ایجاد روشهای مقدماتی در استنباط توزیع گاما

تاکِمی یاناگیموتو   اِیْجی یاماموتو

ترجمه:

ناهید سنجری فارسی پور[۱]
مریم شریف دوست[۲]

چکیده

هدف از این مقاله، ایجاد یک سری از برآوردگرها و آزمون‌ها در مسائل یک یا دو نمونه‌ای در توزیع گاما با استفاده از تابع زیان کولبک–لایبلر است. تعدادی از این برآوردگرها و آماره‌های آزمون‌ها، برای اولین بار در این مقاله معرفی می‌شوند. در حالتی که توزیع گاما به توزیع نرمال تقریب زده شود، برآوردگرها و آزمون‌های معروفی به‌دست می‌آیند. دیده می‌شود که برآوردگر حداکثر درستنمایی شرطی پارامتر پراکندگی، نقش مهمّی را ایفا می‌کند.

۱ مقدمه

هدف اصلی تجزیه و تحلیل داده‌هایی که اغلب مثبت هستند، استنباط در مورد میانگین و پراکندگی جامعه است. اگر داده‌های مثبت را بتوان با توزیع نرمال تقریب زد، روشهای استانداردفراوانی را تحت این فرض می توان به‌کار برد. امّا وقتی که فرض نرمال مورد سؤال باشد، و یا وقتی ضریب پراکندگی کوچک نباشد، نیاز به ارایه یک روش، ضروری بوده که در این مقاله، روشهای مربوط برای توزیع گاما مورد بحث قرار می‌گیرد.

توزیع گاما دارای خواص مطلوبی است که یکی از مهمترین آنهااین‌است که میانگین نمونه، برآورد حداکثر درستنمایی میانگین جامعه است، و خاصیت حداکثر بی نظمی آن نیز بسیار جذّاب است.[۱۰]

[۱] دکتر ناهید سنجری فارسی‌پور، بخش آمار دانشگاه شیراز
[۲] مریم شریف‌دوست، دانشجوی کارشناسی ارشد آمار دانشگاه شیراز

توزیع گاما $Ga(\mu,\theta)$ را با تابع چگالی زیر

$$P(x;\mu,\theta)=\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\theta})}\frac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{(\mu\theta)^{\frac{1}{\theta}}}e^{\frac{-x}{\mu\theta}} \tag{1}$$

وقتی که پارامترهای μ و θ نشان‌دهندهٔ میانگین و ضریب پراکندگی باشند در نظر می‌گیریم. با توجه به این‌که ماتریس اطّلاع فیشر آنها قطری است، این دو پارامتر بر هم عمود بوده[۳] و پارامتری کردن توزیع ، متناظر با مدل نمایی بوده[۹] و برای محاسبه‌ی برآوردگرها مناسب است [۱۸].

فرض کنید که متغیرتصادفی X دارای توزیع $Ga(\mu,\theta)$ باشد و همچنین فرض کنید که θ کوچک باشد. پس $\frac{X}{\mu}$ تقریباً دارای توزیع نرمال با میانگین یک و واریانس θ است. این تقریب به نرمال، به‌وسیله‌ی تقریب ویلسن—هیلفرتی ثابت شده است. بنابراین، وقتی که θ به اندازه‌ی کافی کوچک باشد، توزیع نرمال یک نامزد مناسب برای جانشینی خواهد بود.
علیرغم تحقیقات زیادی که بر روی استنباط $\gamma=\frac{1}{\theta}$ و $\lambda=\mu\theta$ انجام گرفته است، به روشهای مقدماتی بر استنباط میانگین توزیع گاما توجه نشده است. گریس و بین[۷]، شیو و بین[۱۵] و همچنین جنسن[۸] آزمون $\mu=\mu_0$ در مسائل یک نمونه‌ای و $\mu_1=\mu_2$ در مسائل دونمونه‌ای را ارایه داده‌اند.

استنباط در مورد θ، در ارتباط با واریانس توزیع نرمال، توسعه یافته است. همچنین آزمون نسبت درستنمایی، بر اساس درستنمایی شرطی به عنوان پرتوان‌ترین آزمون به طور یکنواخت، شبیه به آزمون شوراک[۷] مطرح گردیده، به عبارت دیگر، برآوردگر خانواده θ، یک برآوردگر حداکثر درستنمایی ماکزیمم است. امّا یاناگیموتو[۱۸]، برتری برآوردگر حداکثر درستنمایی شرطی را بر برآوردگرهای حداکثر درستنمایی غیر شرطی ادّعا می‌کند. این برآوردگرها و آزمون‌ها، جداگانه بر اساس اصول مختلف معرّفی شده‌اند. بنابراین ارایه یک سری از روشهای مقدماتی برای استنباط در مورد μ و θ به‌طور اصولی، مفید خواهد بود. این روشها، برآورد حداکثر درستنمایی شرطی را برای θ نیز شامل می‌شود.

هدف از این مقاله، ایجاد برآوردگرها و آزمون‌های آماری، با استفاده از تابع زیان کولبک—لایبلر است. در واقع استخراج یک آزمون برای میانگین (μ) در حالت یک نمونه‌ای و برابری میانگین‌ها در دو جامعه با توزیع گاما و θ نامشخص، هدف اصلی این مقاله است.

خواص مفید تابع زیان کولبک—لایبلر در بخش دو، مرور و بسط داده شده است. روشهای استنباطی برای مسائل یک نمونه‌ای در بخش سه و برای مسائل دو نمونه‌ای در بخش چهار مطرح شده است. در بخش پنج، دقت تقریبها برای مقادیر بحراني به‌کار گرفته شده در آزمونها، بحث و چند تذکر نیز در بخش آخر داده شده‌است.

