مدلهای چندمتغیری میانگین متحرک مرتبه q

عباس مقصودی

چکیده

در این مقاله مدلهای سری زمانی چندمتغیری میانگین متحرک معرفی شده، برخی خواص این مدلها به همراه یک حالت خاص مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

مقدمه

در اکثر روشها و محاسبات آماری معمولاً آمارشناسان به بررسی مشاهداتی می‌پردازند که فرض می‌شود این مشاهدات از هم مستقل هستند. در بسیاری از تکنیکها و روشهای آماری وابستگی بین مشاهدات به عنوان یک عامل مزاحم در نظر گرفته می‌شود. از این رو سعی می‌شود که با استفاده از روشهایی از جمله استفاده از اصل تصادفی‌کردن نمونه‌گیری، از این وابستگی احتراز شود. این در حالی است که بسیاری از داده‌ها و مشاهداتی که در طبیعت و اجتماع با آن روبرو هستیم طبیعتی وابسته دارند و به طور کاملاً مشخصی به هم مربوط هستند و نمی‌توان ارتباط این مشاهدات را نادیده گرفت. برای مثال مقدار زیادی از داده‌های مربوط به علوم طبیعی، مهندسی، اقتصاد و تجارت به صورت سریهای زمانی رخ می‌دهند که در آنها مشاهدات به هم وابسته‌اند و نه تنها نمی‌توان در محاسبات آماری از این وابستگی صرف نظر کرد، بلکه این وابستگی می‌تواند خود عامل مهمی برای برازاندن یک مدل احتمالی به داده‌ها باشد.

قسمتی از روشهای آماری که به بررسی و تجزیه و تحلیل این گونه مشاهدات می‌پردازد، تجزیه و تحلیل سریهای زمانی نامیده می‌شود. این تحلیل می‌تواند با استفاده از یک متغیر یا بیش از یک متغیر صورت گیرد. اگر فقط با یک متغیر سر و کار داشته باشیم، می‌توانیم ارتباط بین مشاهدات متوالی از این متغیر در طول زمان را با استفاده از تحلیل سریهای زمانی مشخص کنیم. در این صورت به این روش تحلیل سریهای زمانی یک متغیری می‌گویند.

اما اگر تعداد متغیرهای مورد بررسی بیش از یکی باشد، در این صورت هدف، پیدا کردن ارتباط همزمان بین مشاهدات متوالی هر یک از متغیرها با یکدیگر و ارتباط متقابل بین متغیرها در هر لحظه از زمان است. مانند موارد زیر:

۱) سریهای متوسط درجه حرارت ماهانه، متوسط بارندگی ماهانه، و متوسط رطوبت نسبی ماهانه

۲) سریهای میزان مرگ و میر سالانه، و جمعیت سالانه

۳) سریهای بیکاران فصلی و متخلفین از قانون فصلی

۴) سریهای سرعت باد و درجه حرارت روزانه

که در آنها علاوه بر پیدا کردن ارتباط بین مشاهدات متوالی هر یک از سریها، باید ارتباط متقابل سریها نیز در نظر گرفته شوند. اصطلاحاً به این روش، تحلیل سریهای زمانی چند متغیری می‌گویند.

فرم کلی مدل یک سری زمانی چند متغیره به صورت زیر خواهد بود:

$$\Phi(B)Z_t = \theta(B)a_t + \mu_{\circ}$$

که در آن Z_t بردار مشاهدات و a_t بردار باقیمانده است؛ به طوری که a_t ها به طور مستقل و به صورت نرمال با بردار میانگین صفر و ماتریس واریانس کوواریانس $\sum$ توزیع شده‌اند و $\Phi(B)$ و $\theta(B)$ نیز به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Phi(B) = I - \Phi_1 B - \ldots - \Phi_p B^p$$

$$\theta(B) = I - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$$

Φ_i ها به ازای $(i = 1, 2, \ldots, p)$ و θ_j ها به ازای $(j = 1, 2, \ldots, q)$ ماتریسهای $k \times k$ هستند که به همراه $\sum$ باید از روی مشاهدات برآورد شوند و p و q نیز به ترتیب، مرتبه‌های قسمت اتورگرسیو و قسمت میانگین متحرک مدل هستند که در عمل باید تعیین شوند.

