

## مولد فرایند ورود پوآسون زمان متغیر

غلامحسین شاهکار<sup>۱</sup> حامد رضا طارقیان<sup>۲</sup>

### چکیده

فرایند پوآسون اغلب فرایندی قابل قبول برای نحوه‌ی ورود است. با این وجود پذیرهی ثابت بودن نرخ ورود نسبت به زمان، همیشه برقرار نیست. در این مقاله با استفاده از روش تبدیل معکوس، مولد فرایند پوآسون زمان متغیر را با تابع نرخ ورود قطعه به قطعه خطی پیوسته تولید می‌کنیم. تابع نرخ ورود قطعه به قطعه خطی پیوسته شامل نرخ ورود قطعه به قطعه ثابت نیز هست، اما نسبت به تابع نرخ ورود ثابت انعطاف پذیرتر است؛ هر چند نیاز به محاسبات بیشتری دارد. روش تبدیل معکوس برای تولید مولد نرخ ورود قطعه به قطعه خطی پیوسته، نه تنها از کارایی لازم برخوردار است، بلکه با روشهای استقرایی کاهش واریانس نیز سازگاری دارد.

### ۱ مقدمه

فرایند ورود، یکی از اجزای مهم در شبیه‌سازی سیستم‌های گسسته است. مدلی که به منظور شبیه‌سازی الگوی ورود مورد استفاده قرار می‌گیرد، باید انطباق نزدیکی با نحوه‌ی ورود در سیستم واقعی داشته باشد [۶]. فرایند ورود پوآسونی غالباً مدل مناسبی برای نحوه‌ی ورود است و می‌توان آن را تحت شرایط مختلف پذیرفت (مثلاً [۱] و [۳] را ببینید). در یک فرایند ورود پوآسونی با میانگین  $\lambda$ ، فاصله زمانی ورود، بر توزیع نمایی با میانگین  $1/\lambda$  مبتنی است. در شبیه‌سازی سیستمهای گسسته، زمان ورود متقاضی بعدی به طور معمول در زمان ورود متقاضی جاری تعیین می‌شود. به این ترتیب که

<sup>۱</sup>دکتر غلامحسین شاهکار، گروه آمار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد  
<sup>۲</sup>حامد رضا طارقیان، گروه آمار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

می‌کنند [۵]. تولید ورودی با استفاده از روش پذیرش یا رد ساده، سریع و قابل اجرا با توابع دلخواه نرخ ورود است. این روش به صورتهای مختلف تعمیم یافته است [۹].

روش تبدیل معکوس الزاماً عملکرد کندتری ندارد، علاوه بر این در مقایسه با روش پذیرش یا رد، سازگاری بیشتری با تکنیکهای استقرایی کاهش واریانس دارد [۲]. اما تابع نرخ ورود در این روش دارای محدودیت‌هایی است. براتلی، فاکس، و شارچ برای تغییرات نرخ قطعه به قطعه ثابت، یک مولد تبدیل معکوس ارائه داده‌اند [۲]. در این مقاله تابع قطعه به قطعه خطی کلی‌تری را در نظر می‌گیریم.

## ۲ روش

فرض کنید برای یک فرایند پواسون زمان متغیر  $\lambda(t)$  نرخ آتی ورود در زمان  $t$  باشد. همان‌طور که شکل ۱ نشان می‌دهد امید ریاضی تعداد مراجعین در بازه‌ی زمانی  $(t_{i-1}, t_i)$  برابر است با

$$\Lambda(t_{i-1}, t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \lambda(t) dt, \quad (1)$$

اگر  $t_{i-1}$  زمان ورود یک متقاضی باشد، آنگاه می‌خواهیم زمان ورود متقاضی بعدی،  $T_i$  را با استفاده از روش تبدیل معکوس تولید کنیم. تابع توزیع تجمعی  $T_i$  به شرط  $t_{i-1}$  را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\begin{aligned} F_{T_i | t_{i-1}}(t_i) &= Pr\{T_i \leq t_i | T_i > t_{i-1}\} \\ &= 1 - Pr\{T_i > t_i | T_i > t_{i-1}\} \end{aligned}$$

که در آن  $Pr\{T_i > t_i | T_i > t_{i-1}\}$  احتمال عدم مراجعه در بازه‌ی زمانی  $(t_{i-1}, t_i)$  است.

