مسئلهٔ سوزن بوفن برای شبکه‌های مستطیل شکل

رابرت فاکلر

ترجمه:

مصطفی دانش [۱] طیبه سبحانی [۲]

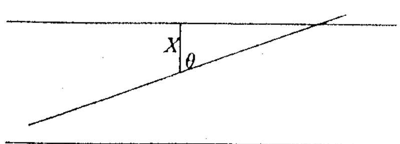
اگر سوزنی به طول l را بر روی کفی که به طور یکسان از الوارهای چوبی به پهنای D پوشیده شده بیاندازیم، احتمال اینکه سوزن شکاف بین الوارها را قطع کند چقدر است؟

این سؤال به نام «مسئله‌سوزن بوفن» معروف است. Schroeder در سال ۱۹۷۴ در مقاله‌ای از مجلهٔ "Mathematics Teacher" دربارهٔ این مسئله بحث کرد و برای حالتی که طول سوزن $l \leq D$ باشد مسئله را حل نمود.

روش حل برای حالت $l \leq D$ [۳] بدینگونه است که متغیر تصادفی X را فاصلهٔ وسط سوزن تا نزدیکترین خط موازی و زاویهٔ بین سوزن و این خط عمود را θ در نظر می گیریم. X بین ۰ و $\frac{D}{۲}$ تغییر می‌کند و θ بین ۰ و $\frac{\pi}{۲}$ تغییر می‌کند، منطقی است که فرض کنیم θ و X متغیرهای تصادفی یکنواخت مستقل هستند که بر فاصله‌های مربوط به طور یکنواخت توزیع شده‌اند.

بنابراین:

$$
\begin{aligned}
P\{X < \frac{l}{۲}\cos\theta\} &= \int_{x<\frac{l}{۲}\cos y}\int f_X(x) f_\theta(y)\,dx\,dy \\
&= \frac{۴}{\pi D}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}}\int_{۰}^{\frac{l}{۲}\cos y} dx\,dy \\
&= \frac{۴}{\pi D}\int_{۰}^{\frac{\pi}{۲}} \frac{l}{۲}\cos y\,dy = \frac{۲l}{\pi D}
\end{aligned}
$$



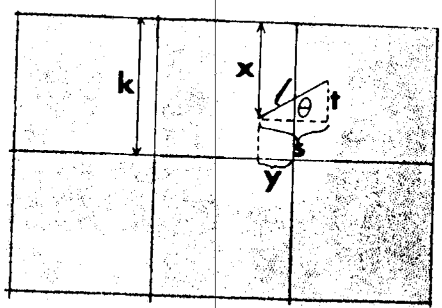
اسکرودر مشاهده کرد کف چوبی اتاقها بطور طولی پوشیده نشده‌اند، پس می‌توان مسأله سوزن را بطور امروزی‌تری به شکل زیر مطرح کرد: هنگامیکه سوزنی به طول l بر روی کفی که با موزائیک‌های مربع شکل به ضلع K پوشیده شده است پرتاب شود چه اتفاقی می‌افتد (وقتیکه $l < K$ باشد)؟ او نیز، به این سؤال پاسخ داد: احتمال اینکه سوزن شکاف کف را قطع کند چقدر است؟ برای حل این مسئله باید موقعیتهای ممکنی را که سوزن برروی زمین قرار می‌گیرد و ارتباط آن با شکافهای کف را با یک مجموعهٔ مستقل از متغیرها نشان دهیم. چه تعدادی از این قبیل متغیرها لازم است؟

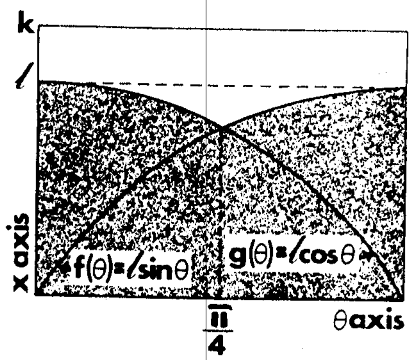
برای تعیین نمودن موقعیت یک نقطه روی سوزن دو متغیر به مختصات x و y لازم است. اما سوزن می‌تواند در محلهای زیاد و نامتناهی بیافتد. این نقاط نسبت به شکافهای کف

