آشنایی با فرایند نقطه ای

نبز اسمعیل زاده[۱]

چکیده

یک فرایند نقطه ای ، مدلهایی برای الگوهای بی قاعدهٔ نقاط ارائه می کند. در این مقاله فـرایـنـد نقطـه ای را در فضـای کلـی R^d تعریـف می کنیم و عملهایی را روی فرایند نقطه ای مبدأ جهت سازگاری فرایند با وضعیت مورد بحث در عمل معرفـی می کنیم. گشتاور مرتبهٔ دوم کاهش یافته یا تابع K را همراه با چند قضیه که به آن جنبهٔ کاملاً شهودی و کاربردی می دهند ارائه می کنیم.

کلمات کلیدی: فرایند نقطه ای ، گشتاور مرتبهٔ دوم کاهش یافته

۱ مقدمه

داده هایی بـه شـکـل مـجـمـوعـه ای از نقـاط را کـه بـه طـور نامنظم وبی قـاعـده داخل یک ناحیـه توزیع شده انـد، الگوهـای نقطه ای[۲] گویند.

هدف ، بنا کردن مدلهایی بـرای توزیـع تصـادفی نقـاط در یـک فضاست. فرایندهای نقطه ای، مدلهای مناسبی برای چنین داده هـایی هستند. فراینـد نقطـه ای در مـدل سـازی کاربردهـای متعـددی دارد. هر کدام از موارد زیر را می توان به عنوان یـک الـگوی نقطه ای در نظر گرفت و با استفاده از فرایند نقطه ای آنها را مدل سازی کرد.

۱) مکانهای درختان در یک جنگل؛

۲) مکانهای تانکها در میدان جنگ؛

۳) مکانهای موردهـای یـک بیمـاری خـاص در یـک ناحیـهٔ جغرافیایی.

ابتدا بعضی موضوعات پایـه ای و اساسی در رابطـه بـا مـدل سازی پخش تصادفی نقاط در یـک فضـا را بیـان مـی کنیـم. در ادامه اندازه گشتاور دوم کاهش یافته[۳] یا تـابع K را کـه بسـیاری جاهـا بـه عنـوان ابـزار مفیـدی بـرای تحلیـل الگوهـای نقطـه ای فضایی[۴] پذیرفته شده است، معرفی می کنیم [۴]،[۵].

۲ تعریف فرایند نقطه ای

یک فـرایند نـقـطـه ای، مـدلـهایی برای الـگوهای بی قـاعده نقاط ارائه می کند. یک فـرایند نقطه ای روی R^d، متغیری تصـادفی است که مـقـادیرش را در فضای اندازه پذیر $[F,\mathcal{F}]$ می گیرد که F خانوادهٔ همهٔ دنباله های φ از نقـاط R^d است کـه در دو شـرط زیـر صدق می کنند:

۱) دنبالـهٔ φ بـه طـور موضعـی متنـاهی است (یعنی هـر زیـر مجموعهٔ کراندار R^d باید شامل فقط تعدادی متناهی از

---

[۱] گروه ریاضی، دانشگاه کرمان

[۲] Point Patterns

[۳] Reduced

[۴] Spatial

نقاط φ باشد.)

۲) دنباله ساده است .(یعنی $x_i \neq x_j$ اگر $i \neq j$)

و $\mathcal{F}$ کوچکترین σ-میدان روی F است که همهٔ توابع $\varphi \mapsto \varphi(B)$ را اندازه پذیرمی سازد . $\varphi(B)$ تعداد نقاط دنبالهٔ φ داخل B متعلق به مجموعه های بورل کراندار را نشان می دهد. نقاط فرایند ، x_i ، را پیشامدهای فرایند می نامیم، به این جهت که آنها را از نقاط دلخواه در R^d متمایز کنیم. بدین ترتیب یک فرایند نقطه ای N تابعی اندازه پذیر از فضای احتمال $[\Omega, \mathcal{A}, P]$ به $[F, \mathcal{F}]$ است. به طور شهودی فرایند نقطه ای ، یک انتخاب تصادفی از یکی از دنباله های φ در F است.

