rightarrow 0$  آنگاه  $\lim_{\alpha \rightarrow 0} h_\alpha(a_1, \dots, a_n) = (a_1 \dots a_n)^{1/n}$  یعنی در این حالت مقدار حد همان میانگین هندسی است:

$$\lim_{\alpha \rightarrow -\infty} h_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \min(a_1, \dots, a_n) \quad (3)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} h_\alpha(a_1, \dots, a_n) = \max(a_1, \dots, a_n) \quad (4)$$

(۵) اگر  $\alpha = -1$  آنگاه  $h_{-1}(a_1, \dots, a_n) = \frac{n}{1/a_1 + \dots + 1/a_n}$  میانگین هارمونیک است:

(۶) اگر  $\alpha = 1$  آنگاه  $h_1(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$  میانگین حسابی است:

(۷)  $h_\alpha$  در ش ۴ صدق می کند.

## ۲.۳ معدل گیری وزنی

دسته ای از همسوسازها به نام معدل گیر وزنی اند. برای تعریف این معدل گیرها همان طور که از نام آنها برمی آید، باید وابسته به یک بردار وزن باشند.

تعریف ۱.۲.۳ فرض کنید  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$  اگر  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  آنگاه  $\underline{w}$  را یک بردار وزنی گوئیم.

تعریف ۲.۲.۳ فرض کنید  $\underline{w} \in [0, 1]^n$  یک بردار وزنی مفروض باشد. همسوساز  $L_* \rightarrow L_*^n$   $h_{\underline{w}}$  را که به صورت زیر تعریف می شود یک معدل گیر وزنی گوئیم:

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \sum_{i=1}^n w_i a_i$$

دسته خاصی از معدل گیرهای وزنی را می توان در قضیه زیر مشخص کرد.

قضیه ۱.۲.۳ فرض کنید همسوساز  $L_* \rightarrow L_*^n$   $h$  پیوسته باشد و در ش ۴ و شرط مرزی  $h(0, \dots, 0) = 0$  صدق کند. به علاوه فرض کنید برای هر  $a_i, b_i \in L_*$  که  $a_i + b_i \in L_*$  داریم:

$$h(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) = h(a_1, \dots, a_n) + h(b_1, \dots, b_n)$$

آنگاه  $h$  یک معدل گیر وزنی است.

برهان  $L_* \rightarrow L_*$   $h_i$  را به صورت  $h_i(x) = h(0, \dots, 0, x, \dots, 0)$  برای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  که در آن  $x$  در  $i$ امین مکان است تعریف می کنیم. تابع  $h_i$ ، به لحاظ پیوستگی  $h$ ، پیوسته است و به ازای هر  $x, y \in L_*$  که  $x + y \in L_*$  داریم:

$$h_i(x + y) = h_i(x) + h_i(y) \quad (3)$$

حال با استفاده از شرط مرزی روی  $h$  داریم  $h_i(0) = 0$ . معادله (۳) یک معادله تابعی کوشی [۱۶] است که از حل آن داریم:

$$h_i(x) = w_i x$$

که در آن  $x \in L_*$  و  $w_i = h_i(1) = w_i$ ، به ازای هر  $i = 1, 2, \dots, n$  لذا

$$\begin{aligned} h(a_1, \dots, a_n) &= h(a_1, 0, \dots, 0) + h(0, a_2, 0, \dots, 0) \\ &\quad + \dots + h(0, 0, \dots, 0, a_n) \\ &= h_1(a_1) + h_2(a_2) + \dots + h_n(a_n) \\ &= w_1 a_1 + \dots + w_n a_n \\ &= \sum_{i=1}^n w_i a_i \end{aligned}$$

## ۴ مدل‌سازی مفاهیم نادقیق توسط

### مجموعه‌های مشکک و همسوزی آنها

در بخش ۲، داده‌ها به عنوان عناصری صرف از یک شبکه تلقی شدند و سپس روی آنها عمل همسوزی انجام شد. برخی اوقات می‌توان ابتدا داده‌ها را به صورت مجموعه‌های مشکک مدل‌سازی کرد و سپس روی آنها عمل همسوزی را انجام داد [۳،۲]. برای این منظور ابتدا یک تعریف، برخی نمادها و سپس اصل توسعه را ارائه می‌کنیم.