[۱] مصطفی دانش ، دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشگاه فردوسی مشهد
[۲] طیبه سبحانی، دانشجوی ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد
[۳] روش حل در مرجع [۲]

موقعیتهای یکسانی دارند، اما شیبها متفاوت است. برای تعیین موقعیت واحدی از سوزن و مشخص نمودن موقعیت یک نقطهٔ خاص، ما باید شیب سوزن را تعیین کنیم، پس این فرآیند احتیاج به متغیر سومی نیز دارد. بنابراین ما برای مشخص نمودن نتیجه سوزنی که بر روی کف پرتاب شده است، به سه متغیر مستقل نیاز داریم.

اسکرودر، در حل مسئلهٔ بوفن (از دیدگاه خودش) به اشتباه از دو متغیر برای نشان دادن همهٔ پرتابهای ممکن سوزن استفاده کرده بود و جواب نادرست $P = \frac{2l\sqrt{2}}{k\pi}$ را بدست آورد.





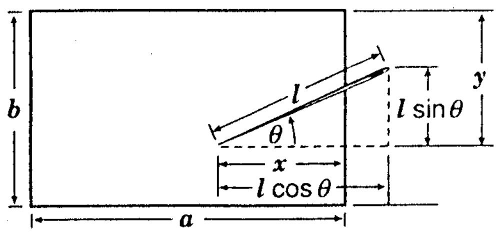
به صورت زیر[۴]:

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{2}{k\pi}\left\{\int_0^{\frac{\pi}{4}} l\cos\theta d\theta + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} l\sin\theta d\theta\right\} \\
&= \frac{2l}{k\pi}\left\{[\sin\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} + [-\cos\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\right\} \\
&= \frac{2l}{k\pi}\left[\sin\frac{\pi}{4} - \sin\theta - \cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{4}\right] \\
&= \frac{2l}{k\pi}\left[\frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - 0 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\
&= \frac{2l}{k\pi}(\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}l}{k\pi}
\end{aligned}
$$

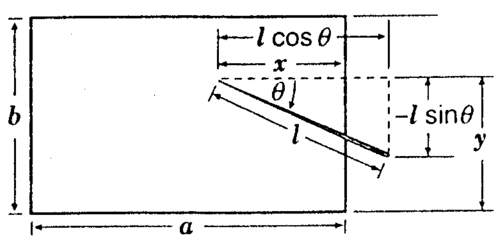
۴مرجع شماره [۱]

در اینجا مسئلهٔ اسکرودر به صورت کلی‌تر برای ما مطرح می‌شود که روی آن تأمل کنیم و آن عبارت است از سوزنی که با طول l بر روی شبکه‌های مستطیل شکلی که از مستطیلهای به ابعاد $a \times b$ تشکیل‌شده پرتاب شود. اگر یک سوزن به طول l بر روی شبکهٔ مستطیلی که شامل مستطیلهای به ابعاد $a \times b$ است پرتاب شود، احتمال اینکه سوزن یک خط شبکه را قطع کند چقدر است؟ ما فرض می‌کنیم که $l \le a$ و $l \le b$ است. (در حالتهای $a < l < \sqrt{a^2+b^2}$ یا $b < l < \sqrt{a^2+b^2}$ حل این مسأله مشکل می‌شود و ما حل این مسأله جالب را برای علاقه‌مندان کنار می‌گذاریم. اگر $l \ge \sqrt{a^2+b^2}$ باشد، در این حالت سوزن همیشه یک خط را قطع می‌کند و بنابراین احتمال اینکه سوزن یک خط را قطع کند برابر «یک» است.)