فرایند نقطه ای را می توان یا به صورت مجموعه های تصادفی از نقاط گسسته در نظر گرفت یا به صورت اندازه های تصادفی که تعداد نقاط در هر ناحیه فضایی را شمارش می کند. مطابق این دو ، نمادهای مختلف برای نمایش فرایند نقطه ای وجود دارند :

$x \in N$ بیان می کند که نقطهٔ x متعلق به دنبالهٔ تصادفی φ است،

$N(B) = n$ بیان می کند که مجموعهٔ B شامل n نقطه از N است.

فرض کنید E یک زیر مجموعه فضای اقلیدسی باشد، می خواهیم یک نماد مناسب برای تابعی که تعداد تصادفی نقاط در یک مجموعهٔ کراندار را شمارش کند، معرفی کنیم. فرض کنید که $\{X_n , n \geq 0\}$ عناصر تصادفی در E هستند که نقاط تصادفی در فضای وضعیت E را نشان می دهند . اگر اندازهٔ زیر را تعریف کنیم :

$$I_{X_n}(A) = \begin{cases} 1 ; & X_n \in A \\ 0 ; & X_n \notin A \end{cases}$$

آنگاه با مجموعیابی روی n ،تعداد کل نقاط تصادفی را که در مجموعهٔ A قرار می گیرند به دست می آوریم . حال اگر اندازهٔ شمارشی N را با $N(.) = \sum_n I_{X_n}(.)$ تعریف کنیم آنگاه:

$$N(A) = \sum_n I_{X_n}(A)$$

تعداد تصادفی نقاطی است که در مجموعهٔ A می افتند. N یک فرایند نقطه ای است و $\{X_n\}$ نقاط نامیده می شوند . نماد طوری طرح شده که به طور صریح وابستگی اندازهٔ شمارشی را به نقاطش نشان می دهد.

به عنوان کاربردی عملی از یک فرایند نقطه ای فرض می کنیم که داده های موجود برای تحلیل شامل مکانهای همه مورد های یک بیماری خاص باشد. مکانها می توانند محل اقامت یا محل تولد یا محل کار بیمار باشند. این موردها از یک سرشماری کامل یا در صورت ممکن نبودن سرشماری، یک نمونه گیری تصادفی مناسب داخل یک ناحیهٔ جغرافیایی مشخص در یک دورهٔ زمانی $(0 , T)$ به دست آمده اند. چارچوب مدل سازی مناسب برای چنین داده هایی فرایند نقطه ای فضایی است. در این چارچوب ، مکان داده ها x_i ; $i = 1,2,\ldots$ را به عنوان یک تحقق جزئی فرایند در ناحیهٔ A در نظر می گیریم.

روشی دیگر، گردآوری داده ها در اندازه های شمارشی $N(A_j)$، تعداد موردها در ناحیه $A_j \in A$ است. این عمل، ساختار فضایی خوب داده ها را از بین می برد و تا جایی که ممکن است باید از آن پرهیز شود. این نکته اهمیت استفاده از خود مکانهای واقعی موردها، x_i، را به عنوان تحققی از فرایند نقطه ای در مقابل تجمع آنها در یک اندازهٔ شمارشی نشان می دهد.

هر مکان x_i ممکن است با یک زمان t_i مثلاً زمان تولد یا زمان تشخیص بیماری تکمیل شود. در این صورت مجدداً می توان یک فرایند نقطه ای (x_i , t_i) روی $R^2 \times R$ برای این داده ها در نظر گرفت.

به عنوان یکی از رایجترین مدلهای فرایند نقطه ای می توان به فرایند پواسون اشاره کرد.

۳ توزیع یک فرایند نقطه ای

توزیع یک فرایند نقطه ای N به وسیلهٔ احتمال

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(Y) &= P(N \in Y) \\ &= P(\omega \in \Omega : N(\omega) \in Y) \quad ; Y \in \mathcal{F} \end{aligned}$$

و اندازهٔ میانگین فرآیند نقطه ای را به صورت

$$\mu(A) = E[N(A)]$$

تعریف می کنیم. بدین ترتیب $\mu(A)$ تعداد نقاط مورد انتظار در ناحیهٔ A است.

