مجموعه های تصادفی و استنباط آماری برای مدل بولی

حمید قربانی[۱] خلیل شفیعی[۲]

چکیده

در این مقاله ضمن ارائه نظریهٔ مجموعه های تصادفی ، مدل بولی را معرفی و به استنباط آماری راجع به آن می پردازیم.

۱ مقدمه

الگوهای هندسی پیچیده که در حجم وسیعی از علوم و صنعت و... مشاهده می شوند ، احتیاج به تحلیل آماری دارند . ساختارهای مورد مطالعه در زمین شناسی ، محیطهای متخلخل و بافتهای زیستی نمونه هایی از این الگو ها هستند . در تحلیل چنین الگوهایی ، به مدلهای ریاضی و روشهای آماری مناسب ، احتیاج داریم . گستره ای از مطالعات و تحقیقات که چنین مدلهایی را جستجو می کند به هندسهٔ تصادفی معروف است . هندسهٔ تصادفی به مطالعهٔ ساختارهای هندسی ای می پردازد که تصادفی اند و برای مدل بندی و تحلیل این ساختارها از هندسه ، احتمال و آمار استفاده می کند . هندسهٔ تصادفی مدرن ، دربارهٔ ردهٔ وسیعی از مدلهای احتمال مثل مجموعه های تصادفی در R^d یا فضاهای خاص دیگر به بحث می پردازد . مدلها یا توزیعهای مربوط به مجموعه های تصادفی اندک اند ، لذا در نظریهٔ مجموعه های تصادفی و در نتیجه استنباط آماری برای مجموعه های تصادفی دچار مشکل هستیم . انتظار داریم مدل مناسب برای مجموعه های تصادفی به راحتی شبیه سازی شود و طیف وسیعی از اشکال را پوشش دهد ، همچنین توزیع چنین مدلی صریح باشد تا در مسائل محاسباتی کمتر دچار مشکل شویم. در واقع تا به حال فقط یک مدل برای مجموعه های تصادفی با چنین خصوصیاتی شناسایی شده که به مدل بولی معروف است . مدل بولی، مثال ساده و در عین حال مهمی از مجموعه های بسته تصادفی است . همان طور که اشاره شد این مدل نسبتا انعطاف پذیر و برای محاسبات خوش رفتار است .

در این مقاله ، هندسه تصادفی مدرن و مجموعه های تصادفی را معرفی می کنیم و به مسئله استنباط آماری در مورد مدل بولی می پردازیم .

[۱] دانشجوی کارشناسی ارشد آمار، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

[۲] گروه آمار، دانشکدهٔ علوم ریاضی، دانشگاه شهید بهشتی

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

لازم به تذکر است که در طبقه بندی موضوعی احتمال، توسط انجمن ریاضی آمریکا، یکی از طبقات به احتمال هندسی، هندسه احتمالی و مجموعه های تصادفی اختصاص یافته است، همچنین نظریهٔ مجموعه های تصادفی ابتدا توسط مترون[۳] [٤] و کندال[٤] [۳] ۱۹۷٤ ارائه شده است.

۲ مجموعه بسته تصادفی

برای الگوهای هندسی نامنظم می توان به کمک مجموعه های بستهٔ تصادفی (به اختصار RACS ها) مدلهای ریاضی ارائه داد. RACS ها در نظریهٔ هندسهٔ تصادفی نقش مهمی ایفا می کنند. می توان با تعریف یک توپولوژی یا متریک بر روی $\mathcal{F}$ ، مجموعه زیر مجموعه های بستهٔ R^d ، یک RACS را از دید نظریهٔ اندازه به طور دقیق تعریف کرد (مترون [٤] را ببینید). برای پرهیز از پیچیدگی به طور ساده هر شیء تصادفی که مقادیرش را از $\mathcal{F}$ می گیرد یک RACS نامیده و به ذکر چند مثال اکتفا می کنیم. در بخش ۳ حالت خاص مجموعه های بستهٔ تصادفی یعنی مدل بولی را بررسی خواهیم کرد.