عموماً مدلهای سریهای زمانی چندمتغیری را می‌توان به صورت زیر دسته‌بندی کرد:

۱) مدلهای میانگین متحرک مرتبه q با علامت اختصاری $MA(q)$

۲) مدلهای اتورگرسیو ایستای مرتبه p با علامت اختصاری $AR(p)$

۳) مدلهای ایستای مرکب اتورگرسیو– میانگین متحرک با علامت اختصاری $ARMA(p,q)$

۴) مدلهای ناایستای مرکب اتورگرسیو– میانگین متحرک با علامت اختصاری $ARIMA(p,d,q)$

مدلهای یک تا سه را می‌توان حالتهای خاصی از مدل چهار در نظر گرفت. در ادامه در بخش اول این مقاله به معرفی مدلهای دسته اول یعنی $MA(q)$ خواهیم پرداخت، در بخش دوم شرط عکس پذیری مدلهای میانگین متحرک را مورد بررسی قرار خواهیم داد و بخش سوم را به معرفی ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل مدل $MA(q)$ اختصاص می‌دهیم و در بخش چهارم حالت خاصی از این دسته از مدلها یعنی $MA(1)$ را از نظر خواهیم گذراند.

۱ معرفی مدل

در مدلهای تصادفی که در این بخش بررسی می‌شوند، یک فرآیند چند متغیری را که در آن مقادیر متوالی فرآیند به هم وابسته‌اند، می‌توان به صورت یک فرآیند ناشی از q ضربه تصادفی مستقل، از بردار a_t در نظر گرفت. این ضربات تصادفی نمونه‌هایی از یک توزیع معین هستند که معمولاً نرمالِ چندمتغیری فرض می‌شود. همچنین فرض می‌شود که توزیع ضربات تصادفی دارای بردار میانگین $\underline{O}$ و ماتریس کوواریانس $\sum$ است. به چنین دنباله‌ای از بردارهای تصادفی a_t و a_{t-1} و $\ldots$ ، فرآیند نوفه سفید می‌گویند.

در مدلهای میانگین متحرک می‌توان بردار Z_t را به صورت یک تابع خطی از $q+1$ بردار a_t و به شکل زیر در نظر گرفت:

$$Z_t = \mu + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q} \qquad (1)$$

که μ بردار میانگین Z_t و θ_j ها به ازای $(j=1,2,\dots,q)$ ماتریسهای $k\times k$ هستند که باید برآورد شوند. حال اگر قرار دهیم:

$$\tilde{Z}_t = Z_t - \mu$$

می‌توانیم انحراف $\tilde{Z}_t$ را به صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{Z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

اگر از اپراتور پَسرو B که به صورت $Ba_t = a_{t-1}$ تعریف می‌شود استفاده کنیم داریم:

$$\tilde{Z}_t = \theta(B) a_t \qquad (۲)$$

در مدل فوق $\theta(B)$ ماتریس $k\times k$ است و عناصر آن به صورت چندجمله‌ای‌هایی بر حسب B و از درجه q هستند که از رابطه زیر به دست می‌آیند:

$$\theta(B) = I - \theta_1 B - \dots - \theta_q B^q$$

در عبارت فوق I ماتریس $k\times k$ است. حال برای آنکه بتوان یک مدل میانگین متحرک از مرتبه q را به مشاهدات برازاند ابتدا لازم است که مرتبه مدل یعنی q را برآورد کرد. بعد از برآورد q باید پارامترهای مدل یعنی μ و θ_1 و ... و θ_q و $\sum$ را با استفاده از مشاهدات برآورد نمود.

۱.۱ شرط عکس‌پذیری مدلهای میانگین متحرک

اگر بخواهیم از روی مدل (۲) بردار تصادفی a_t را برحسب انحراف $\tilde{Z}_t$ بیان کنیم می‌توانیم بنویسیم:

$$a_t = \theta^{-1}(B)\tilde{Z}_t \qquad (۳)$$

بنابراین برای آنکه بتوان این عمل را انجام داد باید ماتریس $\theta^{-1}(B)$ وجود داشته باشد و همانطور که می‌دانیم ماتریس $\theta^{-1}(B)$ از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta^{-1}(B) = (\det\ \theta(B))^{-1}\ \theta^*(B) \qquad (۴)$$

که $\theta^*(B)$ ماتریس همسازه $\theta(B)$ است و $\det\ \theta(B)$ یک چندجمله‌ای برحسب B و از درجه kq است که آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$\det\ \theta(B) = 1 - \eta_1 B - \dots - \eta_{kq} B^{kq} \qquad (۵)$$

ضرایب η_i را به ازای $(i=1,\dots,kq)$ با استفاده از ماتریس‌های θ_j به ازای $(j=1,2,\dots,q)$ می‌توان به‌دست آورد.

