برخی ویژگیهای متغیرهای تصادفی وابسته

محمد امینی دهک [1]

چکیده

هدف اصلی این مقاله، معرفی برخی از ویژگیهای متغیرهای تصادفی، و پیشامدهای تصادفی وابسته منفی است، که مشابه آنها برای متغیرهای تصادفی مستقل برقرار است. کاربرد این خواص در رابطه با قضایای حدی متغیرهای تصادفی وابسته، [۱] و [۲] و [۳] و ارائه مثالهای متنوع در این مقاله مورد توجه قرار گرفته است.

۱ مقدمه و تعاریف

وابستگی منفی بین متغیرهای تصادفی، موضوع مورد علاقه بسیاری از آمارانان در سالهای اخیر بوده است. چون در بسیاری از مدلهای تصادفی، فرض استقلال متغیرهای تصادفی برقرار نیست و در واقع افزایش در بعضی از متغیرها با کاهش متغیرهای دیگر در ارتباط است، بنابراین فرض وابستگی منفی مناسبتر خواهد بود. به عنوان مثال در توزیع نرمال چند متغیره با ضرایب همبستگی منفی ($\rho_{ij} \leq 0$) مسلماً وابستگی مثبت بین متغیرهای تصادفی برقرار نمی‌باشد. علاوه بر این، کمیتهای تصادفی متعددی در آمار احتمال وجود دارند که وابستگی منفی بین آنها برقرار می‌باشد، نمونه‌های متنوعی را می‌توان در مراجع ([۴] و [۵] و [۶]) پیدا نمود. در نتیجه با توجه به اهمیت این خصوصیت متغیرهای تصادفی در ادامه مقاله [۸]، این مقاله تنظیم و ارائه می‌شود.

تعریف ۱—۱

الف) دو متغیر تصادفی Y, X به طور منفی وابسته مربعی (NQD) [2] هستند، اگر برای هر دو عدد حقیقی y, x

$$P[X \leq x, Y \leq y] \leq P[X \leq x].P[Y \leq y] \qquad (۱)$$

ب) دو متغیر تصادفی Y, X به طور مثبت وابسته مربعی (PQD) [3] هستند، اگر برای هر دو عدد حقیقی y, x

$$P[X \leq x, Y \leq y] \geq P[X \leq x].P[Y \leq y] \qquad (۲)$$

به سادگی می‌توان نشان داد که نامساویهای (۱) و (۲) به

[1] محمد امینی دهک، گروه ریاضی، دانشگاه سیستان و بلوچستان
[2] Negative quadratic dependent
[3] Positive quadratic dependent

ترتیب با نامساویهای (۳) و (۴) معادلند

$$P[X > x, Y > y] \leq P[X > x].P[Y > y] \qquad (۳)$$

$$P[X > x, Y > y] \geq P[X > x].P[Y > y] \qquad (۴)$$

تعریف ۲—۱

دو پیشامد A و B به طور منفی وابسته‌اند اگر توابع نشانگر آنها NQD باشند.

تعریف ۳—۱

الف) متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, ..., X_n$ به طور منفی وابسته‌اند، اگر برای تمام اعداد حقیقی $x_۱, x_۲, ..., x_n$ هر دو نامساوی زیر برقرار باشند

$$P[\bigcap_{i=۱}^{n}(X_i \leq x_i)] \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i \leq x_i)] \qquad (۵)$$

$$P[\bigcap_{i=۱}^{n}(X_i > x_i)] \leq \prod_{i=۱}^{n} P(X_i > x_i)] \qquad (٦)$$

ب) متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, ..., X_n$ دوبه‌دو به طور منفی وابسته‌اند، اگر برای هر $(i \neq j)$ X_i, X_j NQD باشند. نامساویهای (۵) و(٦) برای $n = ۲$ معادلند، ولی مثال زیر نشان می‌دهد که برای $(n \geq ۳)$ همواره معادل نیستند.

ج) یک دنباله نامتناهی از متغیرهای تصادفی $\{X_n, n \geq ۱\}$ به طور منفی وابسته است اگر هر زیرمجموعه متناهی از آن وابسته منفی باشد.