۴ مانایی و همسانگردی

فرایند نقطه ای N را در نظر می گیریم. برای هر $x \in E$ فرایند نقطه ای $N_x = \sum I_{X_n - x}$ را تعریف می کنیم، که در آن نقاط فرایند N به وسیلهٔ بردار x انتقال داده می شوند. در این صورت، N ماناست هرگاه برای هر x، N_x هم توزیع با N باشد. در حقیقت یک فرایند را مانا[۵] گوییم هرگاه هر گزاره احتمالی درباره فرایند در هر ناحیهٔ A تحت انتقال دلخواه A، ناوردا[۶] باشد. اگر همین ناوردایی تحت دوران نیز برقرار باشد، فرایند را همسانگرد[۷] گوییم. یعنی در صورتی که هیچ اثر جهتی وجود نداشته باشد. در حقیقت همسانگرد بودن فرایند دلالت براین دارد که فرایند در جهتهای مختلف ویژگیهای یکسانی از خود بروز می دهد.

۵ عملهایی روی فرایند نقطه ای

به منظور مطالعهٔ مسائل واقعی، اغلب به ساختن مدلهای فرایند نقطه ای سازگار با وضعیت مورد بحث نیاز پیدا می کنیم. فرایند های نقطه ای جدید با ترکیب یا تبدیل فرایند های نقطه ای مبدأ حاصل می شوند. در اینجا سه عمل اساسی را که فرایند نقطه ای جدید را از یک فرایند مبدأ تولید می کنند بیان می کنیم. این سه عمل عبارت اند از:

۱) برهمنهی[۸]

۲) فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده[۹]

۳) فرایند نقطه ای تنک شده[۱۰]

۵ـ۱ برهمنهی

فرض کنید N_1 و N_2 دو فرایند نقطه ای با توزیع های P_1 و P_2 باشند. فرایند نقطه ای N را به صورت

$$N = N_1 \bigcup N_2$$

در نظر بگیرید. N برهمنهی N_1 و N_2 نامیده می شود. فرض کنید با احتمال یک، مجموعه های نقاط N_1 و N_2 متداخل نباشند. در این صورت

$$N(A) = N_1(A) + N_2(A) .$$

واضح است که اندازهٔ میانگین و شدت (در حالت مانایی) فرایند N عبارت اند از

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

اگر توزیع N را با P نمایش دهیم آنگاه

$$P = P_1 * P_2$$

که * نماد پیچش P_1 و P_2 است.

۵ـ۲ فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده

یک فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده با ضمیمه کردن مشخصه ای (نشانه [۱۱]) به هر نقطه فرایند مبدأ حاصل می شود. بدین ترتیب یک فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده روی R^d دنباله ای تصادفی مانند $\psi = \{[x_n, m_n]\}$ است که نقاط x_n با هم تشکیل یک فرایند نقطه ای در R^d می دهند و m_n ها نشانه های نظیر هر x_n هستند. نشانه های m_n ممکن است ساختاری پیچیده داشته باشند. آنها متعلق به یک فضای داده شدهٔ نشانه های M هستند. ماتس[۱۲] در سال ۱۹۶۳ نظریهٔ فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده را بنا نهاد. کاربردهای اولیهٔ آن در نظریهٔ صف بود. در زیر

---

[۵] Stationary

[۶] Invariant

[۷] Isotropic

[۸] Superposition

[۹] Marked

[۱۰] Thinned

[۱۱] mark

[۱۲] Mathes

چند حالت خاص از یک فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده را بیان می کنیم :

- برای x مرکز یک ذره، m حجم ذره باشد،
- برای x مکان یک درخت، m قطر تنه درخت یا ارتفاعش باشد،
- برای x مرکز یک اتم، m نوع اتم باشد.

نشانه ها اساساً می توانند متغیرهای پیوسته باشند، مانند دو مثال اول یا نوع را نشان دهند، مانند مثال سوم (که در این مورد اغلب اصطلاح فرایند نقطه ای چند متغیره به کار می رود).

فرایند نقطه ای نشانه گذاری شده ψ را می توان مانند یک فرایند نقطه ای معمولی روی $R^d \times M$ در نظر گرفت. نماد اندازهٔ شمارشی تصادفی را می توان مورد استفاده قرار داد. برای مجموعهٔ بورل B و L در M تعداد نقاط ψ در B با نشانه هایی در L ، با نشان $\psi(B \times L)$ داده می شود.