مثال ۱. فرض کنیم که در مدل (۲) داریم:

$$k=2 \quad \text{و} \quad q=1$$

در این صورت مدل را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\tilde{Z}_t = \theta(B)a_t \quad \text{و} \quad \theta(B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} \\ \theta_{21} & \theta_{22} \end{bmatrix} B$$

در نتیجه داریم:

$$\theta(B) = \begin{bmatrix} 1-\theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1-\theta_{22}B \end{bmatrix}$$

بنابراین می‌توان $\det\theta(B)$ را به صورت زیر به دست آورد:

$$\begin{aligned}\det\theta(B) &= (1-\theta_{11}B)(1-\theta_{22}B) - \theta_{12}\theta_{21}B^2 \\ &= 1 - (\theta_{11}+\theta_{22})B - (\theta_{12}\theta_{21} - \theta_{11}\theta_{22})B^2\end{aligned}$$

پس در مقایسه با رابطه (۵) داریم:

$$\eta_1 = \theta_{11} + \theta_{22} \quad \text{و} \quad \eta_2 = \theta_{12}\theta_{21} - \theta_{11}\theta_{22}.\square$$

حال برای آنکه $\theta^{-1}(B)$ بسطی همگرا داشته باشد باید $[\det\ \theta(B)]^{-1}$ همگرا باشد، اما می‌توان با توجه به (۵) نوشت:

$$\begin{aligned}[\det\theta(B)]^{-1} &= (1-\eta_1 B - \dots - \eta_{kq}B^{kq})^{-1} \\ &= [(1-G_1B)(1-G_2B^2)\dots(1-G_{kq}B)]^{-1} \\ &= \sum_{i=1}^{kq} \frac{M_i}{(1-G_iB)} \qquad (۶)\end{aligned}$$

در نتیجه برای آنکه ماتریس $\theta^{-1}(B)$ وجود داشته باشد باید رابطه (٦) همگرا باشد و برای این منظور باید $|G_i| < 1$ باشد. اما با توجه به آنکه داریم:

$$\det\theta(B) = (1 - G_1 B)(1 - G_2 B)\ldots(1 - G_{kq}B)$$

شرط معادل آن است که ریشه‌های معادله $\det\theta(B) = 0$ خارج دایره واحد قرار گیرند یعنی به ازای $|B| < 1$ داشته باشیم:

$$\det\theta(B) = 0 \qquad (۷)$$

در نتیجه شرط فوق را به عنوان شرط عکس‌پذیری مدلهای میانگین متحرک می‌توان در نظر گرفت.

۲ ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل

اگر سری زمانی Z_t، برداری شامل k سری زمانی یک متغیره به شکل $Z_t = (Z_{1t},\ldots,Z_{kt})'$ باشد، تحت فرض نرمال بودن و شرط ایستایی ضعیف مرتبه دو، توزیع احتمالی $Pr(Z_{t_1}, Z_{t_2})$ برای تمام زمانهای t_1 و t_2 یکسان است. می‌توانیم ماتریس کوواریانس متقابل به فاصله S را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\begin{aligned}\Gamma(S) &= E(Z_{t-s} - \mu)(Z_t - \mu)', (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)\\ &= (\gamma_{ij}(s)), (i,j = 1,2,\ldots,k) \qquad (۸)\end{aligned}$$

به همین ترتیب می‌توانیم ماتریس همبستگی متقابل به فاصله S را هم به شکل زیر تعریف کنیم:

$$P(S) = (P_{ij}(s)), (s = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad (۹)$$

$$P_{ij}(s) = \frac{\gamma_{ij}(s)}{(Var(Z_i).Var(Z_j))^{1/2}}, (i,j = 1,2,\ldots,k) \qquad (۱۰)$$

با توجه به (۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\gamma_{ij}(S) &= E(Z_{it-s} - \mu_i)(Z_{jt} - \mu_j) \qquad (۱۱)\\ &= E(Z_{jt} - \mu_j)(Z_{it} - \mu_i)\\ &= \gamma_{ji}(-s)\end{aligned}$$

اگر بخواهیم از روی $z_1, z_2, \ldots, z_n$ برآوردهایی برای ماتریسهای کوواریانس متقابل و همبستگی متقابل بیابیم، برآوردهای زیر به عنوان کارآمدترین برآوردکننده‌ها به دست می‌آیند.