- اگر یک لیوان آب را روی سطحی بریزیم که اثر آب بر آن سطح قابل مشاهده باشد مجموعهٔ حاصل از اثر آب یک مجموعهٔ تصادفی است.
- اگر در جنگلی با چشمان بسته، در جهتی تصادفی حرکت کنیم، سپس چشمان خود را باز کنیم آنچه مشاهده می شود یک مجموعهٔ تصادفی است.
- فرایندهای نقطه ای.
- اگر $\xi(x)$ تابع تصادفی پیوسته ای روی R^d باشد آنگاه $\{x:\xi(x)=t, t\in R\}$ یک مجموعهٔ تصادفی است.
- مجموعهٔ تصادفی $[-\infty,U]$ که در آن U متغیری تصادفی است که دارای توزیع یکنواخت در فاصلهٔ دلخواه [a,b] است.
- گویی به مرکز ثابت و شعاع تصادفی.
- گودالهای ایجاد شده بر اثر اصابت شهاب سنگها به سطح کره ماه، که اصطلاحاً به آنها کراترهای قمری می گویند.
- تومورهای سرطانی.

می دانیم اگر تابع توزیع یک متغیر تصادفی معلوم باشد، رفتار احتمالی آن متغیر نیز معلوم است. تابع اصابت در نظریهٔ مجموعه های تصادفی، نقشی مشابه تابع توزیع در متغیرهای تصادفی دارد. بنابر قضیه شوکه که در ادامه به آن اشاره می شود، توزیع یک مجموعهٔ تصادفی منحصراً توسط تابع اصابت متناظرش، مشخص می شود.

تعریف ۱ : تابع اصابت مجموعهٔ بستهٔ تصادفی X را با T_X نشان می دهیم و به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$T_X(K)=P_X(\{F:F\cap K\neq\phi\}) \quad ; \quad K\in\mathcal{K} \qquad (۱)$$

اگر مقدار $T_X(.)$ به ازای هر $K\in\mathcal{K}$ معلوم باشد آنگاه احتمال P روی Σ کاملاً معلوم است. تابع $Q_X(K)$ را به صورت $1-T_X(K)$ تعریف می کنیم، یعنی

$$Q_X(K)=1-T_X(K)=P(X\cap K=\phi) \quad ; \quad K\in\mathcal{K}$$

مثال ۱ : فرض کنید X یک متغیر تصادفی و $X=(-\infty,x]$ یک مجموعهٔ تصادفی در R باشد آنگاه $T_X(K)=P(x>\inf K)$ برای هر $K\in\mathcal{K}$.

مثال ۲ : فرض کنید $X=\{x\}$ یک مجموعهٔ تصادفی تک عنصری در R^d باشد آنگاه $T_X(K)=P(x\in K)$.

تابع اصابت متناظر با یک RACS دارای خواصی مشابه خواص تابع توزیع یک متغیر تصادفی، مانند صعودی و از راست پیوسته بودن، است. قضیهٔ شوکه وجود این دو خاصیت را به همراه دو خاصیت دیگر شرط لازم و کافی برای وجود یک RACS با تابع اصابت داده شده ای می داند (مترون [٤]).

---
[۳] Matheron

[٤] Kendall

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

تعریف ۲ : مجموعهٔ بستهٔ تصادفی مانا و همسانگرد ـ مجموعهٔ بستهٔ تصادفی X را مانا می گوییم اگر X و مجموعهٔ انتقال یافته $X_x = X \oplus \{x\}$ برای هر $x \in R^d$ دارای توزیع یکسان باشند. طبق قضیه شوکه ، X_x با X هم توزیع است اگر و تنها اگر تابع اصابت تحت انتقال پایا باشد . یعنی :

$$T_X(K) = T_{X_x}(K) \quad , \quad \forall\ x \in R^d \ ; \ K \in \mathcal{K}$$

تساوی بالا معادل است با :

$$T_X(K) = T_X(K_x)$$

اگر X مانا باشد ، برای x متعلق به R^d، $P(x \in X)$ به x بستگی ندارد و $P(x \in X) = P(o \in X)$. همچنین مجموعهٔ تصادفی X را همسانگرد می گوییم اگر توزیع X تحت دوران پایا باشد .

۳ مدل بولی

مدلها یا توزیعهای مربوط به مجموعه های تصادفی اندک هستند، لذا در نظریهٔ مجموعه های تصادفی ودر نتیجه استنباط آماری برای مجموعه های تصادفی دچار مشکل هستیم . انتظار داریم مدل مناسب برای مجموعه های تصادفی به راحتی شبیه سازی شود و طیف وسیعی از اشکال را پوشش دهد ، همچنین توزیع چنین مدلی صریح باشد تا در مسائل محاسباتی کمتر دچار مشکل شویم . در واقع تا به حال فقط یک مدل برای مجموعه های تصادفی با چنین خصوصیاتی شناسایی شده که به مدل بولی معروف است .