۲ تابع زیان کولبک—لایبلر

خواصّی از تابع زیان کولبک—لایبلر عنوان می‌شود که در ایجاد روشهای مقدماتی استنباط μ و θ در یک روش اصولی مناسب است.

فرض کنید $x_1,\ldots,x_n$ یک نمونه به حجم n از یک جامعه با تابع چگالی $P(x;\mu,\theta)$ باشد. برآوردگر $\hat{\mu}$ برای میانگین μ را درنظر گرفته، تابع زیان کولبک—لایبلر به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{aligned} &KL_n(\hat{\mu};\mu,\theta)\\ &=2\int\log\frac{\prod P(z_i;\hat{\mu},\theta)}{\prod P(z_i;\mu,\theta)}\prod P(z_i;\hat{\mu},\theta)\prod dz_i\\ &=n\,KL(\hat{\mu};\mu,\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

که مضرب ۲ برای سادگی در مقایسه‌ی آزمون نسبت درستنمایی اضافه شده است. با در نظر گرفتن تابع چگالی گاما در (۲) ، تابع زیان به صورت زیر بیان می‌شود.

$$KL_n(\hat{\mu};\mu,\theta)=\frac{2n}{\theta}\left(\frac{\hat{\mu}}{\mu}-1-\log\frac{\hat{\mu}}{\mu}\right) \tag{3}$$

تابع فوق توسط براون[۲] به عنوان یک نوع نمونه‌ای برای برآوردگر میانگین توزیع‌های مثبت عنوان شده‌است. واضح است که $KL_n(\hat{\mu},\mu,\theta)$ با برآوردگر حداکثر درستنمایی $\hat{\mu}$ برای

یک توزیع از خانواده‌ی نمایی مساوی با دو برابر لگاریتم آماره‌ی آزمون نسبت حداکثر درستنمایی است، به عبارت دیگر:

$$KL_n(\hat{\mu},\mu,\theta) = ۲\log\frac{\prod P(x_i,\hat{\mu},\theta)}{\prod P(x_i,\mu,\theta)} \qquad (۴)$$

تابع فوق دارای خاصیتهای خوب زیادی است، به عنوان مثال مانند تابع زیان درجه ۲ در توزیع نرمال عمل می کند. مهمترین خاصیت این است که :

$$\begin{aligned}\sum_i KL(x_i,\mu,\theta) &= nKL(\bar{x},\mu,\theta) + \sum_i KL(x_i,\bar{x},\theta)\\ &= \frac{۲n}{\theta}(\frac{\bar{x}}{\mu} - ۱ - \log\frac{\bar{x}}{\mu}) + \sum_i \frac{۲}{\theta}(\frac{x_i}{\bar{x}} - ۱ - \log\frac{x_i}{\bar{x}}) \qquad (۵)\\ &= \frac{۲n}{\theta}(\frac{\bar{x}}{\mu} - ۱ - \log\frac{\bar{x}}{\mu}) + \frac{۲n}{\theta}\log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}\end{aligned}$$

که $\bar{x}$ میانگین حسابی و $\tilde{x}$ میانگین هندسی هستند. یادآوری می‌شود که $\bar{x}$ و $\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}$ از هم مستقلند.

برای آسانی در نمادگذاری رابطه‌ی (۵) را به صورت $TKL(\mu,\theta) = AKL(\mu,\theta) + RKL(\theta)$ نوشته و می‌گوییم که تغییرات کلّ برابر با تغییرات میانگین به‌اضافه‌ی باقیمانده است.

تجزیه‌ی تابع زیان برای دیگر توزیعها مانند توزیعهای نرمال و گاوسی معکوس نیز برقرار است. برای توزیع نرمال $N(\mu,\sigma^۲)$ با میانگین μ و واریانس $\sigma^۲$ و توزیع گاوسی معکوس $IG(\mu,\theta)$ با تابع چگالی زیر:

$$\sqrt{\frac{۱}{۲\pi\theta x^۳}}\ \exp\left(\frac{-(x-\mu)^۲}{۲\theta\mu^۲ x}\right)$$

تابع زیان کولبک–لایبلر به ترتیب $n\frac{(\hat{\mu}-\mu)^۲}{\sigma^۲}$ و $\frac{n}{\theta\mu}(\frac{\hat{\mu}}{\mu} + \frac{\mu}{\hat{\mu}} - ۲)$ هستند. در این توزیعها، هیچ مشکلی در ایجاد روشهای مقدماتی برای استنباط پارامترهای میانگین و پراکندگی نیست. چون هر جمله در تجزیه‌ی متناظر با (۵) دارای توزیع خی–دو خواهد بود. در توزیع گاما نیز هر جمله دارای یک توزیع تقریبی خی–دو است. بنابراین در صورت نیاز، روشهای مقدماتی با استفاده از تقریب خی–دو متناسب ساخته می‌شود.

۳ روشهای مطرح شده در مسائل یک نمونه‌ای

در این بخش، تمامی برآوردگرها و آزمونهای آماری از تابع زیان کولبک–لایبلر ناشی می‌شوند. مجدّداً تأکید می‌گردد که روشهای ارایه شده، تنها در ارتباط با روشهای استاندارد دو جمعیت نرمال هستند. در حقیقت هدف، جایگذاری توزیع گاما با توزیع نرمال در تابع زیان کولبک–لایبلر بوده، به‌علاوه، توزیع برآوردگرها یا آزمون فرضها، مشابه یکدیگرند که تمامی این روشها در جدول (۱) جمع آوری شده‌اند.