چون فرایند ورود را پواسون فرض کرده‌ایم، داریم

$$F_{T_i | t_{i-1}}(t_i) = 1 - \exp[-\Lambda(t_{i-1}, t_i)] \quad (2)$$

حال می‌توان  $T_i$  را با قرار دادن

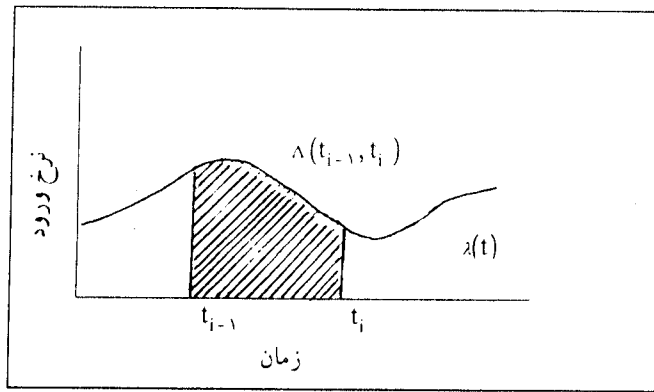
$$F_{T_i | t_{i-1}}(t_i) = u \quad (3)$$

از توزیع مناسب فاصله زمانی ورود نمونه‌ای گرفته و آن را با زمان شبیه‌سازی جاری جمع می‌کنند. حاصل جمع، زمان ورود متقاضی بعدی را به سیستم نشان می‌دهد [۸]. این روش با فرض عدم تغییر توزیع فاصله زمانی ورود نسبت به زمان قابل قبول است. اما چنانچه توزیع فرایند ورود پرسنلی نباشد و یا نرخ ورود، تابع سایر متغیرهای سیستم باشد، در این صورت مشکلات دیگری در فرایند ورود به وجود می‌آید [۹].

هر چند در این مقاله فرض معقول بودن ورود پواسونی را پذیرفته‌ایم، اما فرض کرده‌ایم که نرخ ورود با گذشت زمان تغییر می‌کند. مثلاً، هرچند مراجعه‌ی متقاضیان را به یک فروشگاه در یک دوره‌ی زمانی کوتاه، می‌توان پواسونی فرض کرد، اما باید اذعان نمود که نرخ ورود در طول روز ثابت نمی‌ماند. چنین فرایندی را فرایند پواسون ناهمگن، یا فرایند پواسون نامانا و یا فرایند پواسون زمان متغیر می‌نامند [۹]. برای شناخت انگیزه‌های استفاده از فرایند پواسون نامانا (ناهمگن) برای نحوه‌ی ورود در برخی از سیستمها و همچنین برای آشنایی با برخی از روشهای تولید ورود پواسون زمان متغیر، [۲] را ببینید.

روشهایی که به منظور تولید فرایند ورودی پواسون زمان متغیر به کار گرفته می‌شوند، غالباً شامل استفاده از چندین منبع ورود که هر یک متناظر با اوقات مختلف روز، و یا استفاده از توزیع‌های مختلف برای فواصل زمانی متفاوت است. این روشها در بهترین صورت خود تقریبی‌اند. برخی از مشکلات آماری استفاده از چنین روشهایی، در [۴] بحث شده است. آن‌جا که عموماً این روشها سرعت چندانی نداشته و فرایندهایی با خواص نامعلوم تولید می‌کنند، لذا روشهای دقیق بر آنها برتری دارند.

روشهای دقیق، تولید فرایند ورود پواسونی، زمان متغیر، شامل استفاده از روش پذیرش یا رد و روش تبدیل معکوس است [۵]. در روش اول از فرایند پواسون دیگری برای تولید ورود، و قبول یا رد آن به موجب تابع نرخ زمان متغیر استفاده



شکل ۱: نرخ ورود زمان متغیر

در عبارت (۲) و حل آن نسبت به  $t_i$  به دست آورد. در معادله (۳)،  $u$  یک عدد تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۰ و ۱ است. از معادلات (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$-\ln(1-u) = \Lambda(t_{i-1}, t_i) \quad (4)$$

که چگونگی ارتباط جواب به  $\lambda(t)$  را نشان می‌دهد.