تعریف ۳ : مدل بولی ـ فرض کنید $\Phi = \{x_1, x_2, \ldots\}$ فرایند نقطه ای پواسون مانا با شدت λ در R^d باشد . همچنین X_1، X_2 و ... دنباله ای از مجموعه های فشردهٔ تصادفی مستقل و هم توزیع در R^d باشند که از فرایند پواسون Φ مستقل اند. مدل بولی با استفاده از جرمهای x_n و مجموعه های مقدماتی X_n به صورت زیر تعریف می شود :

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty}(X_n + x_n)$$

در تعریف مدل بولی می توان از مجموعه های زیر به عنوان مجموعه های مقدماتی استفاده کرد . قرصهایی با شعاعهای تصادفی، انواع چند ضلعیهای تصادفی ، پاره خطهایی با طول و جهت تصادفی ، خوشه هایی تصادفی از نقاط با تعداد متناهی و ... .

وقتی مجموعه تصادفی از مدل بولی پیروی می کند ، T_X را می توان به شکلی نسبتاً ساده ، به صورت زیر بیان کرد :

$$T_X(K) = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(X_o \oplus \check{K})]\} \qquad (۲)$$

یا

$$T_X(K) = 1 - \exp\{-\lambda E[v_d(\check{X}_o \oplus K)]\} \qquad (۳)$$

که در آن نماد $\oplus$ معرف جمع مینکوفسکی است و طبق تعریف :

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in A} B_y = \bigcup_{x \in B} A_x = \{z : A \cap (\check{B})_z \neq \phi\}$$

همچنین $\check{K} = \{-k, k \in K\}$ و v_d اندازهٔ لبگ در R^d است .

۳ـ۱ مشخصه های اصلی مدل بولی

در این قسمت مشخصه های اصلی مدل بولی را به اختصار معرفی می کنیم:

۱) کسر حجمی ـ کسر حجمی یک مجموعهٔ بستهٔ تصادفی مانا،که آن را با p نشان می دهیم ، نقشی همانند شدت یک فرایند نقطه ای ایفا می کند. اگر B ناحیه ای با حجم واحد باشد، کسر حجمی میانگین نسبتی از ناحیه B است که توسط X پوشانده می شود .

$$p = E(v_d(X \cap B)) \quad ; \quad v_d(B) = 1$$

وقتی X از مدل بولی پیروی می کند ، به دلیل مانایی X مقدار p به ناحیهٔ انتخابی B بستگی ندارد وهمچنین داریم :

$$p = P(o \in X) = P(x \in X) = T_X(\{o\}) \quad ; \quad x \in R^d$$

۲) تخلخل ـ تخلخل را با q نشان می دهیم و احتمال آن است که نقطه ای از فضا در مکمل X واقع شود (یعنی در حفره ها) . فرض کنید $K=\{x\}$ باشد آنگاه :

$$q = Q_X(\{x\}) = P(x \in X') = \exp\{-\lambda E[v_d(X_o)]\}.$$

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

۳) کوواریانس ـ کوواریانس مجموعهٔ تصادفی مانای X را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$c(r) = P(o \in X, r \in X) \quad ; \quad \forall r \in R^d$$

که در آن r نقطه ای دلخواه در R^d است . در واقع کوواریانس، احتمال پوشش دو نقطه ای است که به فاصله r از یکدیگر واقع شده اند . لازم به تذکر است که اگر مجموعهٔ تصادفی مانای X ، همسانگرد هم باشد ، آن گاه c (r) فقط به طول بردار r یعنی $r = \|r\|$ بستگی دارد .

۴) پایائی تحت توسیع ـ اگر X یک مجموعهٔ بستهٔ تصادفی و L مجموعه ای فشرده باشد، طبق رابطه (۵) مجموعهٔ بستهٔ تصادفی $X \oplus L = \{x + l \mid x \in X, l \in L\}$ نیز یک مدل بولی است.