**تعریف ۱.۴**  $\bar{A} : X \rightarrow L$  را که در آن  $X$  مجموعه‌ای ناتهی و  $L$  یک شبکه است یک  $L$ -زیرمجموعه  $X$  گوئیم.  $\bar{A}(x)$  را به عنوان میزان عضویت  $x$  در  $\bar{A}$  تعبیر می‌کنیم. در حالتی که  $L$  شبکه  $[0, 1]$  باشد،  $\bar{A}$  را یک زیرمجموعه مشکک  $X$  گوئیم.

در صورتی که  $X = \{x_1, \dots, x_n\}$  متاهی باشد،  $L$ -مجموعه  $\bar{A}$  را به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$\bar{A} = \frac{\bar{A}(x_1)}{x_1} + \dots + \frac{\bar{A}(x_n)}{x_n} \quad (۴)$$

که در آن  $\frac{\bar{A}(x)}{x}$  بدین معنی است که میزان عضویت  $x$  در  $\bar{A}$  برابر با  $\bar{A}(x)$  است و معنی تقسیم نمی‌دهد. همین طور علامت  $+$  در (۴) برای نشان دادن تمامی عناصر و میزان عضویت آنها به کار رفته و به معنی جمع بین عناصر نیست. به علاوه فرض می‌کنیم:

$$F_L(X) = \{\bar{A} | \bar{A} \text{ یک } L\text{-زیرمجموعه } X\} = L^X$$

و اگر  $L$  شبکه  $[0, 1]$  باشد آنگاه می‌نویسیم  $F(X)$ .

**اصل توسعه.** فرض کنید  $f : X \times X \rightarrow X$  یک عمل دوتایی شرکتپذیر روی مجموعه  $X$  و  $h : L^n \rightarrow L$  یک همسوز باشد.  $f$  یک تابع  $\bar{f}_h$  به صورت زیر القا می‌کند:

$$\begin{aligned} \bar{f}_h : L^X \times \dots \times L^X &\rightarrow L^X, \\ (\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n) &\mapsto \bar{f}_h(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n) \bar{f}_h(\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n)(z) \\ &= \begin{cases} \sup_{z=f(x_1, \dots, x_n), x_i \in X} h(\bar{A}_1(x_1), \dots, \bar{A}_n(x_n)) & z \in X \\ 0 & \text{جاهای دیگر} \end{cases} \end{aligned}$$

این تابع جدید  $\bar{f}_h$  را توسعه  $f$  گوئیم. روند فوق را اصل توسعه نامیم. در

چون  $h$  در ش ۴ صدق می‌کند بنابراین  $\underline{w}$  یک بردار وزنی است زیرا به ازای  $a \neq 0$  داریم

$$a = h(a, \dots, a) = \sum_{i=1}^n w_i a = a \sum_{i=1}^n w_i$$

پس  $\sum_{i=1}^n w_i = 1$  و بنابراین  $h = h_{\underline{w}}$  معدل‌گیری وزنی وابسته به بردار  $\underline{w}$  است.

### ۳.۳ معدل‌گیری وزنی ترتیبی<sup>۱</sup>

در این حالت بایستی معدل‌گیر به دست آمده اولاً وزنی باشد و ثانیاً یک نوع ترتیب در آن ملاحظه شود. برای این منظور تعریف دسته‌ای از این معدل‌گیرها را به صورت زیر ارائه می‌دهیم:

**تعریف ۱.۳.۳** فرض کنید  $\underline{w} = (w_1, \dots, w_n) \in [0, 1]^n$  یک بردار وزنی باشد. همسوز  $h_{\underline{w}} : L^n \rightarrow L_*$  را معدل‌گیری وزنی ترتیبی گوئیم، اگر

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = w_1 b_1 + \dots + w_n b_n$$

که در آن بردار  $(b_1, \dots, b_n)$  بردار نزولی به دست آمده از بردار  $(a_1, \dots, a_n)$  است. یعنی  $b_i$ ها همان  $a_i$ ها مرتب شده‌اند که  $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ . برای روشن شدن تعریف مثلاً اگر

$$\underline{w} = (0,3, 0,1, 0,2, 0,4)$$

آنگاه

$$h_{\underline{w}}(6, 9, 2, 7) = 0,3 \times 9 + 0,1 \times 7 + 0,2 \times 6 + 0,4 \times 2$$

$h_{\underline{w}}$  دارای خواص زیر است:

(۱) اگر  $\underline{w} = (0, \dots, 0, 1)$  آنگاه

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \min(a_1, \dots, a_n)$$

(۲) اگر  $\underline{w} = (1, 0, \dots, 0)$  آنگاه

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \max(a_1, \dots, a_n)$$

(۳) اگر  $\underline{w} = (1/n, \dots, 1/n)$  آنگاه

$$h_{\underline{w}}(a_1, \dots, a_n) = \frac{a_1 + \dots + a_n}{n}$$

(۴) اگر  $\underline{w}$  یک بردار وزنی دلخواه باشد آنگاه  $h_{\underline{w}}$  در ش ۴ صدق می‌کند.