مثال ۱.۱ (ابراهیمی و قوش ۱۹۸۱): فرض کنید متغیرهای تصادفی $X_۱, X_۲, X_۳$ دارای توزیع توأم زیر باشند

$$p(\circ, ۱, ۱) = p(۱, \circ, ۱) = p(۱, ۱, \circ) = p(\circ, \circ, \circ) = \frac{۱}{۴}$$

داریم

$$P[X_۱ > \circ, X_۲ > \circ, X_۳ > \circ] = \circ < \prod_{i=۱}^{n} P[X_i > \circ] = \frac{۱}{۸}$$

و

$$P[X_۱ \leq \circ, X_۲ \leq \circ, X_۳ \leq \circ] = \frac{۱}{۴} > \prod_{i=۱}^{n} P[X_i \leq \circ] = \frac{۱}{۸}$$

بنابراین (۵)$\not\Rightarrow$(٦). همچنین اگر تابع احتمال $X_۱, X_۲, X_۳$ بصورت زیر باشد

$$p(۱, \circ, \circ) = p(\circ, ۱, \circ) = p(\circ, \circ, ۱) = p(۱, ۱, ۱) = \frac{۱}{۴}$$

آنگاه نامساوی (۵) برقرار است اما نامساوی (٦) برقرار نیست بنابراین (٦)$\not\Rightarrow$(۵).

تعریف ۴—۱

پیشامدهای تصادفی $A_۱, A_۲, ..., A_n$ به طور منفی وابسته‌اند اگر توابع نشانگر آنها وابسته منفی باشند.

مثال زیر نشان می‌دهد که دوبدو وابسته منفی بودن متغیرهای تصادفی، همواره وابستگی منفی را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۱.۲ فرض کنید $S = \{۱, ۲, \ldots, ۸\}$ با $p[\{i\}] = \frac{۱}{۸}$, $i = ۱, ۲, \ldots, ۸$ و $A_۱ = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$ و $A_۲ = \{۳, ۴, ۵, ٦, ۸\}$ و $A_۳ = \{۲, ۴, ۵, ۷, ۸\}$ و $X_i = I_{A_i}$, $i = ۱, ۲, ۳$ داریم

$$\begin{aligned} P[X_i \leq \circ, X_j \leq \circ] &= \frac{۱}{۸} \\ &\leq P[X_i \leq \circ].P[X_j \leq \circ] \\ &= \frac{۹}{٦۴} \quad \forall i \neq j \end{aligned}$$

بنابراین، $X_۱, X_۲, X_۳$ دوبدو به طور منفی وابسته‌اند، ولی برای وابستگی منفی داریم:

$$\begin{aligned} P[X_۱ > \circ, X_۲ > \circ, X_۳ > \circ] &= \frac{۲}{۸} \\ &> \prod_{i=۱}^{۳} P[X_i > \circ] \\ &= (\frac{۵}{۸})^۳ \end{aligned}$$

مثال فوق، همچنین نشان می‌دهد که پیشامدهای $A_۱, A_۲, A_۳$ به طور منفی وابسته نیستند ولی دوبه‌دو به طور منفی وابسته‌اند. مثال بعد نشان می‌دهد که $X_۱, X_۲, X_۳$ به طور منفی وابسته هستند ولی $X_۳$ و $Y = X_۱ + X_۲$ به طور منفی وابسته نیستند.

مثال ۱.۳ فرض کنید X_3, X_2, X_1 دارای تابع احتمال توأم زیر باشند:

$$\begin{aligned} p(0,0,0)=p(1,0,1) &= 0 \\ p(0,0,1)=p(0,1,0) &= 0.2 \\ p(0,1,1)=p(1,1,0)=p(1,1,1) &= 0.1 \\ p(1,0,0) &= 0.3 \end{aligned}$$

الف) X_3, X_2, X_1 به طور منفی وابسته‌اند. (ابراهیمی و قوش ۱۹۸۱).

ب) X_3 و $Y = X_1 + X_2$ به طور منفی وابسته نیستند زیرا برای $1 \le x \le 0$ و $2 \le y \le 1$ داریم

$$P[Y \le y, X_3 \le x] = \frac{5}{10} > P[Y \le y].P[X_3 \le x] = \frac{48}{100}$$

۲ نتایج اصلی

در این بخش، قضایا و نتایج متنوعی که بیان‌کننده خواص متغیرهای تصادفی وابسته منفی و پیشامدهای تصادفی وابسته منفی می‌باشد و همچنین مثالهای گوناگونی از متغیرهای تصادفی با توزیهای خاص چند متغیره که بطور منفی وابسته‌اند را ارایه می‌نماییم.

قضیه ۱.۱ ([۲]) فرض کنید $X_n, \dots, X_2, X_1$ متغیرهای تصادفی به طور منفی وابسته باشند آنگاه

الف) $E(\prod_{i=1}^{n} X_i) \le \prod_{i=1}^{n} E(X_i)$

ب) برای توابع یکنوای صعودی (نزولی) $f_n, \dots, f_2, f_1$ متغیرهای تصادفی $f_n(X_n), \dots, f_2(X_2), f_1(X_1)$ نیز به طور منفی وابسته‌اند.