$$\hat{\Gamma}(S) = (\hat{\gamma}_{it}(s)) \qquad (۱۲)$$

$$\hat{\gamma}_{it}(s) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-s}(z_{it} - \bar{z}_i)(z_{jt+s} - \bar{z}_j) \qquad (۱۳)$$

$$\hat{P}(s) = (\hat{p}_{ij}(s)) \qquad (۱۴)$$

$$\hat{P}_{ij}(s) = \frac{\sum_{t=1}^{n-s}(z_{it} - \bar{z}_i)(z_{jt+s} - \bar{z}_j)}{(\sum_{t=1}^{n}(z_{it} - \bar{z}_i)^2 \cdot \sum_{t=1}^{n}(z_{jt} - \bar{z}_j)^2)^{1/2}} \qquad (۱۵)$$

حال با استفاده از رابطه (۸) ماتریس کوواریانس متقابل برای یک مدل میانگین متحرک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_t &= a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots - \theta_q a_{t-q}\\ \tilde{Z}_{t-s} &= a_{t-s} - \theta_1 a_{t-s-1} - \ldots - \theta_q a_{t-s-q} \qquad (۱٦)\end{aligned}$$

در نتیجه داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{t-s}\tilde{Z}_t' &= \tilde{Z}_{t-s}(a_t' - a'_{t-1}\theta_1' - \ldots - a'_{t-q}\theta_q') \qquad (۱۷)\\ &= \tilde{Z}_{t-s}a_t' - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-1}\theta_1' - \ldots - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-q}\theta_q')\end{aligned}$$

حال اگر $q > s$ باشد، داریم:

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{t-s}\tilde{Z}_t' &= \tilde{Z}_{t-s}a_t' - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-1}\theta_1' - \ldots - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-s}\theta_s'\\ &\quad - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-(s+1)}\theta'_{s+1} - \ldots - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-q}\theta_q')\end{aligned}$$

با توجه به رابطه (۸) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}\Gamma(s) &= E(Z_{t-s} - \mu)(Z_t - \mu)' = E(\tilde{Z}_{t-s}\tilde{Z}_t')\\ &= E(\tilde{Z}_{t-s}a_t' - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-1}\theta_1' - \ldots\\ &\quad - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-s}\theta_s' - \tilde{Z}_{t-s}a'_{t-(s+1)}\theta'_{s+1}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\ldots-\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-q}\theta'_q)\\
&= E(\tilde{Z}_{t-s}a'_t)-E(\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-1})\theta'_1-\ldots\\
&\quad -E(\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-s})\theta'_s-E(\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-(s+1)})\theta'_{s+1}\\
&\quad -\ldots-E(\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-q})\theta'_q
\end{aligned}
$$

با توجه به این نکته که بردارهای تصادفی a_t از هم مستقل و دارای بردار میانگین صفر هستند و همچنین با توجه به رابطه (۱٦) داریم:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(s) &= 0-0-\ldots-E(a_{t-s}a'_{t-s})\theta'_s\\
&\quad +\theta_1 E(a_{t-(s+1)}a'_{t-(s+1)})\theta'_{s+1}\\
&\quad +\ldots+\theta_{q-s}E(a_{t-q}a'_{t-q})\theta'_q
\end{aligned}
$$

یعنی:

$$\Gamma(s) = -\sum\theta'_s+\theta_1\sum\theta'_{s+1}+\ldots+\theta_{q-s}\sum\theta'_q$$

اما اگر $s > q$ باشد مثلاً اگر $s = q+1$ باشد، در این صورت با توجه به (۱۷) می‌توان نوشت:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_{t-s}\tilde{Z}_t{}' &= \tilde{Z}_{t-s}a'_t-\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-1}\theta'_1-\ldots\\
&\quad -\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-s+1}\theta'_q-\tilde{Z}_{t-s}a'_{t-s}\theta'_s
\end{aligned}
$$

که در رابطه‌ی فوق $\theta'_{q+1} = \theta'_s$ و برابر $\underline{0}$ خواهد بود، بنابراین با توجه به (۱٦) داریم:

$$E(\tilde{Z}_{t-s}\tilde{Z}_t{}') = 0-0-\ldots-0-E(a_{t-s}a'_{t-s})\theta'_s$$

چون $\theta'_s = \underline{0}$ ، داریم $E(\tilde{Z}_{t-s}Z'_t) = \underline{0}$.