۳ ـ ۵ فرایند نقطه ای تنک شده

فرایند $N' = \sum Z_n I_{X_n}$ را در نظر بگیرید که در آن Z_n فقط مقادیر صفر و یک را می گیرد، بدین ترتیب N' یک فرایند نقطه ای است که نقاط آن زیر مجموعه نقاط N هستند. اگر Z_n ها مستقل و همتوزیع باشند و هم چنین مستقل از N با $P(Z_n = 1) = p$ ، آنگاه N' از حذف تصادفی مستقل نقاط فرایند مبدأ N نتیجه می شود و یک فرایند تنک شده از N نامیده می شود.

گزاره ۱ : فرض کنید که $\{X_n\}$ عناصر تصادفی فضای اقلیدسی E_1 هستند به طوری که $\sum_n I_{X_n}$ یک فرایند نقطه ای است . فرض کنید J_n عناصر تصادفی i.i.d از فضای اقلیدسی E_2 با توزیع احتمال مشترک F هستند . همچنین فرض کنید که فرایند نقاط $\{X_n\}$ و دنباله J_n روی فضای احتمال یکسانی تعریف شده اند و مستقل اند. در این صورت فرایند نقطه ای $\sum_n I(X_n, J_n)$ روی $E_1 \times E_2$ دارای اندازهٔ میانگین $\mu \times F$ است ، یعنی اگر $A_i \subset E_i \; ; \; i = 1,2$ در این صورت

$$\mu \times F(A_1 \times A_2) = \mu \times F((e_1,e_2): e_1 \in A_1, e_2 \in A_2)$$
$$= \mu(A_1)F(A_2) .$$

برای اثبات گزاره ۱ به [۶] مراجعه شود.

۶ خاصیتهای گشتاور مرتبهٔ اول و دوم یک فرایند نقطه ای

فرض کنید $x_i \; ; \; i = 1,2,\ldots$ نقاط یک فرایند نقطه ای در R^2 باشد. A را هر ناحیهٔ مسطح در نظر بگیرید، مساحت A را با $|A|$ نشان می دهیم و N(A) تعداد پیشامدها در A و dx ناحیهٔ بسیار کوچکی است که x را در بر می گیرد.

تابع شدت[13] (مرتبهٔ اول) ، $\lambda(x)$ ، یک فرایند نقطه ای فضایی به صورت

$$\lambda(x) = \lim_{|dx| \to 0} \left\{ \frac{E[N(dx)]}{|dx|} \right\}$$

تعریف می شود.تابع $\lambda(x)$ متوسط تعداد پیشامدها در هر واحد مساحت در همسایگی نقطه x را نشان می دهد .

تابع شدت مرتبهٔ دوم، $\lambda_2(x,y)$، به طور مشابه تعریف می شود:

$$\lambda_2(x,y) = \lim_{|dx| \to 0, |dy| \to 0} \left\{ \frac{E[N(dx)N(dy)]}{|dx||dy|} \right\}$$

اگر N(dx) و N(dy) ناهمبسته باشند ، $\lambda_2(x,y) = \lambda(x)\lambda(y)$.

یک فرایند نقطه ای مانا (ی مرتبهٔ دوم) است اگر $\lambda(x) = \lambda$ و $\lambda_2(x,y) = \lambda_2(x-y)$ ، و همسانگرد است اگر $\lambda_2(x,y) = \lambda_2(\|x-y\|)$ که در آن $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ فاصله اقلیدسی را نشان می دهد. کمیت

$$\gamma(x,y) = \lambda_2(x,y) - \lambda(x)\lambda(y)$$

را چگالی کوواریانس گویند که در حالت مانایی و همسانگردی فرایند، به صورت زیر در می آید:

[13] Intensity Function

$$\gamma(u) = \lambda_{2}(u) - \lambda^{2}$$

تحت مانایی و همسانگردی، $\lambda = \frac{E[N(A)]}{|A|}$ تعداد مورد انتظار پیشامدها در هر واحد مساحت در هر ناحیه A است. ارائه تعبیر فیزیکی برای تابع شدت مرتبهٔ دوم $\lambda_{2}(s)$ ساده نیست. در عوض اندازهٔ گشتاور دوم کاهش یافته یا تابع K را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$K(s) = 2\pi\lambda^{-2}\int_{0}^{s}\lambda_{2}(u)udu$$

از آنجا که $\lambda_{2}(\|x\|)/\lambda$ شدت مرتبهٔ اول شرطی پیشامدی در x به شرط وجود یک پیشامد در مبدأ است، نتیجه می گیریم که:

قضیه ۱ : $\lambda K(s)$ تعداد مورد انتظار پیشامدها در داخل ناحیه ای به فاصلهٔ s از یک پیشامد دلخواه است.