مسئلهٔ اسکرودر، در حالت خاصی است که در این حالت $a = b = k$ می‌باشد. برآمد هر پرتاب سوزن را با x و y و θ مشخص می‌کنیم که در آن x فاصلهٔ نوک سوزن تا نزدیکترین خط عمودی در طرف راست آن، y فاصلهٔ نوک سوزن تا خط افقی که دورتر از آن واقع شده است و θ زاویهٔ طول سوزن و خطی که از نوک سوزن در امتداد افقی به سمت راست کشیده شده است می‌باشد. (شکل زیر را مشاهده کنید.)



$0 \le \theta \le \pi/2$



$-\pi/2 < \theta < 0$

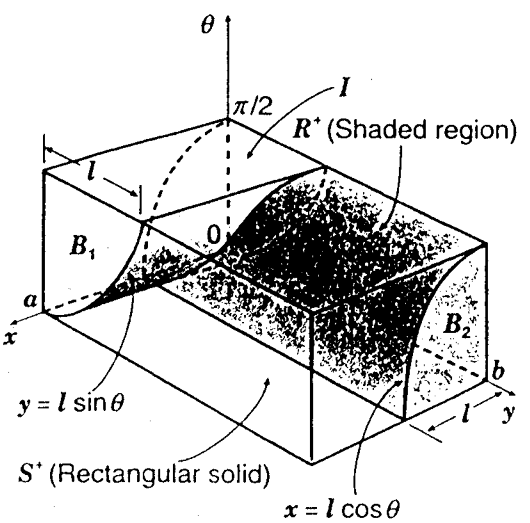
در اینجا داریم: $0 \le x \le a$ و $0 \le y \le b$ و $0 \le \theta \le \pi/2$.
ما می‌توانیم مجموعه‌ای از همهٔ بر آمدهای ممکن آزمایش سوزن را با نقاط یک مکعب مستطیل، به صورت زیر تعریف کنیم:

$$S = \{(x,y,\theta)| 0 \le x \le a, 0 \le y \le b, -\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}\}$$

فرض کنید R زیر ناحیه‌ای از S باشدکه همهٔ برآمدهای حاصل از قطع نمودن خط توسط سوزن را شامل شود. پس احتمال P، احتمال قطع خط توسط سوزن برابر است با:

$$p = \frac{\text{حجم}\,R}{\text{حجم}\,S}$$

هرگاه $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ باشد آنگاه سوزن یک خط را قطع می‌کند اگر و فقط اگر $X \le l\cos\theta$ یا $y \le l\sin\theta$ باشد. S^+ زیرناحیه‌ای از S شامل نقاطی از S بطوریکه $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$ باشد را درنظر بگیرید.
در این حالت، نتایج پرتابهایی که منجر به قطع شدن یک خط می‌شود را می‌توان توسط نقاطی در ناحیهٔ R^+ شامل آن دسته نقاط از S^+ که درون اجتماع دو استوانه‌های $x = l\cos\theta$ و $y = l\sin\theta$ هستند، مشخص نمود. نواحی R^+ و S^+ در شکل زیر نشان داده شده‌اند.



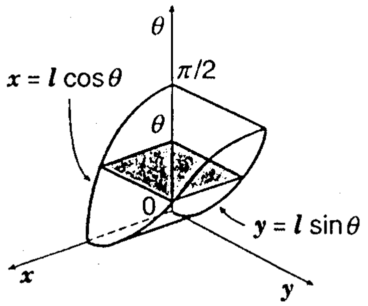
ناحیهٔ R^+ اجتماع دو استوانهٔ قائم با ارتفاعهای a و b و به ترتیب با پایه‌های B_1 و B_2 است. حجم این استوانه‌ها به ترتیب برابر است با: $a\times$(مساحت B_1) و $b\times$(مساحت B_2).
اشتراک این دو استوانه ناحیهٔ I را تشکیل می‌دهند، پس حجم R^+ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$(\text{مساحت}\,B_1) \times a + (\text{مساحت}\,B_2) \times b - \text{حجم}\,I$$

$$\text{مساحت}\,B_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L\sin\theta d\theta = -L\cos\theta|_0^{\frac{pi}{2}} = l$$

$$\text{مساحت}\,B_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} L\cos\theta d\theta = L\sin\theta|_0^{\frac{pi}{2}} = l$$