به همین ترتیب می‌توان ثابت کرد که $\Gamma(s)$ برای $s = q+2$ و $s = q+3$ و ... نیز صفر است. بنابراین می‌توان فرم کلی $\Gamma(s)$ را به صورت زیر نوشت:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{q-s}\theta_j\sum\theta'_{j+s} & s = 0,1,\ldots,q \\ 0 & s > q \end{cases} \qquad (18)$$

که در رابطهٔ فوق $\theta_0 = -I$. باتوجه به رابطه (۱۸) ملاحظه می‌کنیم که ماتریس کوواریانس متقابل، یک مدل $MA(q)$ به ازای مقادیر $s > q$، یعنی به ازای شناسه‌های بزرگتر از مرتبه مدل صفر است.

اگر $\Gamma(1),\Gamma(2),\ldots,\Gamma(q)$ و $\sum$ معلوم باشند، q معادله‌ی حاصل از رابطه (۱۸) به ازای $s = 1,2,\ldots,q$ را برای پارامترهای θ_1 و θ_2 و ... و θ_q می‌توان حل کرد. بنابراین اگر به جای $\Gamma(s)$ از برآورد آن یعنی $\hat{\Gamma}(s)$ استفاده کنیم و به ازای $s = 1,2,\ldots,q$ ماتریسهای $\hat{\Gamma}(s)$ در رابطه‌ی (۱۸) قرار دهیم می‌توانیم برآوردهایی برای پارامترهای میانگین متحرک به دست بیاوریم.

اینک برای توضیح بیشتر حالت خاصی را در نظر می‌گیریم.

۳ فرآیند میانگین متحرک دو متغیری مرتبه اول

فرض کنیم که $\tilde{Z}_t = (\tilde{Z}_{1t},\tilde{Z}_{2t})'$ و در (۲) داشته باشیم $q = 1$ بنابراین مدل میانگین متحرک مرتبه اول را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم:

$$\tilde{Z}_t = a_t-\theta_1 a_{t-1} = (I-\theta_1 B)a_t$$

یا به طور گسترده:

$$
\begin{aligned}
&(\ \tilde{Z}_{1t}\quad \tilde{Z}_{2t}\ )' =\\
&\quad \left(\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}\theta_{11} & \theta_{12}\\ \theta_{21} & \theta_{22}\end{bmatrix}B\right)(\ a_{1t}\quad a_{2t}\ )'
\end{aligned}
$$

از بسط رابطه فوق داریم:

$$
\begin{aligned}
\tilde{Z}_{1t} &= (1-\theta_{11}B)a_{1t}-\theta_{12}Ba_{2t}\\
&= a_{1t}-\theta_{11}a_{1t-1}-\theta_{12}a_{2t-1}\\
\tilde{Z}_{2t} &= -\theta_{21}Ba_{1t}+(1-\theta_{22}B)a_{2t}\\
&= -\theta_{21}a_{1t-1}+a_{2t}-\theta_{22}a_{2t-1}
\end{aligned}
$$

۱.۳ عکس‌پذیری

برای اینکه مدل عکس‌پذیر باشد طبق رابطه (۷) باید برای $|B| > 1$ داشته باشیم:

$$\det\theta(B) = \begin{vmatrix} 1-\theta_{11}B & -\theta_{12}B \\ -\theta_{21}B & 1-\theta_{22}B \end{vmatrix} = 0$$

در نتیجه با توجه به بسط دترمینان فوق داریم:

$$(1-\theta_{11}B)(1-\theta_{22}B) - \theta_{12}\theta_{21}B^2 = 0$$

که اگر معادله فوق را برحسب توان B مرتب کنیم، داریم:

$$1 - (\theta_{11}+\theta_{22})B + (\theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21})B^2 = 0$$

حال با اعمال شرط عکس‌پذیری، $|B| > 1$، داریم:

$$|B| = \left| \frac{\theta_{11}+\theta_{22} \pm \sqrt{(\theta_{11}+\theta_{22})^2 - 4(\theta_{11}\theta_{22}-\theta_{12}\theta_{21})}}{2(\theta_{11}\theta_{22}-\theta_{12}+\theta_{21})} \right| > 1$$

اما با توجه به:

$$tr\theta_1 = \theta_{11}+\theta_{22} \quad \text{و} \quad \det\theta_1 = \theta_{11}\theta_{22} - \theta_{12}\theta_{21}$$