در این بخش، بر روی نتایج استخراج شده، بهترین آنها و بیانهای دیگری از آنها تمرکز نموده و از تقریبهایی که دقّت آنها بعداً در بخش ۵ بحث می‌شود، استفاده می‌کنیم. برای α (سطح معنی‌دار بودن)، مقادیر ۰/۱ ، ۰/۰۵ یا ۰/۰۱ در نظر گرفته شده است .

مسأله ۱ – برآورد μ

پارامتر μ با حداقل کردن

$$TKL(\mu,\theta) = \sum\frac{۲n}{\theta}(\frac{x_i}{\mu} - ۱ - \log\frac{x_i}{\mu})$$

یا بطور معادل با حداقل کردن $AKL(\mu,\theta)$ برآورد می‌شود و $\hat{\mu} = \bar{x}$ را نتیجه می‌دهد که مستقل از θ بوده و برآوردگر حداکثر درستنمایی است.

مسأله ۲ – برآورد θ

پارامتر θ با حل معادله‌ی

$$RKL(\theta) = E(RKL(\theta)) = \frac{۲n}{\theta}\{\xi(\theta) - \xi(\frac{\theta}{n})\}$$

وقتی که $\xi(\theta) = -\psi(\frac{۱}{\theta}) - \log\theta$ و $\psi(\cdot)$ تابع دی–گاما است، برآورد می‌شود. این برآوردگر، برآوردگر حداکثر درستنمایی شرطی به شرط میانگین نمونه $\bar{x}$ است.

جدول ۱: مقایسه‌ی روشهای ارایه شده در توزیع گاما با روشهای استاندارد متناظر در توزیع نرمال

مسأله*	مدل گاما		مدل نرمال	
	آماره	توزیع	آماره	توزیع
۱– برآورد μ	$\bar{x}$	$Ga(\mu, \frac{\theta}{n})$	$\bar{x}$	$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$
۲– برآورد θ	$\xi(\hat{\theta}) - \xi(\frac{\hat{\theta}}{n}) = \log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}$	$\theta c\chi^2_f$	$^{\dagger}\hat{\sigma}^2 = s^2$	$\frac{\sigma^2\chi^2_{n-1}}{n-1}$
۳– آزمون $\mu = \mu_0$ θ معلوم	$\frac{2n}{\theta}(\frac{\bar{x}}{\mu_0} - 1 - \log\frac{\bar{x}}{\mu_0})$	$c\chi^2_1$	$\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\sigma^2}$	χ^2_1
۴– آزمون $\mu = \mu_0$ θ نامعلوم	$\frac{2n}{\hat{\theta}}(\frac{\bar{x}}{\mu_0} - 1 - \log\frac{\bar{x}}{\mu_0})$	ct^2_f	$\frac{n(\bar{x}-\mu_0)^2}{\hat{\sigma}^2}$	t^2_{n-1}
۵– آزمون $\theta = \theta_0$	$\frac{2n}{\theta_0}\log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}$	$c\chi^2_f$	$\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2_0}$	χ^2_{n-1}
۶– برآورد $\mu = \mu_1 = \mu_2$	$\bar{z} = \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$	$Ga(\mu, \frac{\theta}{n+m})$	$\frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$	$N(\mu, \frac{\sigma^2}{n+m})$
۷– برآورد $\theta = \theta_1 = \theta_2$	$(n+m)\xi(\hat{\theta}) - n\xi(\frac{\hat{\theta}}{n}) - m\xi(\frac{\hat{\theta}}{n})$ $= n\log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}} + m\log\frac{\bar{y}}{\tilde{y}}$	$\theta c\chi^2_f$	$\hat{\sigma}^2 = \frac{(n-1)s^2_x+(m-1)s^2_y}{n+m-2}$	$\frac{\sigma^2\chi^2_{n+m-2}}{n+m-2}$
۸– آزمون $\mu_1 = \mu_2$ θ معلوم	$\frac{2(n\log\frac{\bar{x}}{\bar{z}}+m\log\frac{\bar{y}}{\bar{z}})}{\theta}$	$c\chi^2_1$	$\frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\sigma^2}$	χ^2_1
۹– آزمون $\mu_1 = \mu_2$ θ نامعلوم	$\frac{2(n\log\frac{\bar{x}}{\bar{z}}+m\log\frac{\bar{y}}{\bar{z}})}{\hat{\theta}}$	ct^2_f	$\frac{(\bar{x}-\bar{y})^2}{(\frac{1}{n}+\frac{1}{m})\hat{\sigma}^2}$	t^2_{n+m-2}
۱۰– آزمون $\theta_1 = \theta_2$	$\frac{(n\log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}})/(n-1)}{(m\log\frac{\bar{y}}{\tilde{y}})/(m-1)}$	cF_{f_1,f_2}	$\frac{s^2_x}{s^2_y}$	$F_{n-1,m-1}$

* : در مدل نرمال $\sigma^2 = \theta$

† : $s^2 = \sum(x_i - \bar{x})^2/(n-1)$

مسأله ۳ – آزمون $H_0 : \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1 : \mu \neq \mu_0$ با θ معلوم

ناحیه‌ی رد به‌وسیله‌ی

$$ARL(\mu_0, \theta) = \frac{2n}{\theta}\{\frac{\bar{x}}{\mu_0} - 1 - \log\frac{\bar{x}}{\mu_0}\} > C_0$$

برای مقدار مناسب C_0 به‌دست می‌آید. این، همان آزمون نسبت درستنمایی است. در صورتی که $\alpha = 0/05$ یا $\alpha = 0/1$ و $\frac{n}{\theta}$ بزرگتر از ۱ باشد و یا اگر $\alpha = 0/01$ یا $\alpha = 0/05$ و یا $\alpha = 0/1$ و $\frac{n}{\theta}$ بزرگتر از ۳ باشد، مقدار بحرانی به‌وسیله‌ی $C_0 = \{\frac{2n}{\theta}\xi(\frac{n}{\theta})\}\chi^2_1(1-\alpha)$ تقریب زده می‌شود. یادآوری می‌گردد که محاسبه‌ی این مقدار بحرانی، در صورت باز مشکل نیست.

