نموگرافی برای نمونه‌هایی با تعداد معیوبهای صفر

دیود—اس—نِلسون

ترجمه : محمّدباقر سپهری[۱]

گاهی اتفاق می‌افتد که یک نمونه n تایی را به‌طور تصادفی از یک محموله با اندازهٔ N انتخاب کرده، پس از بررسی مشاهده می‌کنیم که این نمونه شامل هیچ قطعه‌ی معیوبی نیست؛ یعنی تعداد قطعات معیوب در آن صفر است. استنتاج بدیهی در مورد محموله این است که : " محموله کاملاً بد نیست" زیرا حداقل دارای n قطعه‌ی خوب هست. اما به غیر از این نتیجه‌گیریِ کلّی و ساده چه استنتاجهای دیگری می توان در رابطه با نسبت قطعات معیوب در محموله ارایه داد؟ معمولاً آمارشناسان براین اعتقادند که اگر نمونه کمتر از ده درصد محموله باشد، مشخصه‌های محموله با خارج‌شدن نمونه تغییری نمی‌یابد، با این فرض می‌توان توزیع واقعی " فوق هندسی" را زمانی که نسبت قطعات معیوب(p) کمتر از ۱۰ درصد و اندازه‌ی نمونه حداقل ۳۰ باشد توسط توزیع دوجمله‌ای یا پوآسون تقریب زد(جهت مقایسه های کمّی این تقریبها به [۱] مراجعه شود.)

در این مقاله کاربرد توزیع پوآسون را جهت یافتن حدهای بالایی براساس درصد معیوب $100p$ برای سطوح مختلف اطمینان γ ، زمانی‌که هیچ قطعه‌ی معیوبی در نمونه n تایی یافت نشده باشد، به‌کارمی‌بریم.

رابطه‌ی مورد نیاز عبارتست از:

$$\gamma = 1 - e^{-np_u} \qquad (1)$$

که در آن :

$\gamma =$ سطح اطمینان

$n =$ اندازه نمونه

$p_u =$ حد بالای اطمینان نسبت معیوب

نموگراف ارایه شده در شکل (۱) براساس رابطه‌ی (۱) تهیه شده است و به کمک این نموگراف می‌توان یک جواب تقریبی برای هر یک از n ، γ یا $100p_u$ (حداکثرتعداد معیوب) به شرط داشتن دوتای دیگر، ارایه نمود. به منظور مشخص شدن

[۱] محمّدباقرسپهری، دانشکده علوم ریاضی دانشگاه صنعتی اصفهان

روش استفاده از نموگراف به مثالهای زیر توجه کنید:

- **مثال ۱ — از محموله‌ای با اندازه‌ی N (بیشتر از ۱۰۰۰) یک نمونه n تایی ($n = ۱۰۰$) انتخاب کرده‌ایم. مشاهده می‌شود که هیچ قطعه‌ی معیوبی در این نمونه وجود ندارد. هرگاه $\gamma = ۰/۹$ باشد، این محموله چقدر می‌تواند "بد" باشد؟**

جواب : با قراردادن خط کش بر روی نموگراف (شکل (۱)) به‌طوری‌که از دو نقطه‌ی ۱۰۰ و ۰/۹ بگذرد مشاهده می‌شود که درصد قطعات معیوب در محموله با اطمینان ۹۰ درصد بیشتر از ۲/۳٪ نمی‌تواند باشد.

- **مثال ۲ — اگر بدانیم یک درصد قطعات محموله‌ای معیوب هستند، یک نمونه را با چه اندازه‌ای می‌بایست انتخاب کنیم تا ۹۹ درصد امکان وجود حداقل یک قطعه‌ی معیوب در آن باشد؟**

جواب : همانند مثال قبل، خط کش را بر روی نموگراف طوری قرار می دهیم که از نقطه‌ی ۱ و ۰/۹۹ بگذرد مشاهده می‌گردد که نمونه‌ای در حدود ۴۶۰ قطعه مورد نیاز است.