۳ـ۲ تابع توزیع برخورد

در تحلیل آماری مجموعه های بستهٔ تصادفی ، تابع توزیع اصابت نقش بسزائی دارد . حتی در مواردی که تعیین نواحی تخلخل غیر ممکن یا نامناسب است ، تابع توزیع اصابت، توصیفی مناسب از ساختار مکانی مجموعهٔ بستهٔ تصادفی ، به دست می دهد . تابع توزیع برخورد برای مجموعهٔ بستهٔ تصادفی X با به کارگیری مجموعه های آزمون B تعریف می شود که B یک مجموعهٔ محدب و فشرده ، شامل مبدأ o در R^d است. قرار می دهیم :

$$H_B(r) = ۱ - \frac{P(X \cap rB = \phi)}{۱ - p} = ۱ - \frac{P(o \notin (X \oplus r\check{B}))}{۱ - p} \quad ; \quad r \geq ۰$$

که p کسر حجمی X است .

لازم به تذکر است H_B را می توان به عنوان تابع توزیع متغیر تصادفی R تعریف کرد به این مفهوم که اگر $R = \inf\{t : X \cap tB \neq \phi\}$ آنگاه :

$$H_B(r) = P(R \leq r \mid R > ۰)$$

در واقع R کمترین زمانی است که بالنی به شکل B به X اصابت می کند به شرط آن که بالن با حجم اولیه صفر در زمان $t = ۰$، شروع به رشد کرده باشد .

وقتی B پاره خطی با طول واحد است ، تابع توزیع برخورد خطی H_l و هنگامی که B گویی در $R^۳$ با حجم واحد است، تابع توزیع اصابت کروی H_s راپیش رو داریم .

برای مدل بولی از رابطه (۵) داریم :

$$H_B(r) = ۱ - \exp\{-\lambda E[v_d(\check{X}_۰ \oplus rB) - v_d(X_۰)]\} \quad ; r \geq ۰ \qquad (۴)$$

توضیحات بیشتر راجع به کاربرد تابع توزیع اصابت در استنباط آماری مدل بولی در بخش بعد ارائه خواهد شد .

۴ استنباط آماری برای مدل بولی

اولین گام در استنباط آماری برای هر مجموعهٔ بستهٔ تصادفی از جمله مدل بولی ، برآورد پارامترهایی مانند کسر حجمی ، تابع کوواریانس ، تابع اصابت و تابع توزیع برخورد است. در استنباط آماری برای مجموعه های تصادفی همانند استنباط برای فرایندهای نقطه ای مرسوم است که برآورد پارامترها را برای مجموعهٔ تصادفی مشاهده شده در پنجرهٔ W به دست می آورند. مسئله اطلی در تحلیل مدل بولی را می توان به صورت زیر خلاصه کرد:

به شرط داشتن یک مشاهده از مدل بولی، پارامترهای آن شامل شدت فرایند نقطه ای پواسون و توزیع مجموعه های مقدماتی را برآورد کنید .

مسئله دیگر، تصمیم گیری دربارهٔ این مهم است که به شرط داشتن یک مشاهده ، آیا از لحاظ آماری مجازیم مدل بولی را برای توصیف این مشاهده به کار ببریم یا خیر؟ در ادامه فقط مدل بولی مانا و همسانگرد با مجموعه های مقدماتی محدب را مورد بررسی قرار می دهیم .

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

ویل[۵] [۹] حالتی را مطالعه کرده است که فرض همسانگردی برقرار نیست . قبل از ارائه روشهای استنباطی ، پارامترهای مدل بولی را به دو گروه عمده تقسیم می کنیم:

- پارامترهای ماکروسکوپی : پارامترهایی از قبیل کسر حجمی ، تابع کوواریانس و تابع اصابت به این گروه متعلق اند . این پارامترها میانگینهایی مکانی هستند که می توان آنها را مستقیماً به کمک نمونه مشاهده شده از مدل بولی برآورد کرد . وقتی پنجرهٔ W توسعه یافته به R^d میل می کند این برآوردگرها با احتمال یک به مقادیر نظری متناظرشان میل می کنند .
- پارامترها ی میکروسکوپی : پارامترهایی از قبیل توزیع مجموعه های مقدماتی ، میانگین محیط و مساحت این مجموعه ها ، توزیع X_0 به عنوان یک مجموعهٔ تصادفی (که به وسیله $T_{X_0}(.)$ معلوم می شود) و λ ، شدت فرایند نقطه ای پواسون به این گروه متعلق اند . با وجود این که هدف ما از برازش مدلی مناسب به داده های واقعی ، برآورد این پارامترهاست ، این پارامترها را نمی توان مستقیماً برآورد کرد و برای این منظور ابتدا باید برآورد پارامترهای ماکروسکوپی را به دست آورد .