مسأله ۴ — آزمون $H_0 : \mu = \mu_0$ در مقابل $H_1 : \mu \neq \mu_0$ با θ نامعلوم

ناحیه‌ی رد به‌وسیله‌ی

$$AKL(\mu,\hat{\theta}) = \frac{2n}{\hat{\theta}}\{\frac{\bar{x}}{\mu_0} - 1 - \log\frac{\bar{x}}{\mu_0}\} > C_\alpha(\theta)$$

وقتی که $\hat{\theta}$ برآورد θ در مسأله ۲، یعنی برآوردگر حداکثر درستنمایی شرطی باشد، به‌دست می‌آید. در توزیع گاما، متفاوت از توزیع نرمال ، مقدار $C_\alpha(\theta)$ بر اساس پارامتر نامعلوم θ است؛ که توسط مقدار $C_\alpha(\theta) = (\frac{2n}{\theta})\xi(\frac{\theta}{n})t^2_{f(\theta)}(1-\frac{\alpha}{2})$ تقریب‌زده می‌شود، و درجه‌ی آزادی آن برابر است با $f(\theta) = 2n(\xi'(\theta) - \frac{\xi'(\frac{\theta}{n})}{n})$.

یک روش برای تخمین مقدار بحرانی، این‌است که θ را با $\hat{\theta}$ جایگزین کنیم. روش عملی دیگر، انتخاب مقدار ثابت مناسب برای θ است. البته وقتی انتظار می‌رود که θ کوچک باشد، $f(\theta) = f(0) = n - 1$ را قرار می دهیم. چنین حدس مناسبی برای θ مفید به‌نظر می‌رسد. همانطوری که بعداً بحث خواهد شد، $t^2_{f(\theta)}(1-\alpha)$ نسبت به تغییرات $f(\theta)$ حساس نیست و $f(\theta)$ بر حسب θ، به آهستگی تغییر می‌کند.

این آزمون که برای نخستین بار ارایه شده است، دارای آماره‌ی آزمون $2\log\frac{\prod P(x_i;\hat{\mu},\hat{\theta})}{\prod P(x_i;\mu_0,\hat{\theta})}$ است. توجه داشته باشید که ناحیه‌ی رد براساس آزمون درستنمایی معمولی متفاوت از ناحیه‌ی رد فوق است. ولی این‌دو ناحیه‌ی رد، در جوامع نرمال یکسان هستند. ممکن است که برای تأکید بر آزمون t در جامعه‌ی نرمال، این آزمون را ، آزمون t^2 میانگین در جامعه‌ی گاما بنامیم. یک آزمون شبیه به مراحل فوق توسط جنسن و آزمون یک‌طرفه‌ی آن توسط گریس و بین پیشنهاد شده است که در بخش آخر به‌طور مختصر در مورد آنها بحث خواهد شد.

مسأله ۵ — آزمون $H_0 : \theta = \theta_0$ در مقابل $H_1 : \theta > \theta_0$

ناحیه‌ی رد به‌وسیله‌ی $RKL(\theta_0) = \frac{2n}{\theta_0}\log(\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}) > C_\alpha$ برای یک مقدار مناسب C_α بدست می‌آید. این آزمون، پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت (UMP)، شبیه به آزمون شوراک است. در صورتی که مقدار تعدیلی درجه‌ی آزادی f به‌صورت

$$f = \frac{2n\{\xi(\theta_0) - \xi(\frac{\theta_0}{n})\}^2}{\theta^2\{\xi'(\theta_0) - \xi'(\frac{\theta_0}{n})/n\}}$$

باشد، بین و اینجل‌هارت[1] با استفاده از اولین و دومین گشتاور $RKL(\theta_0)$، یک مقدار تقریبی برای C_α به صورت $\frac{2n}{\theta_0}\{\xi(\theta_0) - \xi(\frac{\theta_0}{n})\}\chi^2_f(1-\alpha)/f$ به‌دست آوردند. این تقریب برای $n \geq 10$ و $\theta_0 \leq 2$ دقت کافی را دارا است.

۴ روشهای مطرح شده در مسائل دو نمونه‌ای

قبل از بیان روشهای پیشنهادی در مسائل دونمونه‌ای. یک تجزیه‌ی متعامد تابع زیان متناظر با (۵) معرفی می‌گردد. فرض کنید که $x_1, x_2, \ldots, x_n$ و $y_1, y_2, \ldots, y_m$ نمونه‌هایی به حجم n و m از جامعه‌های گاما به ترتیب $P(x,\mu_1,\theta)$ و $P(y,\mu_2,\theta)$ باشند، آنگاه رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\begin{aligned}
&\sum KL(x_i;\mu,\theta) + \sum KL(y_i;\mu,\theta)\\
&\quad = (n+m)KL(\bar{z},\mu,\theta)\\
&\qquad + \{nKL(\bar{x},\bar{z},\theta) + mKL(\bar{y},\bar{z},\theta)\}\\
&\qquad + \{\sum KL(x_i,\bar{x},\theta) + \sum KL(y_i,\bar{y},\theta)\}\\
&\quad = \frac{2(n+m)}{\theta}(\frac{\bar{z}}{\mu} - 1 - \log\frac{\bar{z}}{\mu})\\
&\qquad + \frac{2}{\theta}(n\log\frac{\bar{x}}{\bar{z}} + m\log\frac{\bar{y}}{\bar{z}})\\
&\qquad + \frac{2}{\theta}(n\log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}} + m\log\frac{\bar{y}}{\tilde{y}})
\end{aligned} \tag{6}$$