همچنین مهندسین قابلیت اعتماد می توانند از این نموگراف که بیانگر یک مدل واقعی نمایی است با درنظر گرفتن مقیاس‌های n به‌عنوان واحد زمان ، و حداکثر درصد معیوب به‌عنوان مقیاس $۱۰۰\lambda_u$ که λ_u عبارت‌است از حد بالایی اطمینان نرخ شکست، استفاده نمایند. بنابراین رابطه‌ی (۱) به‌صورت زیر تبدیل می‌گردد:

$$\gamma = ۱ - e^{-t\lambda_u}$$

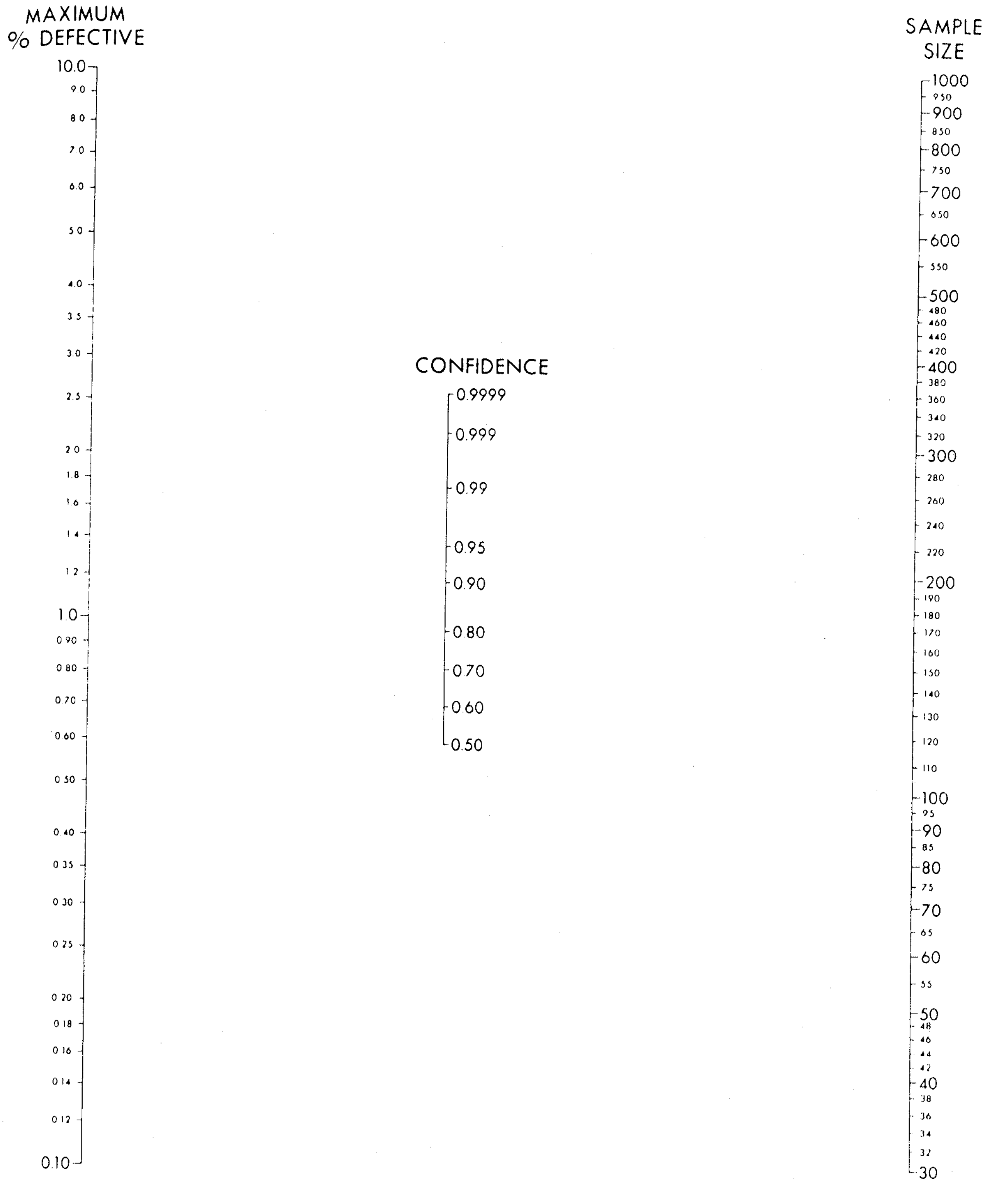
- **مثال ۳ — در آزمون طول عمر ۱۰ قطعه پس از گذشت ۵ واحد زمانی ، آزمایش را قطع نموده‌ایم . با توجه به اینکه در $۵۰ = ۵ \times ۱۰$ واحد زمان هیچ قطعه‌ای خراب نشده است، حد بالای اطمینان نرخ شکست با ضریب اطمینان ۹۵ درصد چیست؟**

جواب : با اطمینان ۹۵ درصد نرخ شکست می‌تواند کمتر از ۰/۰۶ شکست در واحد زمان باشد.

