پارادکس کیف پول و تجدید نظر

غلامحسین شاهکار[1]

مارتین گاردنر[2] در کتاب خود [۱]، پارادکس زیر را که به پارادکس کیف پول معروف است مطرح کرده است. دو نفر روی موجودی کیفهای خود شرط بندی می‌کنند. آنها قرار می‌گذارند که موجودی کیف هر که کمتر بود او برندهٔ موجودی کیف طرف مقابل شود. هر دوی این افراد در توجیه عمل خود می‌گویند:«مقداری که می‌برند همیشه بیشتر از مقداری است که می‌بازند و بنابراین شرط بندی به سود آنهاست.»

همانطور که کنت ج.مریفیلد[3] و دیگران [۲] می‌گویند، هر چند در نگاه اول این گفته به نظر درست می‌آید که شرط بندی به نفع است، لکن در این کلام یک پارادکس وجود دارد. چرا که در این نتیجه گیری احتمالهای برد و باخت منظور نشده‌اند. به بیان دیگر، مشخص نشده است که اگر شرط بندی به دفعات انجام شود چند درصد اوقات هر یک از دو نفر شرط را می‌برد، چند درصد اوقات شرط را می‌بازد و چقدر؟

فرض کنید x و y بترتیب میزان موجودی کیفهای نفر اول و دوم باشد و فرض کنید W_1 و W_2 به ترتیب مبلغی باشد که نفر اول و دوم می‌برد. داریم:

$$W_1(x,y) = -W_2(x,y)$$

و

$$W_1(x,y) = \begin{cases} -x & \text{اگر } x > y \\ y & \text{اگر } x < y \\ 0 & \text{اگر } x = y \end{cases}$$

از اینجا معلوم می‌شود $W_1(y,x) = -W_1(x,y)$ و بنابراین $W_1(y,x) = W_2(x,y)$. فرض کنید تابع توزیع مقدار موجودی کیفهای هر دو نفر یکسان باشد. همچنین، فرض کنید متغیرهای تصادفی x و y مستقل و هم‌توزیع با مقادیری باشند که در فاصلهٔ $[a,b]$ یا $[a,\infty)$، $0 \leq a < b < \infty$ قرار دارند. نشان می‌دهیم $E(W_1) = E(W_2) = 0$. تابع چگالی احتمال توأم متغیرهای تصادفی x و y را $f(x,y)$ بگیرید. داریم:

$$E(W_1) = \int_a^b \int_a^b W_1(x,y) f(x,y)dxdy$$

$$E(W_2) = \int_a^b \int_a^b W_2(x,y) f(x,y)dxdy$$

با فرض $U = Y$، $V = X$، $h_1(x,y) = y$ و $h_2(x,y) = x$ دستگاه معادلات:

$$\begin{cases} y = u \\ x = v \end{cases}$$

---

[1] غلامحسین شاهکار، گروه آمار دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه فردوسی مشهد

[2] Martin Gardner

[3] Kent G.Merryfield

دارای جواب یکتای $x = v$ و $y = u$ است و داریم:

$$J = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

بنابراین با تغیر متغیر بدست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} E(W_1) &= \int_a^b \int_a^b W_1(x,y) f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_a^b \int_a^b W_1(v,u) f(v,u) |J|\,du\,dv \\ &= \int_a^b \int_a^b W_1(v,u) f(v,u)\,du\,dv \end{aligned}$$

چون بنابه فرض، توزیع موجودی کیفهای هر دو نفر یکسان است؛ بنابراین جفت متغیرهای تصادفی (x,y) و (y,x) هر دو یک تابع چگالی دارند و در برابری $f(x,y) = f(y,x)$ صدق می‌کنند. با توجه به برابری $W_1(y,x) = W_2(x,y)$ داریم $W_1(v,u) = W_2(u,v)$. این موضوع و اینکه $f(v,u) = f(u,v)$ به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} E(W_1) &= \int_a^b \int_a^b W_2(u,v) f(u,v)\,du\,dv \\ &= E(W_2) \end{aligned}$$

از طرف دیگر داریم $W_1(x,y) = -W_2(x,y)$ که نتیجه می‌دهد $E(W_1) = -E(W_2)$. بنابراین $E(W_1) = -E(W_1)$ و لذا $E(W_1) = E(W_2) = 0$. این پارادکس را به صورت دیگر نیز مطرح می‌کنند. فرض کنید دو قلک مثل هم داریم که محتویات یکی دو برابر دیگری است. آرش این موقعیت را پیدا کرده است که یکی از این دو قلک را برای خود بردارد. او قلکی را به تصادف برداشته و آن را باز می‌کند. اگر او بعد از دیدن محتویات آن این شانس را داشته باشد که بتواند در انتخاب خود تجدید نظر کرده و به جای آن قلک دوم را اختیار کند، آیا او باید این کار را بکند یا نه؟