وقتی که $\bar{z} = \frac{n\bar{x}+m\bar{y}}{n+m}$ باشد رابطه‌ی (۶) را می‌توان به‌صورت $TKL(\mu,\theta) + AKL(\mu,\theta) + BKL(\theta) + RKL(\theta)$ نوشت، که سومین جمله از طرف راست را به صورت $RKL_X(\theta) + RKL_Y(\theta)$ در نظر می‌گیریم. در مقایسه با تجزیه معمول ANOVA، این جملات به‌صورت تغییرات کل،

میانگین بین نمونه‌ها و باقی‌مانده در نظر گرفته می‌شوند، که این چهار جمله‌ی طرف راست دوبه‌دو مستقلند. این تجزیه می‌تواند برای مسائل k نمونه‌ای نیز بسط داده شود. امّا در اینجا در مورد مسائل بیشتر از دو نمونه بحث نمی‌گردد.

مسأله ۶ — برآورد $\mu = \mu_1 = \mu_2$

پارامتر μ تحت فرض $\mu = \mu_1 = \mu_2$ به‌وسیله‌ی حداقل کردن $TKL(\mu, \theta)$ یا به‌طور معادل $AKL(\mu, \theta)$ برآورد می‌شود و $\hat{\mu} = \bar{z}$ را نتیجه می‌دهد. این، همان حداکثر برآوردگر درستنمایی است.

مسأله ۷ — برآورد θ

برآوردگر θ که در هر دو نمونه مشترک باشد به‌وسیله‌ی

$$RKL(\theta) = E(RKL(\theta))$$
$$= \frac{2n}{\theta}\{\xi(\theta) - \xi(\theta/n)\} + \frac{2m}{\theta}\{\xi(\theta) - \xi(\theta/m)\}$$

به‌دست می‌آید. این برآوردگر، برآوردگر حداکثر درستنمایی شرطی به شرط میانگینهای $\bar{x}$ و $\bar{y}$ است.

مسأله ۸ — آزمون $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ در مقابل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ با θ معلوم

ناحیه‌ی رد بوسیله‌ی $BKL(\theta) > C_\alpha$ بدست می‌آید که همان آزمون نسبت درستنمایی است. مقدار بحرانی به شرط آن که $\frac{m}{\theta}$ و $\frac{n}{\theta}$ بزرگتر از ۱ باشند به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$C_\alpha = b(\theta, n, m)\chi^2_1(1-\alpha)$$
$$b(\theta, n, m) = \frac{2}{\theta}\{n\xi(\frac{\theta}{n}) + m\xi(\frac{\theta}{m}) - (n+m)\xi(\frac{\theta}{n+m})\}$$

مسأله ۹ — آزمون $H_0 : \mu_1 = \mu_2$ در مقابل $H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$ با θ نامعلوم

ناحیه‌ی رد به‌وسیله‌ی $BKL(\theta) > C_\alpha(\theta)$ بدست می‌آید که $C_\alpha(\theta)$ برابر است با $C_\alpha(\theta) = b(\theta, n, m)t^2_{f(\theta)}(1-\alpha/2)$ و $f(\theta) = K_n(\theta) + K_m(\theta)$؛ که $K_n(\theta)$ همان $f(\theta)$ در مسأله‌ی ۴ است. $C_\alpha(\theta)$ به θ بستگی دارد و لذا می‌توان برای θ نامعلوم به همان صورتی که در مسأله‌ی ۴ عمل شد، رفتار نمود. آماره‌ی آزمون، همانند مسأله‌ی ۴، از آزمون نسبت درستنمایی ناشی شده است و آزمون دونمونه‌ای برای تساوی میانگینها در عمل از اهمیت به‌سزایی برخوردار است. این آزمون را می‌توان آزمون t^2 دونمونه‌ای در جامعه‌ی گاما نامید. یک آزمون مشابه توسط جنسن پیشنهاد شده است و آزمون دیگری نیز توسط شو و بین ارایه گردیده است.

مسأله ۱۰ — آزمون $H_0 : \theta_1 = \theta_2$ در مقابل $H_1 : \theta_1 > \theta_2$

در این مسأله، فرض می‌کنیم که دو نمونه از جامعه‌ی گاما به‌صورت $Ga(\mu_1, \theta_1)$ و $Ga(\mu_2, \theta_2)$ باشند. ناحیه‌ی رد به‌وسیله‌ی $\frac{RKL_X(\theta)/(n-1)}{RKL_Y(\theta)/(m-1)} > C_{\alpha(\theta)}$ برای یک مقدار مناسب $C_{\alpha(\theta)}$ به‌دست می‌آید. این آزمون با آماره‌ی نسبت درستنمایی شرطی براساس $\bar{x}$ و $\bar{y}$ یکسان بوده و پرتوان‌ترین آزمون به‌طور یکنواخت است. مقدار بحرانی به‌وسیله‌ی $C_{\alpha(\theta)} = F_{f_1(\theta), f_2(\theta)}(1-\alpha)$ تقریب زده می‌شود به شرط آنکه درجه‌ی آزادی تطبیقی $f_1(\theta)$ به صورت زیر باشد.

$$f_1(\theta) = \frac{2n\{\xi(\theta) - \xi(\theta/n)\}^2}{\theta^2\{\xi'(\theta) - \xi'(\theta/n)/n\}} \qquad (7)$$

$f_2(\theta)$ نیز با جایگذاری m به جای n در (۷) به‌دست می‌آید.