می‌توان نوشت:

$$\left| \frac{tr\theta_1 \pm \sqrt{(tr\theta_1)^2 - 4\det\theta_1}}{2\det\theta_1} \right| > 1$$

در نتیجه داریم:

الف : $\left| \frac{tr\theta_1 + \sqrt{(tr\theta_1)^2 - 4\det\theta_1}}{2\det\theta_1} \right| > 1$

و

ب : $\left| \frac{tr\theta_1 - \sqrt{(tr\theta_1)^2 - 4\det\theta_1}}{2\det\theta_1} \right| > 1$

یعنی برای آنکه مدل دو متغیری $MA(1)$ عکس‌پذیر باشد باید دو شرط الف و ب به طور همزمان برقرار باشد.

مثال ۲. اگر در مدل دومتغیری $MA(1)$ داشته باشیم:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.4 \\ 0.2 & -0.8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه،

$$\det\theta_1 = -0.56 \quad \text{و} \quad tr\theta_1 = -0.2$$

بنابراین می‌توان دید که دو شرط الف و ب در مورد مدل مزبور صدق می‌کنند.

الف : $\left| \frac{-0.2+\sqrt{0.04+4\times 0.56}}{-2\times 0.56} \right| = |-1.16| = 1.16$

و

ب : $\left| \frac{-0.2-\sqrt{0.04+4\times 0.56}}{-2\times 0.56} \right| = |-1.52| = 1.52$

یعنی مدل عکس‌پذیر است.

اما اگر داشته باشیم:

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 0.6 & 0.7 \\ 0.6 & -0.8 \end{bmatrix}$$

در نتیجه:

$$\det\theta_1 = -0.9 \quad \text{و} \quad tr\theta_1 = -0.2$$

و ملاحظه می‌کنیم که شرط الف در این مورد برقرار نیست.

$$\left| \frac{-0.2+\sqrt{0.04+4\times 0.9}}{-1.8} \right| = |-0.9| = 0.9$$

یعنی مدل عکس‌پذیر نیست.

۲.۳ برآوردهای اولیه پارامتر

با استفاده از رابطه (۱۸) داریم:

$$\Gamma(s) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{1-s}\theta_j \sum \theta_j' + s & s = 0, 1 \\ 0 & s > 1 \end{cases}$$

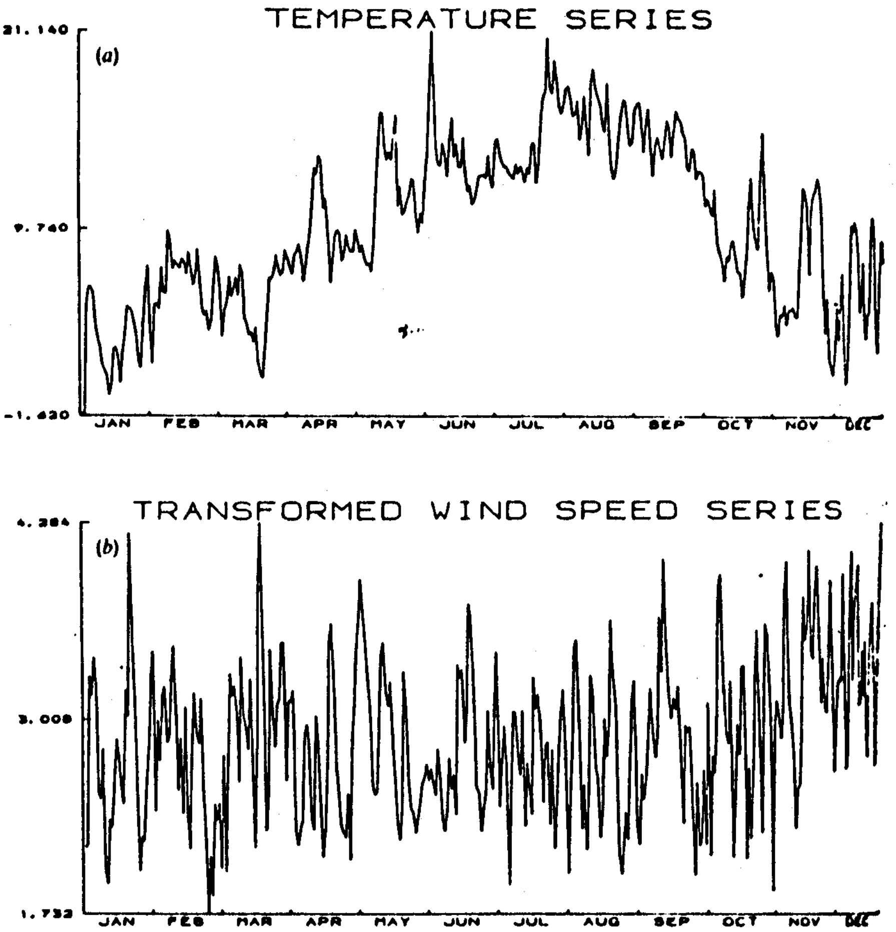
و به ازای $s = 0, 1$ و با استفاده از برآوردهای $\Gamma(0)$ و $\Gamma(1)$ داریم:

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}(0) &= \hat{\sum} + \hat{\theta}_1 \hat{\sum}\hat{\theta}_1' \\ \hat{\Gamma}(1) &= \hat{\sum} + \hat{\theta}_1' \end{aligned}$$

که می‌توان با حل دو معادله فوق، $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\sum}$ را به دست آورد.

۴ یک مثال عملی [۳]

نمودار دو سری درجه حرارت روزانه (T_t) و ریشه‌ی دوم سرعت باد (W_t) در یک دوره‌ی یک ساله در شکل زیر نشان داده شده است.



در این بخش ابتدا به کمک داده‌های مربوط، مدلهای یک متغیری این دو سری را به دست آورده، سپس با توجه به همبستگی معنی‌داری که بین باقیمانده‌های دو مدل مشاهده می‌شود، یک مدل دومتغیری پیشنهاد خواهد شد.

الف: مدلهای یک متغیری

با استفاده از تکنیک سریهای زمانی یک متغیری[۴] مدلهای زیر برای دو سری مورد بحث،حاصل شده است.

۱) درجه حرارت : $MA(۴)$

بعد از تفاضل‌گیری از سری درجه حرارت (∇T_t) برای ایجاد سکون، مدل میانگین متحرک مرتبه چهارم با واریانس باقیمانده‌ی ۲/۴۷۵ به صورت زیر برآورد شده است.

$$\nabla T_t = a_{1t} + ۰/۰۷a_{1t_1} - ۰/۳۰a_{1t-2} - ۰/۱۵a_{1t-3} - ۰/۲۰a_{1t-4}$$

۲) ریشه دوم سرعت باد : $AR(۲)$

برای سری W_t مدل پیشنهادی، اتورگرسیو مرتبه دو با واریانس باقیمانده‌ی ۰/۱۶۶ به صورت زیر

برآورده شده است.

$$W_t - ۰/۶۶W_{t-۱} + ۰/۱۲W_{t-۲۱} = ۱/۳۳ + a_{۲t}$$

ب: آنالیز دو متغیری

با استفاده از مدلهای یک متغیری قسمت الف، و محاسبه باقیمانده‌های این دو مدل، همبستگی نمونه‌ای بین باقیمانده‌های دو سری W_t و T_t، محاسبه و در جدول (۱) نشان داده شده است.

در این جدول، x باقیمانده‌ی سری سرعت باد و y باقیمانده‌ی سری درجه حرارت و $\hat{\rho}_{xy}(k)$ همبستگی متقابل بین سریهای x_t و y_{t+k} می‌باشد. برآورد انحراف معیار $\hat{\rho}_{xy}(k)$ تقریباً برابر با $\frac{1}{\sqrt{n}}$ بوده، با توجه به $n = ۳۶۵$ می‌توان برای $H_۰ \ : \ \rho_{xy}(k) = ۰$ مقدار Z را با توجه به فرمول $Z = \frac{\hat{\rho}_{xy}(k)}{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ به صورت جدول (۲) محاسبه نمود.

همان طور که ملاحظه می‌شود در سطح $\alpha = ۰/۰۵$ برای بعضی مقادیر k فرض صفر معنی‌دار است که نشان‌دهنده‌ی وجود رابطه‌ی معنی‌داری بین باقیمانده‌های دو سری T_t و W_t می‌باشد.
بنابراین با توجه به این همبستگی بایست یک مدل دو متغیری را مورد نظر قرار داد. به این منظور به محاسبه برآورد ماتریسهای همبستگی متقابل ($\hat{\rho}(k)$) سری دومتغیری $Z_t' = [\nabla T_t, W_t]$، با توجه به رابطه (۱۰) اقدام شده است. نتیجه به ازای $k = ۰, ۱, ۲, \ldots, ۹$ به صورت زیر است.