ج) برای مقادیر حقیقی نامنفی $t_n, \dots, t_2, t_1$

$$E(e^{\sum_{i=1}^{n} t_i X_i}) \le \prod_{i=1}^{n} E(e^{t_i X_i})$$

قضیه ۱.۲ دو پیشامد تصادفی B, A وابسته منفی هستند اگر و تنها اگر

$$P(A \cap B) \le P(A).P(B) \qquad (7)$$

اثبات:

شرط لازم. هرگاه $Y = I_B, X = I_A$ آنگاه بنا به تعریف (۲) Y, X NQD هستند. در نتیجه برای مقادیر حقیقی y, x که $1 \le x \le 0$ و $2 \le y \le 1$ داریم

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P[X = 1 \ , \ Y = 1] = P[X > x \ , \ Y > y] \\ &\le P[X > x].P[Y > y] = P(A)P(B) \end{aligned}$$

شرط کافی. فرض کنید نامساوی (۷) برقرار باشد و $1 \le x, y \le 0$ داریم:

$$\begin{aligned} P(X > x, Y > y) &= P[X = 1 \ , \ Y = 1] = P(A \cap B) \\ &\le P(A)P(B) = P(X = 1)P(Y = 1) \\ &= P[X > x \ , \ Y > y] \end{aligned}$$

بنابراین برای تمام اعداد حقیقی y, x نامساوی (۳) برقرار است. پس Y, X NQD هستند و در نتیجه حکم ثابت است.

نتیجه. اگر دو پیشامد تصادفی A و B وابسته منفی باشند آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که

الف) B^c, A^c به طور منفی وابسته‌اند.

ب) B, A^c به طور مثبت وابسته‌اند.

ج) B^c, A به طور مثبت وابسته‌اند.

قضیه ۱.۳ فرض کنید f_2, f_1, f به ترتیب توابع چگالی توأم و چگالی حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی Y, X باشند و

$$f(x,y) \le f_1(x) f_2(y) \quad \forall x, y \in R \qquad (8)$$

آنگاه

الف) Y, X NQD هستند.

ب) اگر Y, X متغیرهای تصادفی نامنفی باشند آنگاه

$$E[X \mid Y = y] \le E(X) \quad w.p.1$$

و

$$E[Y \mid X = x] \le E(Y) \quad w.p.1$$

ج) $F_{x+y} \le F_1 * F_2$

اثبات:
فرض کنید Y, X مطلقاً پیوسته باشند، برای تمام اعداد حقیقی y, x داریم
الف)

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(t,s)dtds \\ &\leq \int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f_1(t)f_2(s)dtds \\ &= F_1(x)F_2(y) \end{aligned}$$

بنابراین Y, X NQD هستند.
ب)

$$\begin{aligned} E[Y \mid X=x] &= \int_{0}^{+\infty} yf(y\mid x)dy \\ &\leq \int_{0}^{+\infty} yf(y) \\ &= E[Y] \quad w.p.1 \end{aligned}$$

و متشابهاً داریم:

$$E[X \mid Y=y] \leq E(X) \qquad w.p.1$$

ج)

$$\begin{aligned} F_{X+Y}(t) &= \int\int_{[x+y\leq t]} f(x,y)dxdy \\ &\leq \int\int_{[x+y\leq t]} f_1(x)f_2(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{t-y} f_1(x)f_2(y)dxdy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-y)f_2(y)dy \\ &= F_1 * F_2 \end{aligned}$$

می‌دانیم که اگر متغیرهای تصادفی Y, X مستقل از هم باشند، آنگاه متغیرهای تصادفی $g(Y), h(X)$ نیز برای هر دو تابع حقیقی g, h مستقل از هم هستند. این خاصیت در مورد متغیرهای تصادفی وابسته منفی همواره برقرار نیست.
مثال زیر ضمن نشان دادن این موضوع، همچنین نشان می‌دهد، که عکس قسمت (الف) قضیه ۱.۳ نیز همواره برقرار نمی‌باشد.