۵ دقّت تقریبها

در دو فصل قبل از تقریبهای متعددی برای به‌دست آوردن مقادیر بحرانی در آزمونها استفاده کردیم. در مورد تقریبهای مسائل ۳، ۴، ۵ و ۱۰ جداگانه بحث خواهد شد. واضح است که لگاریتم آزمون نسبت درستنمایی، توزیع تقریبی خی–دو

دارد. دقت تقریبها، به‌صورت دقیق توسط تطبیق با اولین و دومین گشتاور $c\chi^2_d$ با انتخاب c و d مناسب به‌دست می‌آید. این مقادیر تطبیقی معمولاً به مقادیر تطبیقی بارتلت بر می گردند. در تمام حالات ، دقت، هم به n و هم به θ بستگی دارد و وقتی که n و یا $\frac{1}{\theta}$ افزایش یابد، دقت زیاد می‌شود.

در مسأله ۳، توزیع $AKL(\mu,\theta)$ تابعی از $\frac{1}{n\gamma} = \frac{\theta}{n}$ است. تقریب پیشنهادی توسط تطبیق با گشتاور اول به‌دست می‌آید. خوشبختانه این تقریب در جدول (۲) دقیقاً دیده می‌شود. شرطهای $۱ \le \frac{\theta}{n}$ و $۰/۳۳ \le \frac{\theta}{n}$ دقت کافی را به ترتیب برای $\alpha = ۰/۰۵$ و $\alpha = ۰/۰۱$ می‌دهد.

جدول ۲: $P(AKL(\mu,\theta) > c\chi^2_1(۱-\alpha))$ وقتی $X_i \sim Ga(\mu,\theta);\ \ i = ۱..n$، و فاکتور تطبیق بارتلت $c = \frac{۲n}{\theta}\xi(\theta/n)$

$\frac{\theta}{n}$	α		
	۰/۱	۰/۰۵	۰/۰۱
۰/۲	۰/۱۰۰۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۰۹۹۷
۰/۲۵	۰/۱۰۰۰	۰/۰۵۰۰	۰/۰۰۹۹۵
۰/۳۳	۰/۱۰۰۰	۰/۰۴۹۹	۰/۰۰۹۹۲
۰/۵	۰/۱۰۰۱	۰/۰۴۹۹	۰/۰۰۹۸۰
۱/۰	۰/۱۰۰۱	۰/۰۴۹۳	۰/۰۰۹۲۱
۲/۰	۰/۰۹۹۴	۰/۰۴۷۰	۰/۰۰۷۷۱

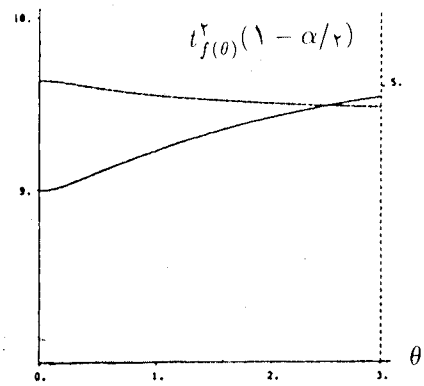
به نظر می رسد که مقدار بحرانی در مسأله ۴، یا به‌صورت معادل در مسأله ۹، دقت کمتری نسبت به سایر مقادیر دارند. در مجموع، این مسائل، مهمترین مسائل عملی هستند و ارزش یافتن دقت واقعی را دارند. در این مقاله به‌وسیله‌ی شبیه‌سازی، مطالعاتی را برای تعیین دقت انجام داده، که زمینه‌ساز مناسبی برای تعیین آماری آزمون و تقریب آن می‌باشد. یک حقیقت قابل توجه این است که $\hat{\theta}$ داده شده در مسأله ۲ اریبی کمی دارد[۱۸] و نتایج شبیه‌سازی اریبی $\hat{\theta}$ که در جدول (۳) ارایه گردیده، نشان می‌دهد که اریبی نسبی، کمتر از ۲٪ برای $n \ge ۱۰$ است. توجه داشته باشید که اریبی نسبی در برآورد حداکثر درستنمایی غیر شرطی $\frac{1}{\theta}$ بسیار بزرگتر از برآوردگر ما از θ است. نظریه حدی معمول $\hat{\theta}$، به واریانس تقریبی $\frac{۲\theta^2}{f(\theta)}$ با $f(\theta) = ۲n(\xi'(\theta) - \xi'(\theta/n)/n)$ منجر می‌شود که صورت کسر تقریباً $\frac{۲n}{\theta}\xi(\theta/n)\chi^2_1$ و مخرج کسر $\chi^2_{f(\theta)}$ است و با دانستن استقلال هر دو جمله، تقریب پیشنهادی فصل قبل را به‌دست می‌آوریم.