اثبات[14]

این قضیه یک تعبیر شهودی از تابع K به عنوان یک امید ریاضی را می دهد.

قضیهٔ ۲ : K(s) تحت تنک شدن تصادفی ناورداست.

برهان:

موقعی که پیشامدهای یک فرایند به طور مستقل با احتمال p ثبت می شود و با احتمال 1-p ثبت نمی شود ، در این صورت با استفاده از گزاره ۱ نرخ فرایند پیشامدهای ثبت شده برابر $p\lambda$ است. همچنین تعداد مورد انتظار پیشامدها در داخل ناحیه ای به فاصلهٔ s از یک پیشامددلخواه نیز در p ضرب می شود. پس ناوردایی K(s) از قضیهٔ ۱ نتیجه می شود. یعنی اگر $K'(s)$ اندازهٔ گشتاور دوم کاهش یافته و $\lambda' = p\lambda$ شدت فرایند پیشامدهای ثبت شده باشد و تعداد پیشامدهای مورد انتظار ثبت شده در داخل ناحیه ای به فاصلهٔ s از یک پیشامد ثبت شده را با $N'(s)$ و تعداد کل پیشامدهای مورد انتظار در داخل ناحیه ای به فاصله s از یک پیشامد دلخواه را با N(s) نشان دهیم در این صورت از قضیهٔ ۱ داریم:

$$\lambda' K'(s) = N'(s) \Rightarrow \lambda' K'(s) = pN(s)$$
$$p\lambda K'(s) = p\lambda K(s) \Rightarrow K'(s) = K(s).$$

حال یک فرایند نقطه ای دو متغیره را در بگیرید که در آن پیشامدها از دو نوع مجزا هستند. فرض کنید $N_j(A)$ تعداد پیشامدهای نوع j در ناحیهٔ A باشد. در این صورت تابعهای شدت مرتبهٔ اول و دوم را به ترتیب به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$\lambda_{j}(x) = \lim_{|dx|\to 0}\left\{\frac{E[N_j(dx)]}{|dx|}\right\}; j = 1,2$$

و

$$\lambda_{ij}(x,y) = \lim_{|dx|\to 0, |dy|\to 0}\left\{\frac{E[N_i(dx)N_j(dy)]}{|dx||dy|}\right\}.$$

در حالت مانایی و همسانگردی، $\lambda_j(x) = \lambda_j$ ، تعداد مورد انتظار پیشامدهای نوع j در هر واحد مساحت است، و $\lambda_{ij}(x,y) = \lambda_{ij}(\|x-y\|)$.

تابع Kی دو متغیر به صورت زیر تعریف می شود:

$$K_{ij}(s) = 2\pi(\lambda_i\lambda_j)^{-1}\int_{0}^{s}\lambda_{ij}(u)udu$$

همچنین مشابه قضیهٔ ۱ داریم:

قضیه ۳ : $\lambda_j K_{ij}(s)$ تعداد مورد انتظار پیشامدها نوع j داخل ناحیه ای به فاصلهٔ s از یک پیشامد دلخواه نوع i است.

قضیه ٤ : فرض کنید که پیشامدهای نوع ۱ و ۲ به وسیلهٔ برچسب (نشان) زدن تصادفی یک فرایند مانای همسانگرد تولید می شوند، یعنی، پیشامدها به عنوان نوع ۱ یا ۲ در یک دنباله آزمایشهای برنولی مستقل مشخص می شوند. در این صورت:

$$K_{11}(s) = K_{12}(s) = K_{22}(s).$$

این قضیه از قضیهٔ ۲ نتیجه می شود.زیرا تحت برچسب زدن تصادفی، فرایند پیشامدهای نوع j یک فرایند تنک شده از فرایند نقطه ای تعریف شده از برهمنهی فرایندپیشامدهای نوع ۱ و ۲ است. چون توابع K_{ij} تحت تنک شدن تصادفی ناوردا هستند قضیه اثبات می شود.