حجم I را می‌توان به روش «جزء به جزء کردن حجم‌ها» بدست آورد. توجه کنید که سطح مقطع I به صورت عمود بر محور θ، یک مستطیل با ابعاد $l\cos\theta$ و $l\sin\theta$ می‌باشد.شکل زیر را مشاهده کنید:



بنابراین مساحت $A(\theta)$ برابر است با

$$A(\theta) = (l\cos\theta)(l\sin\theta) = l^2 \sin\theta\cos\theta$$

و نیز داریم:

$$\text{حجم}\,I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} A(\theta)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} l^2 \sin\theta\cos\theta d\theta = l^2\left[(\frac{\sin^2\theta}{2})\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{l^2}{2}$$

بنابراین: $\text{حجم}\,R^+ = la + lb - \frac{l^2}{2}$

فرض دیگر این است که $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ باشد، پس سوزن هنگامی خط را قطع خواهد کرد که (x,y,θ) به R متعلق باشد اگر و فقط اگر $x < l\cos\theta$ یا $y < -l\sin\theta$ باشد. R^- را زیرناحیه‌ای از R در نظر بگیرید که شامل نقاطی است که در آن $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ قرار دارد. پس R^-، شامل تمام نقاط (x,y,θ) در R است که $-\frac{\pi}{2} < \theta < 0$ قرار دارد و همچنین $x < l\cos\theta$ یا $y < -l\sin\theta$ می‌باشد. ما ادعا می‌کنیم که زیر ناحیهٔ R^+ که در $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ صدق می‌کند نسبت به صفحهٔ xy متقارن با زیرناحیهٔ R^- است. در این ارتباط ما متوجه می‌شویم که $(x,y,-\theta)$ نقطهٔ تقارن (x,y,θ) نسبت به صفحهٔ xy، است پس داریم:

$$\begin{aligned}
(x,y,-\theta) \in R^- \quad &\Leftrightarrow \quad (x < l\cos(-\theta) \ or \ y < -l\sin(-\theta)) \\
&\qquad and \ \frac{-\pi}{2} < -\theta < 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (x < l\cos\theta \ or \ y < -l\sin\theta) \\
&\qquad and \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad (x,y,-\theta) \in R^+ \ \ and \ 0 < \theta < \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

بنابراین حجم زیر ناحیهٔ R^+ شامل تمام نقاط $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ برابر با حجم ناحیهٔ R^- است. چون این حجم با حجم R^+ یکسان است بنابراین داریم: $\text{حجم}\, S = 2(\text{حجم}\, R^+)$

همچنین به سادگی دیده می‌شود که: $\text{حجم}\, S = 2(\text{حجم}\, S^+)$

چون حجم S^+ برابر است با $\frac{\pi ab}{2}$ داریم:

$$\begin{aligned}
p &= \frac{\text{حجم}\, R}{\text{حجم}\, S} = \frac{2(\text{حجم}\, R^+)}{2(\text{حجم}\, S^+)} \\
&= \frac{\text{حجم}\, R^+}{\text{حجم}\, S^+} = \frac{la + lb - \frac{l^2}{2}}{\pi ab} \\
&= \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab}
\end{aligned}$$

موقعیکه مستطیل به مربع تبدیل می‌شود می‌توان a را برابر b قرارداد. بنابراین:

$$a = b = k \Rightarrow p = \frac{4lk - l^2}{\pi k^2}$$

این روش حل مسئله، راه حل درستی برای مسئلهٔ سوزن با شبکه‌های مربع شکل مطرح شده توسط اسکرودر است و به آن پاسخ صحیح می‌دهد.