جدول ۳: میانگین و واریانس $\frac{\hat{\theta}}{\theta}$ برآوردشده با ۱۰۰۰۰ تکرار، آخرین ستون، تقریب واریانس را که به نظریه‌ی تقریبی معمولی منتهی می شود، نمایش می دهد.

n	θ	$E(\hat{\theta}/\theta)$	$V(\hat{\theta}/\theta)$	تقریب
۱۰	۰/۲	۰/۹۸۰۳	۰/۱۹۳۴	۰/۲۰۷۲
	۰/۵	۰/۹۸۲۷	۰/۱۷۶۹	۰/۱۸۹۱
	۱/۰	۰/۹۸۱۲	۰/۱۶۲۴	۰/۱۶۸۶
	۲/۰	۰/۹۸۸۲	۰/۱۴۵۰	۰/۱۴۷۰
۲۰	۰/۲	۰/۹۷۶۵	۰/۰۹۳۳	۰/۰۹۸۴
	۰/۵	۰/۹۸۷۲	۰/۰۸۴۱	۰/۰۹۰۲
	۱/۰	۰/۹۹۴۷	۰/۰۷۸۹	۰/۰۸۰۷
	۲/۰	۰/۹۹۸۲	۰/۰۷۱۱	۰/۰۷۰۶

توزیع تقریبی هنوز شامل یک پارامتر نامعلوم است. درجه آزادی $f(\theta)$ نسبت به θ حساس است، اما خوشبختانه مقدار بحرانی $t^2_{f(\theta)}(۱-\alpha/۲)$ نسبت به θ زیاد حساس نیست که در شکل (۱) نمایش داده شده است. دلیل بالا در مورد تقریب، ممکن است که قانع کننده به نظر نرسد. به‌همین دلیل مطالعات شبیه‌سازی را با استفاده از روش گریس و بین انجام می‌دهیم. جدول (۴) نتایج را در صورت مناسب بودن θ برای $\alpha = ۰/۱$ یا $\alpha = ۰/۰۵$ نشان می‌دهد.

شکل ۱: رفتار درجه آزادی $f(\theta)$ و مقدار بحرانی $t^2_{f(\theta)}(1-\alpha/2)$ در حالت $n=10$ و $\alpha=0/05$.



جدول (۴) نشان می‌دهد که شرط $n \geq 3$ و $\theta \leq 2$ دقت قانع کننده‌ای برای $\alpha = 0/05$ به‌خوبی $\alpha = 0/01$ می‌دهد. گرچه جدول (۱) شامل ضرایب تطبیقی برای مقادیر کوچک $r = \frac{1}{\theta}$ است، می‌توان حدس زد که این تقریب در چنین موقعیتی ضعیف باشد.

جدول ۴: سطح رد برآوردشده از آزمونهای تقریبی به‌وسیله‌ی شبیه‌سازی با ۴۰۰۰۰ تکرار برای (بالایی) $n = 10$ و (پایینی) $n = 20$

α	θ	تقریب درجه آزادی: برآوردشده	تقریب درجه آزادی: $\theta = 0$
۰/۰۵	۰/۲	۰/۰۵۰۶	۰/۰۴۹۴
		۰/۰۵۰۵	۰/۰۴۹۹
	۰/۵	۰/۰۵۱۲	۰/۰۴۸۵
		۰/۰۵۰۸	۰/۰۴۹۴
	۱/۰	۰/۰۵۱۷	۰/۰۴۷۳
		۰/۰۵۰۷	۰/۰۴۸۵
	۲/۰	۰/۰۵۲۲	۰/۰۴۶۲
		۰/۰۵۰۶	۰/۰۴۷۸
۰/۱	۰/۲	۰/۱۰۱۳	۰/۰۹۹۹
		۰/۱۰۰۶	۰/۰۹۹۸
	۰/۵	۰/۱۰۲۲	۰/۰۹۹۱
		۰/۱۰۰۹	۰/۰۹۹۴
	۱/۰	۰/۱۰۲۸	۰/۰۹۷۹
		۰/۱۰۱۶	۰/۰۹۳۳
	۲/۰	۰/۱۰۲۸	۰/۰۹۶۶
		۰/۱۰۱۳	۰/۰۹۸۷

یک حقیقت مهم این‌است که در مسأله ۱۰ نسبت $\frac{2m}{\theta}\{\xi(\theta)-\xi(\theta/m)\}$ به $\frac{2n}{\theta}\{\xi(\theta)-\xi(\theta/n)\}$ تقریب خوبی به‌وسیله‌ی $\frac{n-1}{m-1}$ است، البته در صورتی که $\theta < 2$ و $\frac{n}{m}$، از ۱ زیاد بزرگتر نباشد. بنابراین ضریب تقریبی مستقل از θ است. با استفاده از این حقیقت و تقریب مسأله ۵ ، رابطه‌ی(۷) بدست می آید.

۶ نکات نهایی

در ابتدا ممکن است به نظر برسد که روشهای پیشنهادی، زحمت محاسباتی زیادی برای به‌دست‌آوردن مقادیر تقریبی دارد. امّا به آسانی می‌توانیم مقادیر تقریبی را با دقت به‌کاربریم. بنابراین اگر یک رایانه‌ی شخصی در دسترس باشد، هیچ مشکلی در عمل وجود ندارد. در فرمولهای تقریبی، تابع $\xi(\theta)$ مشهور به دی-‌-گاما به‌صورت زیر تقریب زده می‌شود.

$$\xi(\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{\theta^2}{12} - \frac{\theta^4}{120}$$

اگر θ کوچک باشد (تقریباً کوچکتر از $\frac{3}{4}$) ، یک تقریب با کاربرد وسیع تر، بصورت زیر وجود دارد.

$$\xi(\theta) = \theta - \frac{1}{2}\log(1+\theta+0/33\theta^2)$$

مشتق اول $\xi(\theta)$ می‌تواند به‌وسیله‌ی توابع تقریبی بالا، تخمین زده شود. همانطور که یاناگیموتو[۱۸] نشان داد، یک تقریب برای $\hat{\theta}$ در مسأله ۲ به‌صورت زیر به‌دست می آید.

$$\hat{\theta} = \tilde{\xi}((2n+1)z/2(n-1)) - \tilde{\xi}(z/2(n-1))$$

وقتی که $z = \log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}$ و $\tilde{\xi}(z) = z + \frac{1}{4}\log(1+3z+5z^2/2)$ که تقریب خوبی برای $\xi^{-1}(z)$ است.