مثال ۱.۴ فرض کنید Y, X دارای تابع احتمال توأم زیر باشند.

$$p(-1,-1) = p(1,0) = 0$$

$$p(0,0) = p(0,-1) = p(-1,0) = p(0,1) = p(1,1) = \frac{1}{9}$$

$$p(1,-1) = p(-1,1) = \frac{2}{9}$$

الف) می‌توان به سادگی نشان داد که زوج تصادفی (X,Y) NQD هست ولی هیچکدام از زوجهای $(X^2,Y), (X,Y^2), (X^2,Y^2), (|X|,|Y|)$ NQD نیستند.
ب) $p(-1,1) = \frac{2}{9} > p_1(-1)p_2(1) = \frac{1}{9}$ بنابراین شرط (۸) برقرار نیست.

تبصره . مثال فوق همچنین نشان می‌دهد اگر Y, X NQD باشند آنگاه قسمت (ب) قضیه ۱.۳ همواره برقرار نیست زیرا

$$E[X \mid Y=-1] = \frac{2}{9} > E(X) = 0$$

و

$$E[Y \mid X=-1] = \frac{2}{9} > E(Y) = \frac{1}{9}$$

بنابراین (۸) یک شرط لازم برای قسمت (ب) قضیه است.

لم. فرض کنید Y یک متغیر تصادفی با $P[Y>0]=1$, $E[\frac{1}{Y}] < \infty$ آنگاه

$$E[\frac{1}{Y}] \geq \frac{1}{E(Y)}$$

قضیه ۱.۴ فرض کنید Y, X دو متغیر تصادفی با

$$E(|X|) < \infty, E[\frac{1}{Y}] < \infty, P[Y>0] = 1$$

الف) اگر X, Y NQD باشند آنگاه
۱- $X, \frac{1}{Y}$ PQD هستند.
۲- $E[\frac{X}{Y}] \geq \frac{E(X)}{E(Y)}$ اگر $E[X] \geq 0$
ب) اگر X, Y PQD باشند آنگاه
۱- $X, \frac{1}{Y}$ NQD هستند.
۲- $E[\frac{X}{Y}] \leq \frac{E(X)}{E(Y)}$ اگر $E[X] \leq 0$

اثبات:
الف) برای هر دو عدد حقیقی x, $y > 0$ داریم

$$P[X \leq x, \frac{1}{Y} \leq y] = P[X \leq x] - P[X \leq x, Y < \frac{1}{y}] \qquad (1)$$

$$\geq P[X \leq x] - P[X \leq x].P[Y < \frac{1}{y}]$$
$$= P[X \leq x].P[\frac{1}{Y} \leq y]$$
$$COV(X, \frac{1}{Y}) = E(\frac{X}{Y}) - E(X).E(\frac{1}{Y}) \geq 0 \quad (2)$$

بنابراین اگر $E(X) \geq 0$ آنگاه $E(\frac{X}{Y}) \geq \frac{E(X)}{E(Y)}$.

ب) متشابهاً قسمت «ب» نیز اثبات می‌شود.

قضیه ۱.۵ پیشامدهای تصادفی $A_1, A_2, ..., A_n$ به طور منفی وابسته‌اند اگر برای هر $2 \leq m \leq n$ و هر جایگشت $(i_1, i_2, ..., i_n)$ از اعداد طبیعی $(1, 2, \ldots, n)$ هر دو نامساوی زیر برقرار باشند

$$P(\bigcap_{j=1}^{m} A_{i_j}) \leq \prod_{j=1}^{m} P(A_{i_j}) \quad (9)$$
$$P(\bigcap_{j=1}^{m} A^c_{i_j}) \leq \prod_{j=1}^{m} P(A^c_{i_j})$$

اثبات:

شرط لازم. تعریف می‌کنیم، $X_i = I_{A_i}, i = 1, 2, ..., n$ بنا به تعریف (۱.۴) متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, ..., X_n$ و در نتیجه $X_1, X_2, ..., X_m$ برای هر $2 \leq m \leq n$ به طور منفی وابسته‌اند، بنابراین برای هر $0 \leq x_i \leq 1$ داریم:

$$P[\bigcap_{j=1}^{m} A_j] = P[\bigcap_{j=1}^{m} (X_j > x_j)] \leq \prod_{j=1}^{m} P[X_j > x_j] = \prod_{j=1}^{m} P(A_j)$$

$$P[\bigcap_{j=1}^{m} A^c_j] = P[\bigcap_{j=1}^{m} (X_j \leq x_j)] \leq \prod_{j=1}^{m} P[X_j \leq x_j] = \prod_{j=1}^{m} P(A^c_j)$$

شرط کافی. اگر نامساویهای (۹) برای هر $2 \leq m \leq n$ برقرار باشند آنگاه به سادگی می‌توان نشان داد که $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$ به طور منفی وابسته‌اند، در نتیجه حکم ثابت است.