جواب : اگر آرش در قلک اول x تومان ببیند در این صورت قلک دوم با احتمال $\frac{1}{2}$، $2x$ تومان و با همین احتمال یعنی $\frac{1}{2}$، $\frac{x}{2}$ تومان دارد. بنابراین، امید ریاضی مقدار موجودی قلک دوم می‌شود:

$$\frac{x}{2} \times \frac{1}{2} + 2x \times \frac{1}{2} = 1.25x$$

از این عبارت چنین برمی‌آید که آرش باید بدون توجه به مقداری که در قلک اول یافته است، نظر خود را عوض کرده قلک دوم را برگزینند. اما همچنان که استیفان برامز و مارک کیلگور[4] [۳] می‌گوید این سخن که او باید بدون توجه به مبلغی که در قلک اول یافته است نظر خود را تغییر دهد، بی‌اساس و نادرست است. آنها می‌گویند آنچه برای پاسخ به این سؤال لازم است اطلاع قبلی از میزان موجودی قلکهاست. با اطلاع از توزیع پیشین میزان موجودی قلکها، می‌توان معلوم کرد که آیا موجودی قلک اول از امید ریاضی میزان موجودی قلک دوم کمتر است یا بیشتر و با توجه به آن، آیا انتخاب قلک دوم به صلاح است یا نه. فرض کنید، L پیشامد انتخاب قلکی باشد که موجودی آن بیشتر است و فرض کنید x مبلغی باشد که آرش در قلک اول می‌بیند. نشان می‌دهیم که تجدید نظر و انتخاب قلک دوم تنها و تنها در صورتی به مصلحت است که برای مبلغ مشاهده شدهٔ x در قلک اول داشته باشیم:

$$P(L \mid X = x) < \frac{2}{3}$$

یعنی آرش تنها و تنها وقتی باید نظر خود را عوض کند که احتمال شرطی انتخاب قلک با موجودی بیشتر، وقتی که در آن x تومان یافته است، کمتر از $\frac{2}{3}$ باشد.

برای اثبات فرض کنید y موجودی قلکی باشد که آرش آن را باز نکرده است. و فرض کنید S پیشامد انتخاب قلک با موجودی کمتر باشد. داریم:

$$E(Y \mid X = x) = \frac{x}{2} P(L \mid X = x) + 2x P(S \mid X = x)$$

تجدید نظر تنها و تنها وقتی به مصلحت است که

$$E(Y \mid X = x) > x$$

یا

$$\frac{x}{2} P(L \mid X = x) + 2x P(S \mid X = x) > x$$

با توجه به

$$P(S \mid X = x) = 1 - P(L \mid X = x)$$

[4] Steven Brams and Marc Kilgour

از نامساوی بالا نتیجه می‌شود

$$\frac{۱}{۲}P(L \mid X = x) + ۲[۱ - P(L \mid X = x)] > ۱$$

یا

$$P(L \mid X = x) < \frac{۲}{۳}$$

مثلاً قلک با موجودیِ بیشتر، با احتمالهای مساوی؛ ۱، ۲، ۴، یا ۸ تومان داشته باشد. پس آرش باید با مشاهده مبلغ $\frac{۱}{۲}$، ۱، ۲، یا ۴ تومان در قلک اول، نظر خود را تغییر دهد. در صورتی که برای $x = ۸$ خیر؛ زیرا با توجه فرمول بیز مثلاً برای $x = ۲$ داریم:

$$\begin{aligned} P(L \mid X = ۲) &= \frac{P(X=۲|L)P(L)}{P(X=۲|L)P(L)+P(X=۲|S)P(S)} \\ &= \frac{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}\times\frac{۱}{۲}} \\ &= \frac{۱}{۲} < \frac{۲}{۳} \end{aligned}$$

در صورتی که برای $x = ۸$،

$$P(L \mid X = ۸) = ۱ > \frac{۲}{۳}$$

مراجع

[1] Martin Gardner Aha! Gotcha, W.H. Freeman and Company, New York , (1981).

[2] Kent G.Merryfield, Ngoviet and Saleem Watson, "The wallet paradox", American Mathematical Monthly, August-September (1997).

[3] Steven J.brams and D.Marc Kilgure, "The Box problem: To switch ar not to switch" Mathemathics Magazine, February (1995), Volume 68, Number 1.