گریس و بین ، همچنین بین و شیو، تقریبهای دیگری برای آزمونهای یک‌طرفه شبیه به مسائل ۴ و ۹ ارایه دادند. آزمون $\mu = \mu_0$ با θ نامعلوم که در مسأله ۴ بحث شده است بر اساس این حقیقت است که $\frac{\bar{x}}{\mu_0}$ متعلق به توزیع گاما با میانگین ۱ و واریانس $\frac{\theta}{n}$ است. اولین تقریب این است که

وقتی که $\hat{\theta}_u$ برآوردگر حداکثر درستنمایی غیرشرطی باشد $\frac{\bar{x}}{\mu_0} \sim Ga(1, \frac{\theta_u}{n})$. متأسفانه همانطور که خودشان نیز نشان داده‌اند، این تقریب بسیار ضعیف به نظر می‌رسد. بنابراین مقادیر بحرانی تقریبی را با $\theta = 0$ به‌دست آوردند.

با استفاده از این حقیقت که توزیع شرطی $\bar{x}$ به شرط $t = \frac{\bar{x}}{\mu_0} - \log\frac{\bar{x}}{\mu_0} - 1 + \log\frac{\bar{x}}{\tilde{x}}$ مستقل از θ است ، جنسن یک آزمون مشابه برای مسأله ۴ ارایه نمود و چون توزیعی پیچیده داشت در مورد تقریب آن بحث کرد.

متأسفانه زمینه‌ی نظری قوی برای این آزمون وجود ندارد، در حقیقت آماره‌ی t، شامل μ_0 و ناحیه‌ی رد، واضح به نظر نمی‌رسد. عیب دیگر آزمون این‌است که به‌طور جداگانه از مسائل دیگر شبیه به برآورد μ استفاده شده است. تعیین این‌که میانگین نمونه، حداکثر درستنمایی شرطی را می‌دهد یا خیر، آسان به نظر نمی‌رسد. در نتیجه تحقیقات بیشتری برای توصیه کردن استفاده عملی از این آزمون نیاز است؛ هر چند به‌نظر می‌رسد که امیدبخش است.

مراجع

[1] Bain, L. J. and Engelhardt, M. (1975) *A Two-moment chi-square application for the statistic* $\log(\bar{x}/\tilde{x})$. J. Amer Statist. Assoc, 70, 948-950.

[2] Brown, L.(1968) *Inadmissibility of the usual estimators of scale parameters in the problems with unknown location and scale parameter*, Ann. Math. Statist., 39, 29-48.

[3] Cox, D. R. and Reid, N. (1987) *Parameter orthogonality and approximate conditional inference (with discussion)*, J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 49, 1-39.

[4] Glaser, R. E. (1976a) *The ratio of the geometric mean to the arithmetic mean for a random sample from a gamma distribution*, J. Amer. Statist. Asso., 71, 480-487.

[5] Glaser, R. E. (1976b) *Exact critical valuer for Bartlett's test for homogenity of variance*, J. Amer. Statist. Asso., 71, 488-490.

[6] Godambe, V. P. (1980) *A sufficiency and ancillarity in the presence of the nuisance parameter*, Biometrika, 67, 155-162.

[7] Grice, J. V. and Bain, L.J. (1980) *Interference concerning the mean of the gamma distribution*, J. Amer. Statist. Asso., 75, 929-933.

[8] Jensen, J. L. (1986) *Interference for the mean of gamma distribution with unknown shape parameter*, Scand. J. Statist., 13, 135-151.

[9] Jorgensen, B. (1987) *Exponential dispersion models (with discussion)concerning the* , J. Roy. Statist. Soc. Ser. B, 49, 127-162.

[10] Kagan, A. M. and Linnik, Y.V. and Rao, C. R. (1973) *Caracterization problem in Mathematical Statistics*, Wiley, New York.

[11] Kullback, S. (1959) *Information theory and statistics*, Wiley, New York.

[12] McCullagh, P. (1983) *Quasi-Likelihood functions*, Ann. Statist. , 11, 59-67.

[13] McCullagh, P. and Nelder, J. A. (1989) *Generalized Linear Models*, 2nd ed., Chapman and Hall, London.

[14] Shiue, W-k and Bain, L.J. (1983) *A two-sample test of equal gamma distribution scale parameters with unknown common shape parameters* , Technometrics, 25, 377-381.

[15] Shiue, W-k and Bain, L.J. and Engelhardt, M. (1988) *Test of equal gamma-distribution means with unknown and unequal shape parameters* , Technometrics, 30, 169-174.

[16] Shorack, G. R. (1972) *The best test on exponentiality against gamma alternatives*, J.Amer. Statist. Asso. , 67, 213-214.

[17] Tweedie, M. C. K. (1957) *Statistical properties of inverse Gaussian distributions*, I, Ann. Math. Statist., 28, 362-377.

[18] Yanagimoto, T. (1988) *The conditional maximum likelihood estimator of the shape parameter in the gamma distribution*, Metrika, 35, 161-175.

اصل این مقاله با عنوان
Constructing Elementary Procedures for Infrence of Gamma Distribution
نوشته Takemi Yanagimoto و Eiji Yamamoto است که در
Ann. Inst. Statist. Math. Vol 43, No.3 (1991) چاپ شده است.