در این مقاله، تابع ورود را پیوسته و قطعه به قطعه خطی مانند شکل (۲) در نظر می‌گیریم. تابع نرخ ورود به وسیله‌ی نقاط ابتدا و انتهای پاره‌خطها، یعنی نقاط  $(t_0, \lambda_0)$ ،  $(t_1, \lambda_1)$ ،  $(t_2, \lambda_2)$ ،  $(t_3, \lambda_3)$ ،  $(t_4, \lambda_4)$  و نظایر اینها مشخص می‌شود. هر یک از این پاره‌خطها، مثلاً زامین پاره‌خط به صورت  $(a_j t + b_j)$  است، که در آن  $a_j$  و  $b_j$  به ترتیب شیب و عرض از مبدأ هستند و به وسیله‌ی تقاطع ابتدا و انتهای  $(t_{j-1}, \lambda_{j-1})$  و  $(t_j, \lambda_j)$  محاسبه می‌شوند. تابع نرخ ورود، تابعی پیوسته و قطعه به قطعه خطی است.

بنابر معادله‌ی (۱)، در محدوده‌ی هر پاره‌خط مثلاً پاره‌خط  $k$  ام، داریم

$$\Lambda(t_{i-1}, t_i) = \int_{t_{i-1}}^{t_i} (a_k t + b_k) dt$$

یا:

$$\Lambda(t_{i-1}, t_i) = (a_k / 2)(t_i^2 - t_{i-1}^2) + b_k(t_i - t_{i-1})$$

با فرض آن که  $T_i$  در داخل این محدوده قرار دارد، با استفاده از

معادله‌ی (۴) می‌توان نوشت

$$u = 1 - \exp[-(a_k / 2)(t_i^2 - t_{i-1}^2) - b_k(t_i - t_{i-1})]$$

و برای  $a_k \neq 0$  به دست می‌آوریم

$$t_i = (-b_k + \sqrt{b_k^2 + a_k^2 t_{i-1}^2 + 2a_k b_k t_{i-1} - 2a_k \ln(1-u)}) / a_k$$

برای  $a_k = 0$ ، نرخ ورود در این بازه‌ی زمانی ثابت است، و داریم

$$t_i = t_{i-1} - \ln(1-u) / b_k$$

که به ازای تمام قطعات  $b_j = b$  و  $a_j = 0$ ، برای تعیین  $T_j$  به همان تکنیک استاندارد تبدیل معکوس برای فرایند پوآسون با نرخ ورود ثابت می‌رسیم. البته  $T_j$  می‌تواند از نقطه‌ی انتهایی پاره‌خط، مثلاً  $t_k$  تجاوز کند. توجه کنید که

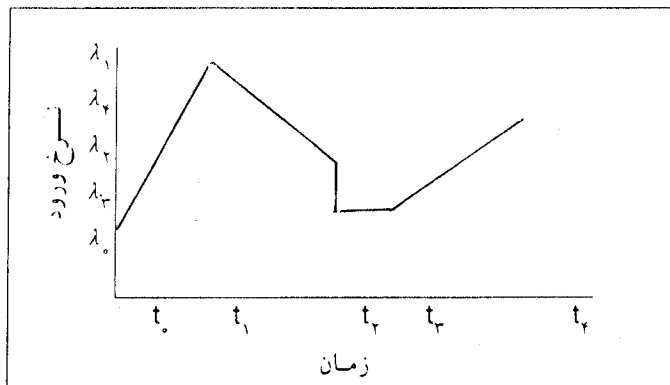
$$\Lambda(t_{i-1}, t_i) = \Lambda(t_{i-1}, t_k) + \Lambda(t_k, t_i)$$

ولذا بنابر معادله‌ی (۴)

$$-\ln(1-u) = -\ln(1-u_k) - \ln(1-u')$$

در این جا  $u_k$  مقدار  $u$  به ازاء  $t_i = t_k$  است. و از این رابطه به دست می‌آوریم

$$u' = (u - u_k) / (1 - u_k)$$



شکل ۲: یک تابع نرخ ورود قطعه به قطعه خطی

بنابراین

(۲) با فرض آن که  $t_{j-1}$  در  $k$  امین بازه قرار داشته باشد،

عبارت زیر را محاسبه می‌کنیم

$$u_k = 1 - \exp[-(a_k / 2)(t_k^2 - t_{i-1}^2) - b_k(t_k - t_{i-1})]$$

$$t_i = (-b_{k+1} + \sqrt{b_{k+1}^2 + a_{k+1}^2 t_k^2 + 2a_{k+1}b_{k+1}t_k} - 2a_{k+1} \ln(1 - u')) / a_{k+1}$$