	∇T_t	W_t
∇T_t	· − − − · · · · · +	+ + · · · · · · · ·
W_t	− − · · · · · · · ·	+ + + · + · · · + +

در این جدول علامت منفی نشان دهنده‌ی وجود همبستگی منفی معنی‌دار و علامت مثبت نشان دهنده‌ی وجود همبستگی مثبت معنی‌دار است.
با توجه به این جدول و با توجه به رابطه (۱۸) و روابط (۸) و (۹) و (۱۰) یک مدل دو متغیری میانگین متحرک مرتبه ۵ یعنی $MA(۵)$ به صورت زیر، پیشنهاد می‌شود.

$$Z_t = \hat{\mu}_۰ + \hat{\theta}(B) a_t^\star$$

که در آن،

$$Z_t = \begin{bmatrix} \nabla T_t \\ W_t \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \hat{\mu}_۰ = \begin{bmatrix} \hat{\mu}_۱ \\ \hat{\mu}_۲ \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} \hat{\theta}(B) &= I - \hat{\theta}_۱ B - \hat{\theta}_۲ B^۲ - \hat{\theta}_۳ B^۳ - \hat{\theta}_۴ B^۴ - \hat{\theta}_۵ B^۵ \\ a_t^\star &= \begin{bmatrix} a_{۱t}^\star \\ a_{۲t}^\star \end{bmatrix} \end{aligned}$$

برآورد پارامترهای مدل به صورت زیر است:

$$\hat{\mu}_۰ = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۲/۹۰ \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_۱ = \begin{bmatrix} -۰/۰۷ & ۰/۸۴ \\ -۰/۰۲ & -۰/۵۸ \end{bmatrix}$$
$$\hat{\theta}_۲ = \begin{bmatrix} ۰/۲۸ & ۰ \\ -۰/۰۴ & -۰/۲۵ \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_۳ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$\hat{\theta}_۴ = \begin{bmatrix} ۰/۱۶ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}, \quad \hat{\theta}_۵ = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$
$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} ۲/۴۳۵ & ۰ \\ ۰/۱۴۳ & ۰/۱۶۳ \end{bmatrix}$$

همانطور که مشخص است با توجه به صفر بودن ماتریس $\hat{\theta}_۵$ می‌توان مدل آن را $MA(۴)$ در نظر گرفت.
برآورد ماتریس همبستگی متقابل باقیمانده‌ی مدل به ازای بیست مقدار از k به صورت شکل (۱) است.

صفر بودن ماتریسهای شکل (۱) نشان‌دهنده‌ی برتری دومتغیری نسبت به مدلهای یک‌متغیری می‌باشد.

	a^*_{1t}	a^*_{2t}
a^*_{1t}	. . . .	. . . .
a^*_{2t}	. . . .	. . . . ++ . .

شکل ۱:

k	−۵	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
$\hat{\rho}_{xy}(k)$	−۰/۰۱	−۰/۰۷	−۰/۰۸	۰/۱۲	۰/۰۸	۰/۲۱	−۰/۱۹	−۰/۰۴	۰/۰۰	۰/۰۱	−۰/۰۲

جدول ۱:

k	−۵	−۴	−۳	−۲	−۱	۰	۱	۲	۳	۴	۵
Z	−۰/۱۹	−۱/۳۴	−۱/۵۳	۲/۲۹	۱/۵۳	۴/۰۱	−۳/۶۳	−۰/۷۶	۰/۰۰	۰/۱۹	−۰/۳۸

جدول ۲:

مراجع

[1] Tiao, G. C. , and Box, G. E. P. (1981), *Modeling Multiple Time Series with Applications,* JASA. 76, 802-816.

[2] Wie, W. W. S. (1989), *Time Series Analysis Univariate and Multivariate Methods,* Redwood City CA, Addison-Wesely.

[3] Shea, B. L. (1987), *Estimation of Multivariate Time- Series,* Journal of Time Series Analysis Vol. 8, No. 1.

[۴] مشکانی، محمدرضا (۱۳۵۲)، تجزیه و تحلیل سریهای زمانی و پیش‌بینی، مؤسسه آموزش عالی آمار، تهران.

[۵] مقصودی، عباس (۱۳۷۰)، بررسی سریهای زمانی چندمتغیری سمت و سرعت بادهای خلیج فارس، رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شهیدبهشتی، تهران.