

مطلبی درباره استقلال پیشامدها

محمدحسین پورسعید^۱

چکیده

در این نوشتار رابطه بین «استقلال دو پیشامد» و «استقلال افرازهای آن دو پیشامد» مورد بررسی قرار می‌گیرد.

این سؤال مطرح شود که آیا این دو مقوله با هم ارتباط دارند؟ حال نشان می‌دهیم که در حالت کلی اگر افرازهای دو پیشامد مستقل از هم باشند، آنگاه دو پیشامد مستقل از هم خواهند بود ولی عکس این مطلب در حالت کلی نمی‌تواند درست باشد. اگر پیشامدهای A و B به ترتیب به m و n زیرپیشامد افراز شده بطوریکه زیرپیشامدهای A با زیرپیشامدهای B دو بدو مستقل از هم باشند یعنی

$$\bigcup_{i=1}^m A_i = A \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

$$\& i, j = 1, 2, \dots, m : A_i \cap A_j = \emptyset$$

$$\bigcup_{i=1}^n B_i = B \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

$$\& i, j = 1, 2, \dots, n : B_i \cap B_j = \emptyset$$

$$\forall i, j \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n :$$

$$P(A_i \cap B_j) = P(A_i) \cdot P(B_j)$$

فرض کنید که اطلاعات زیر مربوط به تعداد تلویزیون X و رادیو Y ، خانوارهای ساکن در یک شهرک است و می‌خواهیم استقلال بین «داشتن تلویزیون» و «داشتن رادیو» را بررسی نماییم.

جدول شماره ۱:

	۳	۲	۱	۰	Y
X	۱۵	۴۵	۱۸۰	۶۰	۰
	۵۰	۱۵۰	۶۰۰	۲۰۰	۱
	۳۵	۱۰۵	۴۲۰	۱۴۰	۲

در این صورت پیشامد «داشتن تلویزیون» شامل زیرپیشامدهای «داشتن یک و دو تلویزیون» و پیشامد «داشتن رادیو» شامل زیرپیشامدهای «داشتن یک، دو و سه رادیو» خواهد بود و بدیهی است که «استقلال بین داشتن تلویزیون و داشتن رادیو» مفهومی متفاوت از «استقلال بین حالت‌های مختلف داشتن تلویزیون و حالات مختلف داشتن رادیو» را دارد و ممکن است

^۱ محمدحسین پورسعید، گروه ریاضی، دانشگاه لرستان

جدول شماره ۲:

۳	۲	۱	۰	Y	X
۱۵	۴۵	۱۸۰	۶۰		۰
۵۰	۶۰۰	۱۵۰	۲۰۰		۱
۳۵	۱۰۵	۴۲۰	۱۴۰		۲

همانطوریکه ملاحظه می‌شود پیشامد «داشتن رادیو» اجتماعی از سه پیشامد $(\bigcap_{i=1}^3 A_i)$ و پیشامد «داشتن تلویزیون» نیز اجتماعی از دو زیر پیشامد $(\bigcap_{j=1}^2 B_j)$ است بنابراین:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) = \frac{1700}{2000} = 0/85$$

$$P\left(\bigcup_{j=1}^2 B_j\right) = \frac{1700}{2000} = 0/85$$

$$P\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) \cdot P\left(\bigcup_{j=1}^2 B_j\right) = 0/7225$$

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^3 A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^2 B_j\right)\right) = \frac{1360}{2000} = 0/68$$

یعنی دو پیشامد از هم مستقلند ولی اگر پیشامدهای «داشتن دو رادیو» و «داشتن یک تلویزیون» به عنوان زیر پیشامدهایی از «داشتن رادیو» و «داشتن تلویزیون» در نظر گرفته شوند، خواهیم داشت

$$P(A_2) = \frac{750}{2000} = 0/375$$

$$P(B_1) = \frac{1000}{2000} = 0/5$$

$$P(A_2) \cdot P(B_1) = 0/1875$$

$$P(A_2 \cap B_1) = \frac{600}{2000} = 0/3$$

یعنی دو زیر پیشامد فوق از هم مستقل نیستند.

در اینصورت نشان می‌دهیم هر اجتماعی از زیر پیشامدهای A مستقل از هر اجتماعی از زیر پیشامدهای B است. بدون اینکه خللی به کلیت مسئله وارد آید فرض می‌کنیم که دو اجتماع دلخواه از زیر پیشامدهای A و B بصورت $\bigcup_{i=1}^k (A_i)$ و $\bigcup_{j=1}^p (B_j)$ باشند، در اینصورت خواهیم داشت

$$P\left(\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cap \left(\bigcup_{j=1}^p B_j\right)\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^k \bigcup_{j=1}^p (A_i \cap B_j)\right)$$

نظر به اینکه A_i ها و B_j ها عضوهایی از افزایشهای A و B بوده که مستقل از یکدیگرند، داریم

$$\begin{aligned} &= \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p P(A_i \cap B_j) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p P(A_i) \cdot P(B_j) \\ &= \sum_{i=1}^k P(A_i) \cdot \sum_{j=1}^p P(B_j) = P\left(\bigcup_{i=1}^k A_i\right) \cdot P\left(\bigcup_{j=1}^p B_j\right) \end{aligned}$$

حال با توجه به داده‌های جدول شماره ۱ اگر پیشامدهای «نداشتن رادیو، داشتن یک رادیو، دو رادیو و سه رادیو» را به ترتیب با A_0, A_1, A_2, A_3 و پیشامدهای «نداشتن تلویزیون، داشتن یک تلویزیون و دو تلویزیون» را به ترتیب با B_0, B_1, B_2 نشان دهیم، به آسانی می‌توان نشان داد A_i ها با B_j ها دو به دو مستقل از هم هستند. بنابراین حتی بدون انجام محاسبات و با توجه به مطلب فوق «داشتن رادیو» یعنی $\bigcup_{i=1}^3 A_i$ از پیشامد «داشتن تلویزیون» یعنی $\bigcup_{j=1}^2 B_j$ مستقل خواهد بود.

اکنون با تغییر در داده‌های جدول شماره ۱ حالتی را در نظر می‌گیریم که دو پیشامد A و B از همدیگر مستقلند ولی با این وجود می‌توان زیر پیشامدهایی از A و B را یافت بطوریکه از هم مستقل نباشند. به همین منظور تحویل یافته جدول شماره ۱ را بصورت زیر در نظر می‌گیریم