---

[14] اسمعیل زاده، نبز، رسالهٔ کارشناسی ارشد آمار (دیماه ۱۳۷۸). مدل سازی فرایند نقطه ای در اپیدمیولوژی زیست محیطی، به راهنمایی دکتر محمد قاسم وحیدی اصل، دانشگاه شهید بهشتی.

۷ برآورد تابع K

فرض کنید که داده های موجود شامل دو نوع پیشامد در ناحیهٔ A و در کل n پیشامد با n_1 تا از نوع ۱ و $n_2 = n-n_1$ تا از نوع ۲ باشند. یک برآوردگر نااریب برای شدت λ_j عبارت است از:

$$\hat{\lambda}_j = \frac{n_j}{|A|} : j = 1,2 \ .$$

با توجه به قضیهٔ ۱ و قرار دادن مقدار میانگین مشاهده شده به جای مقدار مورد انتظار نظری، یک برآوردگر $\lambda_1 K_{11}$ به صورت زیر است:

$$n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} I\left(d_{ij} \le s\right)$$

که در آن $d_{ij} = \left\|x_i - x_j\right\|$. این برآوردگر یک اریبی ذاتی دارد که دلیل آن وجود اثر حاشیه ای پیشامدهای خارج A است که ثبت نمی شوند. روشهای متعددی برای تصحیح این اریبی پیشنهاد شده اند. رایجترین و کاربردی ترین آنها روش ریپلی ([۷]) است. ریپلی وزنهای ω_{ij} را به کار برد. برآوردگر ریپلی برای $\lambda_1 K_{11}(s)$ به صورت زیر است

$$n_1^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} \omega_{ij} I\left(d_{ij} \le s\right)$$

که $\omega_{ii} = 0$ و برای $i \ne j$ ، $\omega_{ij} = \omega\left(x_i, d_{ij}\right)$ معکوس نسبت محیط دایره ای به مرکز x_i وشعاع d_{ij} است که داخل A قرار می گیرد. در حالت کلی ω_{ij} با ω_{ji} برابر نیست.

برای تبدیل این تابع به برآوردگری برای $k_{11}(s)$ ، آن را بر $\tilde{\lambda}_1 = (n_1 - 1)/|A|$ تقسیم می کنیم. در این صورت داریم:

$$\hat{K}_{11}(s) = |A|\{n_1(n_1-1)\}^{-1}\sum_{i=1}^{n_1}\sum_{j=1}^{n_1} \omega_{ij} I(d_{ij} \le s) \ .$$

به طور مشابه برآوردگر $K_{22}(s)$ به صورت زیر است:

$$\hat{K}_{22}(s) = |A|\{n_2(n_2-1)\}^{-1}\sum_{i=n_1+1}^{n_2}\ \sum_{j=n_1+1}^{n_2} \omega_{ij} I(d_{ij} \le s) \ .$$

مراجع

[1] Barnett Vic and Turkman K.F.(1993). *Statistics for the Environment.* John Wiley and Sons Ltd.

[2] Daley, D.J. and Vere - jones , D.(1988). *An Introduction to the Theory Of Point Processes.*Springer - Verlag.

[3] Diggle , P.J. (1983). *Statistical Analysis of Spatial Point Patterns.* London : Academic Press.

[4] Diggle , P.J. and Chetwynd , A.G.(1991). *Second-order Analysis of Spatial Clustering for Inhomogeneous Population.* Biometric 47 , 1155-1163.

[5] Diggle , P.J. and Chetwynd ,A.G., Haggkvist.R and Morris ,S.E.(1995). *Second-order Analysis of Space-time Clustering.* Statistical Methods in Medical Research ,4,124-136.

[6] Resnick I.S.(1992). *Adventures in Stochastic Processes.* Birkhauser Boston.

[7] Ripley ,B.D.(1976). *The Second-order Analysis of Statinary Point Processes.* Journal of Applied Probability 13,255-266.

[8] Ripley ,B.D.(1981) *Spatial Statistics.* Wiley and Sons,New York , Chichester.

[9] Stoyan,D.Kendall,W.S. and Mecke , J.(1995). *Stochastics Geomety and its Application.*Wiley and Sons, New York, Chichester.