مراجع

[1] Dancan, A. D. *Quality Control and Industrial Statistics*. 3rd ed., Irwin, Homowood, Illions, 1965, pp. 87-89.

اصل این مقاله با عنوان
Nomograph for Samples Having Zero defectives در
Journal of Quality Technology, Vol. 10, No. 1, January 1978
به چاپ رسیده‌است.



شکل ۱: نموگراف تعیین تعداد نمونه با تعداد معیوبهای صفر

تجزیه‌ی تابع چگالی متقارن دوبعدی

ناهید سنجری فارسی پور[۱] هدیه جعفرپور[۲]

چکیده

می دانیم که در تجزیه‌ی جداول توافقی مربعی، مدلی متقارن است که هم، شبه‌متقارن باشد و هم، تابع چگالی کناری آن همگن باشد و بالعکس [۱]. این مقاله تجزیه‌ای مشابه برای تابع چگالی دوبعدی ارایه می دهد، که ضمن ارایه چند مثال کاربردی، مسأله به حالت سه‌متغیره تعمیم داده‌شده است [۲].

۱ مقدمه

در این مقاله، ضمن معرفی تابع چگالي دوبعدي شبه متقارن، نشان داده می‌شود که شرط لازم و کافی برای متقارن بودن تابع چگالی، شبه متقارن و همگن حاشیه‌ای بودن آن است.

۲ تقارن، شبه تقارن و همگن حاشیه‌ای

فرض کنید (X,Y) یک متغیر تصادفی دوبعدی با تابع چگالی $f(x,y)$ باشد. به‌طوری که

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &> 0 \qquad \forall (x,y) \in D_{[a,b]} \\
f(x,y) &= 0 \qquad \forall (x,y) \notin D_{[a,b]}
\end{aligned}
$$

---

[۱] دکتر ناهید سنجری فارسی‌پور، بخش آمار دانشگاه شیراز
[۲] هدیه جعفرپور، بخش آمار دانشگاه شیراز

که در آن

$$D_{[a,b]} = \{(x,y) | a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

$$-\infty \leq a < b \leq \infty$$

(۱) تابع چگالی $f(x,y)$ متقارن است؛ اگر داشته باشیم:

$$f(x,y) = f(y,x) \qquad \forall (x,y) \in \Re^۲$$

(۲) تابع چگالی $f(x,y)$ شبه متقارن است؛ اگر داشته باشیم:

$$\frac{f(t_۱,t_۳)\ f(t_۲,t_۴)}{f(t_۲,t_۳)\ f(t_۱,t_۴)} = \frac{f(t_۳,t_۱)\ f(t_۴,t_۲)}{f(t_۳,t_۲)\ f(t_۴,t_۱)}$$

$$\forall\ t_۱ \leq t_۲ \leq t_۳ \leq t_۴$$

به‌طوری‌که

$$(t_i,t_j) \in D_{[a,b]} \quad ; \quad i \neq j = ۱,۲,۳,۴$$

(۳) تابع چگالی $f(x,y)$ همگن حاشیه‌ای است؛ اگر داشته باشیم:

$$f_X(t) = f_Y(t) \qquad \forall\ t \in \Re$$

که در آن $f_X(t)$ و $f_Y(t)$ به ترتیب تابع چگالی کناری X و Y هستند. از روابط زیر می توان مشاهده نمود که اگر تابع چگالی $f(x,y)$ متقارن باشد، شبه متقارن و همگن حاشیه‌ای نیز هست.

$$\begin{aligned} f_X(t) &= \int_y f(t,y)dy \\ &= \int_y f(y,t)dy && f(x,y) = f(y,x) \\ &= \int_x f(x,t)dt && a \leq x,y \leq b \\ &= f_Y(t) \end{aligned}$$

با توجه به این‌که $f(x,y)$ متقارن است، رابطه‌ی شبه‌تقارن به راحتی نتیجه می‌شود.