وقتی  $a_{k+1} = 0$  است، عبارت بالا به فرایند ورود پواسون قطعه به قطعه ثابت، تقلیل می‌یابد.(۳) اگر  $u \leq u_k$ ، آنگاه، وقتی  $a_k \neq 0$  و  $a_k = 0$ ، به ترتیب از

$$t_i = (-b_k + \sqrt{b_k^2 + a_k t_{i-1}^2 + 2a_k b_k t_{i-1}} - 2a_k \ln(1 - u)) / a_k$$

و

$$t_i = t_{i-1} - \ln(1 - u) / b_k$$

برای توقف استفاده می‌کنیم.

(۴) اگر  $u > u_k$ ، آن گاه با قرار دادن

$$u = (u - u_k) / (1 - u_k),$$

$$t_{i-1} = t_k,$$

$$k = k + 1$$

و استفاده از  $u_k$  به موجب کل پاره‌خط، به مرحله (۳) باز می‌گردیم.به منظور استفاده‌ی پیاپی از الگوریتم فوق، می‌توان مقدار مطلوب  $u'$  (برابر  $u$  در مرحله (۳)) را محفوظ نگهداشته و  $u_k$ 

### ۳ الگوریتم مولد ورود

به طور کلی، برای محاسبه‌ی زمان ورود متقاضی بعدی،  $t_i$ ، ابتدا پاره‌خط مربوط را مشخص کرده، سپس زمان ورود را محاسبه می‌کنیم. برای سهولت انجام این کار، بهتر است قبل از اعمال الگوریتم تولید متغیر، ابتدا مقادیری از  $u$  را محاسبه کنیم که فواصل زمانی ورود را به اندازه‌ی طول پاره‌خط ایجاد می‌کنند، یعنی:

$$u_j = 1 - \exp[-(a_j / 2)(t_j^2 - t_{j-1}^2) - b_j(t_j - t_{j-1})].$$

حال فرایند تعیین  $T_i$  را به شرط معلوم بودن  $t_{i-1}$  به صورت زیر ارایه می‌دهیم(۱)  $u$  را به صورت نمونه‌ای از توزیع یکنواخت در بازه‌ی  $(0, 1)$  به دست می‌آوریم.

می‌کنیم. مثلاً چنانچه  $u = 0/5$ ، آنگاه:

$$T_i = (-1 + \sqrt{1 + 100(1/96) + 20(1/4)}) \\ - 20 \ln(0/5) / 10 = 1/446$$

پس فاصله‌ی زمانی تا ورود متقاضی بعدی

$$1/446 - 1/4 = 0/046$$

ساعت، یا  $2/76$  دقیقه است.

از طرف دیگر، اگر عدد تصادفی تولید شده از  $0/7878$  بزرگتر باشد، آن گاه برای تعیین احتمال باقیمانده پس از رسیدن به انتهای اولین پاره‌خط یعنی  $u$  جدید، از  $u'$  مرحله‌ی چهارم الگوریتم استفاده می‌کنیم. با فرض آن که عدد تصادفی اصلی  $0/9$  باشد، آنگاه:

$$u' = (0/9 - 0/7878) / (1 - 0/7878) = 0/5287$$

از آن جا که به ازای  $z = 2$  (ناحیه‌ی ثابت نمودار)  $u_j = 1 - e^{-16}$  از  $u'$  خیلی بزرگتر است،  $T_i$  را با استفاده از قطعه‌ی دوم به دست می‌آوریم. شیب پاره‌خط دوم صفر است، لذا از معادله‌ی ساده‌تر مرحله‌ی سوم با  $1/5 = t_{i-1}$  استفاده می‌کنیم. به صورت عددی  $T_i = 1/5 - \ln(1 - 0/5287) / 16 = 1/547$ ؛ پس در این مثال، عدد تصادفی  $0/9$  فاصله‌ی زمانی مراجعه را برابر  $0/147$  ساعت ( $8/82$  دقیقه) نشان داده است.