۴ـ۱ برآورد پارامترهای ماکروسکوپی

کسر حجمی : کسر حجمی ساده ترین پارامتر مدل بولی است که آن را با p نشان می دهیم . فرض کنید مجموعهٔ تصادفی X که از مدل بولی پیروی می کند ، در پنجرهٔ W مشاهده شده باشد ، آنگاه:

$$\hat{p}w = \frac{A(X \cap W)}{A(W)}$$

که در آن مساحت را با $A(.)$ نشان داده ایم . همچنین داریم :

$$\mathrm{E}(\hat{p}w) = \frac{1}{\mathrm{A(W)}} \int_{\mathrm{W}} \mathrm{P}(x \in \mathrm{X})dx = p \ ;$$

$$\mathrm{Var}(\hat{p}w) = \frac{1}{\mathrm{A(W)}^2} \int_{\mathrm{W}} \int_{\mathrm{W}} (c(x-y) - p^2)dxdy \ .$$

که $c(.)$ تابع کوواریانس است. برآوردگر $\hat{p}w$ با احتمال یک به p همگراست . یعنی :

$$pw \to p \quad \text{a.s.} \qquad \text{هنگامیکه:} \quad \mathrm{W} \uparrow \mathrm{R}^2$$

طول مرز ویژه : ابتدا فرایند خطی را به صورت زیر تعریف می کنیم:

فرایند خطی Φ مجموعه ای از خطوط غیر مستقیم مانند $l = \{l_1, l_2, ..., l_n\}$ در R^2 است. فرایند خطی Φ برای مجموعهٔ بورل دلخواه B یک اندازهٔ تصادفی به صورت زیر را القاء می کند :

$$\Phi(\mathrm{B}) = \sum_{l \in \Phi} \mathrm{h}_1(l \cap \mathrm{B})$$

که در آن h_1 معرف طول است . اگر اندازه تصادفی Φ مانا باشد ، شدت آن را با $\mathrm{L_A}$ نشان داده و تعریف می کنیم :

$$\mathrm{E}(\Phi(\mathrm{B})) = \mathrm{L_A}.\mathrm{v}_2(\mathrm{B})$$

در واقع $\mathrm{L_A}$ میانگین طول فرایند خطی در واحد سطح است که اصطلاحاً آن را طول مرز ویژه می نامیم . اکنون مدل بولی X را در نظر بگیرید که در پنجرهٔ $\mathrm{W} \subset \mathrm{R}^2$ مشاهده شده است . مرزهای X در پنجرهٔ W فرایند خطی مانایی تشکیل می دهند که آن را Φ می نامیم . اگر مرز W را با $\partial \mathrm{W}$ و مجموعهٔ نقاط داخلی آن را با W° نشان دهیم ، رابطه زیر برقرار است :

$$\Phi(\mathrm{X} \cap \mathrm{W}) = \Phi(\mathrm{X} \cap \mathrm{W}^\circ) + \Phi(\mathrm{X} \cap \partial \mathrm{W}).$$

برآورد نااریب $\mathrm{L_A}$ به صورت زیر است:

$$\hat{\mathrm{L}}_{\mathrm{A,W}} = \frac{\Phi(\mathrm{X} \cap \mathrm{W}) - \Phi(\mathrm{X} \cap \partial^+ \mathrm{W})}{\mathrm{A(W)}} \qquad (5)$$

که در آن $\partial^+ \mathrm{W}$ برای پنجرهٔ $\mathrm{W} = [0,1]^2$ برابر است با :

$$\partial^+ \mathrm{W} = \{(x_1, x_2) \in \mathrm{W} : \max x_i = 1\} \ .$$

عدد تحدب ویژه : فرض کنید به مجموعهٔ مقدماتی X_0 نقطهٔ مماس آن در جهت u یعنی $n_u(X_0)$ را نسبت دهیم (u برداری