مثالهای زیر که نمونه‌هایی از متغیرهای تصادفی وابسته منفی با توزیع چند متغیره خاص هستند را، در مراجع [۴] الی [۶] می‌توان پیدا نمود.

مثال ۱.۵ الف) فرض کنید $X_1, X_2, ..., X_n$ دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{N!}{\prod_{i=1}^{n} x_i!(N - \sum_{i=1}^{n} x_i)!} \prod_{i=1}^{n} p_i^{x_i} (1 - \sum_{i=1}^{n} p_i)^{N - \sum_{i=1}^{n} x_i}$$
$$x_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq N \ , \ p_i \geq 0 \ , \ 0 < \sum_{i=1}^{n} p_i < 1$$

آنگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ به طور منفی وابسته‌اند.

ب) فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک بردار تصادفی نرمال متقارن با $1 \leq i \leq j \leq n \quad Corr(X_i, X_j) = \rho < 0$ آنگاه

۱) $\rho \geq -\frac{1}{n-1}$

۲) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ به طور منفی وابسته‌اند.

ج) (توزیع توأم رتبه‌ها): فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ یک نمونه تصادفی از جامعه باشد و R_i رتبه X_i ، $i = 1, \ldots, n$. آنگاه $R_1, R_2, \ldots, R_n$ به طور منفی وابسته‌اند.

د) (فوق هندسی چند متغیره): فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دارای تابع احتمال توأم زیر باشند

$$p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\prod_{i=1}^{n} \binom{M_i}{x_i} \binom{M - \sum_{i=1}^{n} M_i}{N - \sum_{i=1}^{n} x_i}}{\binom{M}{n}}$$
$$x_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq N \ , \ \sum_{i=1}^{n} M_i \leq M$$

آنگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ به طور منفی وابسته‌اند.

ذ) (توزیع دیرلکت): فرض کنید $X_1, X_2, \ldots, X_n$ دارای چگالی توأم زیر باشند،

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\Gamma(\sum_{i=0}^{n} \theta_i)}{\prod_{i=0}^{n} \Gamma(\theta_i)} (1 - \sum_{i=1}^{n} x_i)^{\theta_0 - 1} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\theta_i - 1}$$
$$x_i \geq 0 \ , \ \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 1 \ , \ \theta_i \geq 1 \quad \forall i = 1, 2, \ldots, n$$

آنگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ به طور منفی وابسته‌اند.

قضیه ۱.۶ ([۲]) فرض کنید $f, f_1, f_2, \ldots, f_n$ به ترتیب توابع چگالی توأم و حاشیه‌ای متغیرهای تصادفی $X_1, X_2, \ldots, X_n$ باشند و برای تمام مقادیر حقیقی $x_1, x_2, \ldots, x_n$،

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$$

الف) $X_1, X_2, \ldots, X_n$ به طور نامنفی وابسته‌اند.

ب) هرگاه $X_1, X_2, \ldots, X_n$ نامنفی باشند آنگاه برای هر $i \neq j$

$$E[X_i \mid X_j = x_j] \leq E(X_i)$$

[1] Amini, M. Azarnoosh, H. A. Bozorgnia, A. (1999). The almost sure convergence of weighted sums of uniformly bounded random variables. *Journal of sciences Islamic Repablic of Iran* P:112-115.

[2] Amini, M. Azarnoosh, H. A. Bozorgnia, A. (1999). Some cintributions to lilmit Theorems for ND random variable. Ph.D of Thesis.

[3] Bozorgnia, A. Patherson, R. F. and Taylor, R. l. (1996). Limit theorems for dependent random variables. *World Congress Nonlinear Analysis'92.* P. 1639-1650.

[4] Block, H. W, Savits, T. H. and Shaked, M. (1982). Some concepts of negative dependence. *Ann. Probab* Vol. 10, No. 3, P. 765-772.

[5] Ebrahimi, N. and Ghosh, M. (1981). Multivariate negative dependence. *comm.statist*, A10(4). 307-337.

[6] Joag-Dev, K. and Proschan, F.(1983). Negative association of random variable's with applications. *The Annals of statistics.* Vol. 11, No. 1. P. 286-295.

[7] Lemann, E. L.(1966). some Conepts of dependence. *Ann.math.statist.* 43, P. 1137-1153.

[۸] امینی و بزرگنیا(۱۳۷۵)، انواع پیوندهای منفی و روابط بین آنها، اندیشه آماری، سال اول، شمارهٔ اول، صفحه ۳۴–۲۷.