## ۵ نتیجه

فرایند ورود پوآسون زمان متغیر می‌تواند کاربردهای وسیعی به ویژه در آن دسته از سیستم‌های سرویس‌دهی که مراجعه بر اساس عادت و دید افراد تغییر می‌کند، داشته باشد. فرایندهای ورود زمان وابسته، در سیستم‌های تولیدی که در آن هر روزه چرخه‌ی مشخصی تکرار می‌شود نیز اتفاق می‌افتد.

تابع نرخ قطعه به قطعه خطی انعطاف‌پذیرتر از نرخ ورود قطعه به قطعه ثابت است، هر چند شامل محاسبات پیچیده‌تری

در مرحله‌ی (۲) را برابر  $u' = u'_j(k) - u_k$  قرار داد. که در آن  $u'_j(k)$  همان  $u_j$  برای کل پاره‌خط شامل  $t_{i-1}$  منهای  $u$  به  $t_{i-1}$  است.

هر چند الگوریتم فوق بر ادامه‌ی وابستگی به زمان تا آینده‌ی نامتناهی دلالت دارد، اما عملاً وابستگی زمانی به صورت چرخشی است. مانند وقتی که تابع نرخ زمان وابسته پس از هر ساعت یا هر روز تکرار می‌شود. در این حالت، فرایند تولید می‌تواند با توابع نرخ، چرخش به عقب داشته باشد.

## ۴ مثال عددی

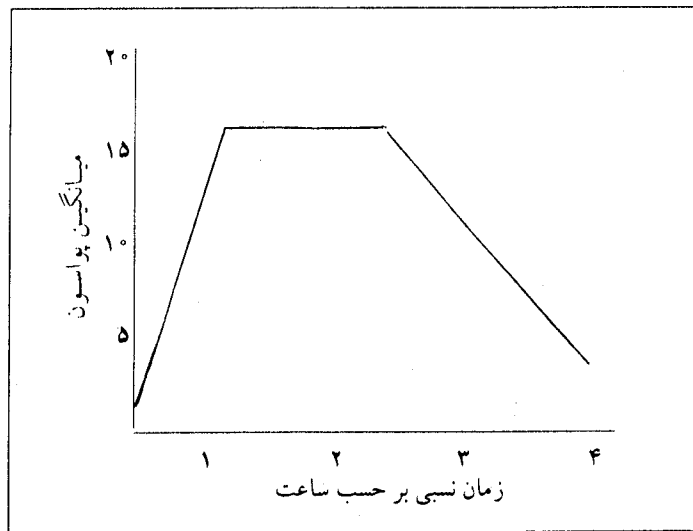
سرویس دهنده‌ای در ساعت  $10:00$  صبح ( $t_0$ ) شروع به کار کرده و تا ساعت  $14:30$  ( $t_1$ ) به کار خود ادامه می‌دهد. در آغاز کار، نرخ ورود پوآسونی ( $\lambda_0$ ) یک نفر در ساعت است، اما به تدریج افزایش یافته به طوری که در ساعت  $11:30$  به  $16$  نفر در ساعت می‌رسد ( $\lambda_1$ ). از ساعت  $12:30$  به بعد نرخ ورود سیر نزولی بخود گرفته و در ساعت  $14:30$  به  $4$  نفر در ساعت می‌رسد ( $\lambda_2$ ). نمودار نرخ ورود نسبت به زمان را در شکل (۳) نشان داده‌ایم. معادلات پاره‌خطهای شکل (۳) عبارتند از:

$$\lambda(t) = \begin{cases} 10t + 1 & 0 \leq t \leq 1/5 \\ 16 & 1/5 \leq t \leq 2/5 \\ -6t + 31 & 2/5 \leq t \leq 4/5 \end{cases}$$

فرض کنید اکنون ساعت  $11:24$  است، یعنی بر حسب ساعت شبیه‌سازی ساعت  $1/4$  است. پس از مرحله‌ی دوم الگوریتم

$$u_1 = 1 - e^{-5(2/25 - 1/96) - 0/1} = 0/7878$$

اگر عدد تصادفی بعدی کوچکتر از  $0/7878$  باشد، آنگاه برای تعیین زمان ورود متقاضی بعدی از مرحله‌ی سوم استفاده