مشاهده جالب در این روش حل، این است که اگر ما یکی از ابعاد را درنظر بگیریم مثل ضلع a بطوریکه طول آن نامتناهی فرض شود، آنگاه می‌توان مسئلهٔ سوزن را مانند حالت خطوط موازی درنظر گرفت که b فاصلهٔ بین دو خط مجاور است. ما می‌توانیم این نتیجهٔ صحیح بدست آمده را مشاهده کنیم زیرا:

$$\lim_{a\to\infty} \frac{2l(a+b) - l^2}{\pi ab} = \lim_{a\to\infty} \frac{2l + \frac{2lb}{a} + \frac{l^2}{a}}{\pi b} = \frac{2l}{\pi b}$$

در پایان یادآور می‌شویم که در حل مسئلهٔ سوزن، نیاز به استفاده از انتگرال برای بدست آوردن حجم R داریم. یک روش دیگر برای اجتناب از انتگرال‌گیری این است که یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسیم که در آن آزمایش پرتاب سوزن را شبیه‌سازی کند. می‌توانیم با تکرار برنامهٔ پرتاب سوزن به تعداد زیاد، یک تخمین تجربی از احتمال قطع خط، توسط سوزن را داشته‌باشیم که عبارت است از تقسیم تعداد دفعاتی که سوزن یک خط را قطع می‌کند بر تعداد دفعاتی که سوزن پرتاب می‌شود.

```
10  REM VARIABLES
20  REM PI....THE CONSTANT PI
30  REM N.....NUMBER OF TOSSES
40  REM S.....NUMBER OF TIMES NEEDLE
              CROSSES A LINE
50  REM X.....DISTANCE BETWEEN
              LEFTMOST END OF
              NEEDLE AND NEAREST
              VERTICAL LINE TO THE
              RIGHT
60  REM Y.....DISTANCE BETWEEN LOWER
              END OF NEEDLE AND
              NEAREST HORIZONTAL
```

```
                LINE ABOVE IT
70  REM THETA.ANGLE MADE BY NEEDLE
                WITH A HORIZONTAL
                LINE THROUGH ITS
                LOWER END
80  REM I......INDEX VARIABLE FOR
                FOR-NEXT LOOP
90  LET   PI=3.14159
100  PRINT "NO. OF TOSSES". TAB(17);
            "PROBABILITY ESTIMATE"
110  FOR N=1000 TO 10000 STEP 1000
120         RANDOMIZE(N)
130         LET S=0
140         FOR I=1 TO N
150           LET X=2*RND
160           LET Y=3*RND
170           LET THETA=(PI/2)*RND
180           IF X <= COS(THETA) OR
                 Y <= SIN(ABS(THETA))
                 THEN S=S+1
190           NEXT
200           PRINT TAB(5); N; TAB(23); S/N
210  NEXT N
```

NO. OF TOSSES	PROBABILITY ESTIMATE
1000	.465
2000	.4805
3000	.4743334
4000	.4995
5000	.4552
6000	.4805
7000	.475
8000	.474375
9000	.471
10000	.4735

برای مثال فرض کنید $l = ۱$، $a = ۲$ و $b = ۳$ را درنظر بگیریم. برنامهٔ فوق، یک برنامه کامپیوتری به زبان BASIC را شامل می‌شود که در این حالت، برآوردهای احتمال تجربی را با شروع از ۱۰۰۰ پرتاب محاسبه می‌کند و گام به گام از ۱۰۰۰ تا ۱۰۰۰۰ ادامه می‌دهد. در اینجا می‌توان به مدت زمان زیاد اجرای برنامه دقت نمود. در این حالت احتمال اینکه سوزن خط را قطع کند (با استفاده از فرمول ریاضی)، برابر است با:

$$p = \frac{۲(۱)(۲+۳) - ۱^{۲}}{\pi(۲)(۳)} = \frac{۹}{۶\pi} \approx ۰/۴۷۷$$

مراجع

[1] schroeder, Lee L. "Buffen's Needle problem : An Exciting Application of many Mathematical concepts." Mathematics Teacher 67 (February 1974): 183-86

[2] Ross, Sheldon M. "A First Course In Probability "3rd edition, Macmilan Publishing Co.(1988)

اصل این مقاله با عنوان

Buffons Needle Problem for a Rectangular Grid

نوشته Robert Fakler است که در

Mathematics Teacher, VOL. 88, NO.3 (march 1995) 205-208

به چاپ رسیده است.