تابع چگالی $f(x,y)$ را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= k\alpha(x)\beta(y)\gamma(x,y) && \forall (x,y) \in D_{[a,b]} \\ &= ۰ && \forall (x,y) \notin D_{[a,b]} \quad (۱) \end{aligned}$$

که در آن برای مقادیر ثابت دلخواه $c \in [a,b]$ داریم:

$$\alpha(c) = \beta(c) = \gamma(x,c) = \gamma(c,y) = ۱$$

در این صورت روابط زیر برقرارند

$$k = f(c,c) \quad , \quad \gamma(x,y) = \frac{f(x,y)f(c,c)}{f(x,c)f(c,y)}$$

$$\alpha(x) = \frac{f(x,c)}{f(c,c)} \quad , \quad \beta(y) = \frac{f(c,y)}{f(c,c)} \cdot$$

تابع چگالی $f(x,y)$ در صورتی متقارن است که روابط زیر برقرار باشند:

$$\alpha(x) = \beta(x) \qquad \gamma(x,y) = \gamma(y,x) \quad \forall x,y \in D_{[a,b]} \cdot$$

همچنین تابع چگالی $f(x,y)$ درصورتی شبه‌متقارن است که رابطه زیر برقرار باشد

$$\gamma(x,y) = \gamma(y,x) \quad \forall x,y \in D_{[a,b]}$$

۳ تجزیه‌ی تابع چگالی متقارن

در این قسمت به بیان و اثبات قضیه‌ای [۴] در مورد تجزیه‌ی توابع چگالی متقارن می پردازیم.

قضیه ۳—۱ تابع چگالی $f(x,y)$ متقارن است، اگر و فقط اگر، هم، شبه متقارن و هم، همگنِ حاشیه‌ای باشد.

اثبات : با فرض این‌که تابع چگالی $f(x,y)$ متقارن است، مشاهده کردیم که هم شبه متقارن و هم همگن حاشیه ای است. برای اثبات طرف دوم قضیه با فرض این که $f(x,y)$ شبه متقارن است، از (۱) خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f_X(t) &= k\alpha(t)\int_a^b \beta(u)\gamma(t,u)du && \forall t \in [a,b] \quad (۲) \\ f_Y(t) &= k\beta(t)\int_a^b \alpha(z)\gamma(t,z)dz && \forall t \in [a,b] \quad (۳) \end{aligned}$$

با استفاده از قسمت دوم فرض قضیه ، می دانیم که $f(x,y)$ همگن حاشیه ای است . پس روابط (۲) و (۳) با یکدیگر برابرند و خواهیم داشت:

$$\alpha(t) = \beta(t)h(t) \quad \forall t \in [a,b] \tag{4}$$

که در آن

$$h(t) = \frac{\int_a^b \alpha(z)\gamma(t,z)dz}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t,u)du} \cdot \tag{5}$$

با جایگذاری (۴) در (۵) به دست می آوریم:

$$h(t) = \int_a^b \Delta(t,z)h(z)dz \quad \forall t \in [a,b] \tag{6}$$

که در آن

$$\Delta(t,z) = \frac{\beta(z)\gamma(t,z)}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t,u)du} \cdot$$

توجه کنید که

$$\begin{aligned}\int_a^b \Delta(t,z)dz &= \int_a^b \frac{\beta(z)\gamma(t,z)}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t,u)du} dz \\ &= \frac{1}{\int_a^b \beta(u)\gamma(t,u)du} \int_a^b \beta(z)\gamma(t,z)dz = 1\end{aligned}$$

اگر برای هر $t \in [a,b]$، $h(t) = L$ آنگاه (۶) حاصل می شود. چون

$$\int_a^b \Delta(t,z)dz = 1$$

اگر برای بعضی از مقادیر $t \in [a,b]$، $h(t) \neq L$ آنگاه

$$\begin{aligned}\int_a^b \Delta(t,z)h(z)dz \quad &< \quad h(x_0)\int_a^b \Delta(t,z)dz \\ &= \quad h(x_0) \qquad \forall t \in [a,b]\end{aligned} \tag{7}$$

وقتی که

$$h(x_0) = \max h(t) \quad \forall t \in [a,b] \cdot$$

بنابراین از (۷) داریم

$$\int_a^b \Delta(x_0,z)h(z)dz < h(x_0)$$

که این رابطه در تناقض با (۶) است . بنابراین به دست می آوریم که

$$h(t) = L \quad \forall t \in [a,b] \cdot$$

از رابطهٔ (۴)، $\alpha(c) = \beta(c)$ خواهیم داشت $L = 1$ پس

$$\alpha(t) = \beta(t) \quad \forall t \in [a,b],$$

بنابراین تابع چگالی $f(x,y)$ متقارن است.