شکل ۳: نرخ ورود در مثال عددی

روش تولید ورود پواسون زمان متغیر، با استفاده از تبدیل معکوس، نسبت به روش پذیرش یا رد، تنها در مواردی که انتگرال گیری  $\lambda(t)$  مشکل بوده، یا وقتی که فواصل زمانی رخداد وقایع، قطعات بسیاری را در بر می گیرند، کندتر است. البته باید یادآوری کنیم که روش تبدیل معکوس امکان کاهش واریانس را میسر می سازد.

است. پاره خطها را می توان از روی برآوردهای گذشته ی نرخ ورود پواسون در فواصل کوتاه به دست آورد. هرچند اشکال پیچیده تر تابع نرخ ورود قابل ارایه است، اما برآورد آنها کمتر قابل استفاده است و چنین به نظر می رسد که تابع قطعه به قطعه عملیاً بهترین مصالحه را بین انعطاف پذیری و کاربردی بودن فراهم می آورد.

## مراجع

- [1] Albin, S. L. , *On the Poisson Approximations for Super Arrival Processes in Queues*, Management Science , 28, (1982), 126-137.
- [2] Bartly, P. , Fox, B. L. , and Scharge, L. E. , *A Guide to Simulation*, Springer-Verlag, New York (1983).
- [3] Cinlar, E. , *Superposition of Point Processes. In Stochastic Point Process : Statistical analysis , theory and applications*, Wiley, New York (1972), 549-606.
- [4] Kamminsky, F. L. and Rumpf, D. L. , *Simulation Nonstationary Poisson Processes: a comparison of alternatives including the correct approach*, Simulation, 29:1, (1977), 17-20.
- [5] Law, A. M. and Kelton W. D. , *Simulation Modeling and Analysis*, 2nd ed., New York, McGraw-Hill (1991).

- [6] Leemis, L. , *Seven Habits of Highly Successful Input Modelers*, Proceedings of the 1997 Winter Simulation Conference, (1997), ed. S. Andradottir et al.
- [7] Lewis, P. A. W. and Shedler, G. S. , *Simulation of Nonhomogeneous Processes by Thinning*, Naval Research Logistics Quarterly, 26, (1979), 403-414.
- [8] Pidd, M. , *Computer Simulation in Management Science*, 4th ed., John Wiley & Sons, (1998).
- [9] Schmeiser, B. W. , *Random Variate Generator: a survey. In Simulation with Discrete Models: A State-of-the-Art view*, From the 1980 Winter Simulation Conference, Institute of Electrical and Electronics Engineering, Inc, New York, (1980), 79-104.

خلاصه وضعیت چاپ مقاله در ۷ نشریه علمی آمار

نام نشریه	سال	تعداد مقالات چاپ شده	میانگین مدت پذیرش (ماه)	میانگین مدت چاپ (ماه)	انحراف معیار پذیرش (ماه)	انحراف معیار چاپ (ماه)
The Annals of Statistics	۱۹۹۰-۱۹۹۳	۶۷۹	۱۹	۳۲	۱۱	۱۱
Applied Statistics	۱۹۹۰-۱۹۹۴	۲۰۹	۱۸	۱۱	۱۱	۱۲
Journal of ASA	۱۹۹۰-۱۹۹۵	۲۶۲	۱۵	۲۷	۹	۹
Journal of Business and Economics Statistics	۱۹۹۰-۱۹۹۵	۲۶۲	۱۵	۲۳	۸	۸
Psychometrika	۱۹۸۹-۱۹۹۶	۲۶۹	۱۵	۲۹	۱۱	۱۲
The American Statistics	۱۹۹۰-۱۹۹۴	۲۸۸	۱۱	۲۱	۷	۸
Journal of Computational and Graphical Statistics	۱۹۹۴-۱۹۹۵	۴۵	۱۱	۱۸	۵	۶

نقل از مقاله:

” Publication Delays in Statistics Journals ”

E. T. Bradlow, H. Wainer, Chance, Vol. II-No. 1 (1998)