1) ordered weighted averaging

بنابراین می‌توان، با توجه به مجموعه مشکک (۶)، گفت که نمره این دانشجو حول و حوش ۱۷ است.

مثال ۲.۴ در مثال قبل مدل‌سازی را در  $F(X)$  انجام دادیم. فرض کنید که  $\bar{A}, \bar{B} \in F_L(x)$  که در آن  $X = [0, 20]$  و  $L$  شبکه مثال ۲.۲ است که در شکل ۲ ارائه شده است. حال  $\bar{A}, \bar{B}$  را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\bar{A} = \frac{b}{17} + \frac{d}{18} + \frac{c}{19}, \quad \bar{B} = \frac{a}{15} + \frac{d}{16} + \frac{c}{17}$$

فرض کنید که  $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$ . به علاوه فرض کنید که همسوزا؛ روی  $L$  همانند مثال ۲.۲ باشد. در این صورت با استفاده از (۵) به دست می‌آوریم:

$$\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} = \bar{f}_h(\bar{A}, \bar{B}) = \frac{a}{16} + \frac{c}{16.5} + \frac{c}{17} + \frac{c}{17.5} + \frac{c}{18}$$

لذا نتیجه‌ای که می‌توان ارائه کرد این است که با اطمینان نسبتاً خوب، نمره دانشجو در فاصله  $[16.5, 18]$  قرار دارد.

### نتیجه‌گیری

با توجه به مثالهای ارائه شده می‌توان یکی از عیبهای روش استفاده از مدل‌سازی مفاهیم نادقیق توسط  $L$ -مجموعه‌ها و سپس معدل‌گیری آنها را در این دید که اصولاً معدل‌گیری توسط یک  $L$ -مجموعه در عمل مشکل است و بستگی به شخص و محیط تصمیم‌گیری دارد که مدل‌سازی را ناپایدار می‌کند. عیب دوم اینکه  $\bar{f}_h$  خودتوان نیست، یعنی همواره  $\bar{A} = \bar{f}_h(\bar{A}, \dots, \bar{A})$  نیست که این برخلاف انتظار است. این موضوع را می‌توان به راحتی در دو مثال ۱.۴ و ۲.۴ تحقیق کرد. اما در روش استفاده از عملگرهای همسوزا شبکه‌ای و تلقی داده‌ها به صورت عناصر یک شبکه با دو عیب ذکر شده قبل مواجه نیستیم. یعنی مشکل ناپایداری مدل‌سازی را نداریم و به علاوه با فرض خودتوانی  $h$  داریم که  $h(a, a) = a$ . در عوض عیب این روش این است که ساختن خود  $h$  مشکل است و به علاوه تاکنون روشی برای وزن‌دهی به داده‌ها موجود نیست و نیاز به تحقیق دارد.

اصل توسعه ملاحظه می‌شود که برای به دست آوردن  $\bar{f}_h$  نیاز به یک عملگر همسوزا داریم. چنانچه  $L$  شبکه  $[0, 1]$  باشد، در این صورت بسته به نوع مسأله می‌توان  $h$  را میانگین تعمیم‌یافته در بخش ۱.۳ یا معدل‌گیر وزنی در بخش ۲.۳ انتخاب کرد. مثلاً ما در مثال ۱.۴ همسوزا خود را ساده‌ترین حالت یعنی  $h(x, y) = \min(x, y)$  انتخاب کرده‌ایم. در حالی که در مثال ۲.۴ همسوزا  $h$  را همانند جدول ۱ گرفته‌ایم. اما در هر دو حالت خواننده می‌تواند همسوزاهای دیگری را جایگزین کند. حال برای روشن شدن مطلب به ارائه مثال می‌پردازیم.