۴ مثال‌ها

مثال (۴-۱): فرض کنید متغیر تصادفی (Y,X) دارای توزیع نرمال دوبعدی باشد[۲]:

$$(X,Y) \sim N_2(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$$

در آن صورت:

$$\frac{f(x,y)}{f(y,x)} = \exp\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2(1-\rho^2)}(x-y) \\ \{(\frac{1}{\sigma_1^2}-\frac{1}{\sigma_2^2})(x+y) - 2(\frac{\mu_1}{\sigma_1^2}-\frac{\mu_2}{\sigma_2^2}) - \frac{2\rho(\mu_1-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}\} \end{array}\right] \cdot$$

می توان مشاهده کرد که تابع چگالی نرمال $f(x,y)$ یک شبه متقارن بدون وابستگی به مقادیر پارامترهای $\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho$ است. این مطلب با استفاده از فرمول $\gamma(x,y)$ در رابطه‌ی (۱) و محاسبه‌ی $\gamma(y,x)$ و مشاهده‌ی برابری $\gamma(x,y)$ و $\gamma(y,x)$ قابل رؤیت است. با استفاده از قضیه (۳-۱) تابع چگالی نرمال $f(x,y)$ متقارن است، اگر و فقط اگر همگن حاشیه‌ای باشد. اما تابع چگالی نرمال $f(x,y)$ با $\mu_1 \neq \mu_2$ یا $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ متقارن نیست. بنابراین همگن حاشیه ای نخواهد بود.

مثال (۴–۲): تابع چگالی $f(x,y)$ را به صورت زیر در نظر می گیریم:[۳]

$$f(x,y) = \frac{۱}{۴۰\pi^۲}(x\sin y + ۲y\sin x + ۱۰) \quad \forall (x,y) \in D_{[-\pi,\pi]}$$
$$= ۰ \quad \forall (x,y) \notin D_{[-\pi,\pi]} \cdot$$

تابع چگالی $f(x,y)$ همگن حاشیه‌ای است با

$$f_X(t) = f_Y(t) = \frac{۱}{۲\pi} \quad \forall t \in [-\pi,\pi]$$
$$= ۰ \quad \forall t \notin [-\pi,\pi],$$

امّا،

$$f(x,y) - f(y,x) = \frac{y\sin x - x\sin y}{۴۰\pi^۲} \quad \forall (x,y) \in D_{[-\pi,\pi]} \cdot$$

ملاحظه می کنیم که تابع چگالی $f(x,y)$ متقارن نمی باشد؛ که عدم تقارن، بنا به قضیه (۳–۱) به علت فقدان شبه‌تقارن است.

۵ تابع چگالی سه بعدی

تابع چگالی سه متغیره‌ی $f(x,y,z)$ متقارن کامل است اگر

$$f(x,y,z) = f(y,z,x) = f(z,x,y) =$$
$$f(x,z,y) = f(z,y,x) = f(y,x,z) \cdot$$

تابع چگالی سه متغیره‌ی $f(x,y,z)$ همگن حاشیه‌ای است اگر همگن حاشیه‌ايِ یک بعدی و همگن حاشیه‌ايِ دوبعدی باشد و در روابط زیر صدق کند:

$$f_X(t) = f_Y(t) = f_Z(t), \qquad \text{همگن حاشیه‌ای یک بعدی}$$

$$f_{X,Y}(t,r) = f_{Y,X}(t,r), \qquad \text{همگن حاشیه‌ای دو بعدی} \cdot$$

با ارایه فرمولی برای شبه متقارن می توان قضیه (۳–۱) را در حالت سه بعدی نیز اثبات نمود.

مراجع

[1] Bishop, Y. M. M. , Fienberg, S. E., and Holland, P. W. (1975) : *Discrete Multivariate Analysis : Theory and Practice,* Cambridge, Mass : The MIT Press.

[2] Caussinus, H. (1965) : *Contribution a l'analyse ststistique des tableau-x decorrelation,* Annales de la Faculte des sciences l'Universsite de Toulouse 29, 77-182.

[3] Tong, Y. L. (1990) : *The Multivariate Normal Distribution,* New York Springer-Verlag.

[4] Tomizawa, S., Seo, T., and Minaguchi, J. (1996). *Decomposition of bivariate symmetric density function,* Calcutta Statistical Association Bulletin, 46, 129-133.