مثال ۱.۴ فرض کنید نظر دو استاد را در مورد وضعیت تحصیلی یک دانشجو سؤال کرده‌ایم. پاسخ آنان به صورت: خیلی خوب ( $\bar{A}$ ) و متوسط ( $\bar{B}$ ) بیان شده است. حال سؤال می‌شود معدل تحصیلی این دانشجو چیست؟

برای پاسخ به این سؤال ابتدا فرض می‌کنیم که  $\bar{A}, \bar{B} \in F(X)$  که در آن  $X = [0, 20]$  فضای نمره است. یعنی در اینجا نمره‌ها به صورت نادقیق‌اند اما مدل‌سازی آنها توسط مجموعه‌های مشکک انجام شده که به صورت زیرند:

$$\bar{A} = \frac{0.18}{17} + \frac{1}{18} + \frac{0.19}{19}, \quad \bar{B} = \frac{0.15}{15} + \frac{1}{16} + \frac{0.17}{17}$$

ملاحظه می‌کنیم که مدل‌سازی این مفاهیم گرچه با عقل سلیم مطابقت دارد ولی کاملاً ذهنی‌اند و بستگی به شخص و محیط تصمیم‌گیری دارند. مثلاً در اینجا  $\bar{A}$  به این معنی است که نمره دانشجو حول و حوش ۱۸ است و  $\bar{B}$  به معنی اینکه نمره دانشجو حول و حوش ۱۶ است. حال برای معدل‌گیری  $\bar{A}, \bar{B}$  به صورت  $\frac{\bar{A} + \bar{B}}{2}$  از اصل توسعه استفاده می‌کنیم. اگر فرض کنیم که  $f(x, y) = \frac{x+y}{2}$ ،  $h(x, y) = \min(x, y)$  و  $L = [0, 1]$  آنگاه با محاسبه (۵) به راحتی می‌توان دید که

$$\begin{aligned} \frac{\bar{A} + \bar{B}}{2} &= \bar{f}_h(\bar{A}, \bar{B}) \\ &= \frac{0.15}{16} + \frac{0.18}{16.5} + \frac{1}{17} + \frac{0.19}{17.5} + \frac{0.17}{18} \end{aligned}$$

### مراجع

- [4] N. Cat Ho and W. Wechler, Hedge algebras: An algebraic approach to structure of set of linguistic truth values, Fuzzy Set and Systems 35 (1990) 281-293.
- [5] N. Cat Ho and W. Wechler, Extended hedge algebras and their application to fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems 52 (1992) 259-281.

- [۱] جواد بهبودیان، آمار و احتمال مقدماتی، بنیاد فرهنگی رضوی، ۱۳۶۸.
- [۲] سید محمود طاهری، آشنایی با نظریه مجموعه‌های فازی، انتشارات جهاد دانشگاهی، ۱۳۷۵.
- [۳] ماشالله ماشین‌چی، ریاضیات مفاهیم نادقیق و سیستمهای هوشمند، گزارش کامپیوتر، شماره ۱ سال هیجدهم شماره پیاپی ۱۳۰، صفحات ۲۵-۳۰.

- [6] R. R. Yager, Constrained OWA aggregation, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 89-101.
- [7] R. R. Yager, Aggregation operators and fuzzy system modeling, Fuzzy Sets and Systems 67 (1994) 129-125.
- [8] R. R. Yager, Families OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
- [9] R. R. Yager, Connective and quantifiers in fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 40 (1991) 39-76.
- [10] R. R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation in multicriteria decision making IEEE Tran. Systems, Man Cybernet 18 (1988) 183-190.
- [11] R. R. Yager, On mean type aggregation IEEE Tran. Systems, Man Cybernet Part B, 26 (1996) 209-326.
- [12] H. Dyckhoff and W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.
- [13] A. L. Ralescu and D. A. Ralescu, New concepts of fuzzy aggregation, Fuzzy Sets and Systems, to appear.
- [14] G. J. Klir and Bo Yuan, Fuzzy sets and fuzzy logic, Theory and Applications, Prentice Hall, 1995.
- [15] G. Birkhoff, Lattice theory, American Mathematical Society, Providence, 1967.
- [16] J. Aczel, Lectures on functional equation and their applications, Academic Press, New York, 1966.
- [17] Vijay K. Khanna, Lattices and Boolean algebras, Vikas Publishing House PVT 1994.

---

این مقاله با حمایت مالی مرکز پژوهشی ریاضی ماهانی دانشگاه شهید باهنر کرمان تهیه شده است.

---