---

[۵] Weil

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

متعلق به دایره واحد است). اگر جهت u به سمت بالا باشد $n_u(X_\circ)$ را نقطه مماس مثبت پایینی $X_\circ$ می نامیم . فرض کنید برای جهت دلخواه u و برای همهٔ مجموعه های مقدماتی مدل بولی نقاط مماس را تعیین کنیم ، تعدادی از این نقاط توسط مجموعه های مقدماتی دیگر پوشانده می شوند . نقاط باقیمانده یک فرایند نقطه ای تشکیل می دهند که آن را با $N^+(u)$ نشان می دهیم . مولچانوف[۶] [۵] نشان داده است که شدت فرایند نقطه ای $N^+(u)$ به جهت u بستگی ندارد . اگر این شدت را با N_A^+ نشان دهیم و آن را عدد تحدب ویژه بنامیم ، داریم:

$$N_A^+ = \lambda(1-p)$$

حال فرض کنید مدل بولی X در پنجرهٔ W مشاهده شده باشد ، برای برآورد N_A^+ می توان به صورت زیر عمل کرد . ابتدا u را با جهتی دلخواه در نظر می گیریم و در پنجرهٔ W تعداد نقاط مماس را در جهت u شمارش می کنیم (تعداد این نقاط را اصطلاحاً عدد تحدب می نامیم)، آنگاه :

$$\hat{N}_{A,W}^+ = \frac{N(N^+(u)\cap W)}{A(W)}$$

در واقع عددتحدب ویژه برابراست با متوسط عددتحدب درواحد سطح.

۴ـ۲ برآورد پارامتر های ماکروسکوپی تابعی

تابع کوواریانس :لازم به یادآوری است که $c(r)$ را احتمال پوشش دو نقطه ای تعریف کردیم که به فاصله $r=\|r\|$ از یکدیگر واقع شده اند. برای برآورد $c(r)$ در نقطهٔ دلخواه $r\in R^2$ می توان از عبارت زیر استفاده کرد :

$$\hat{c}(r) = \frac{A\{x\,|\,x\in X\cap W, x+r\in X\cap W\}}{A\{x\,|\,x\in W, x+r\in W\}}$$

$$= \frac{A((X\cap W)\oplus\{o,r\})}{A(W\oplus\{o,r\})} \qquad (۶)$$

با استفاده از تابع کوواریانس وبرای جهتهای مختلف r می توان فرض همسانگردی مجموعهٔ تصادفی را از روی نمونهٔ مشاهده شده بررسی کرد .

احتمال پوشش و تابع اصابت : طبق قضیه شوکه توزیع مجموعهٔ تصادفی X منحصراً توسط $P(K\subset X')$ مشخص می شود که $X' = W\setminus X$ (نماد \ بر تفاضل مجموعه ها دلالت می کند). برای برآورد تابع اصابت ، ابتدا برآورد $P(K\subset X)$ را در نظر می گیریم . یک برآوردگر ناریب برای $P(K\subset X)$ تابع نشانگر $I(K\subset X)$ است، به خاطر مانایی X می توانیم از $I(K_x\subset X)$ نیز استفاده کنیم (K_x انتقال یافته K به اندازه $x\in R^2$ است). با میانگین گیری از این برآوردگرهای نا اریب روی $\{x\,|\,K_x\subset W\}$ برآوردگری ناریب به فرم زیر برای $P(K\subset X)$ به دست می آید :

$$\hat{P}(K\subset X) = \frac{A\{x\,|\,K_x\subset X\cap W\}}{A\{x\,|\,K_x\subset W\}}$$

اکنون می خواهیم تابع اصابت یعنی $T_X(K)$ رابه ازای $K\in\mathcal{K}$ برآورد کنیم :

$$T_{X,W}(K) = 1-\hat{P}(K\subset X')$$

$$= 1-\frac{A\{x\,|\,K_x\subset X'\cap W\}}{A\{x\,|\,K_x\subset W\}}$$

۴ـ۳ برآورد پارامترهای میکروسکوپی

استنباط آماری مدل بولی ازبرآورد λ ، شدت فرایند پواسون و برآورد میانگین مقادیر تابعکهای مینکوفسکی مجموعه های مقدماتی مثل میانگین مساحت ، میانگین محیط و... شروع شده است . در ادامه به دو روش معمول دربرآورد پارامترهای میکروسکوپی مدل بولی اشاره می کنیم .

لازم به تذکر است که اشمیت[۷] [۸] روشی برای برآورد پارامتر λ هنگامی که فرض محدب بودن مجموعه های مقدماتی برقرار نیست ، ارائه کرده است . روش اشمیت را می توان برای مدل بولی با

---

[۶] Molchanov

[۷] Schmidt

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

مجموعه های مقدماتی کراندار به کار برد و فرض محدب بودن مجموعه های مقدماتی ضروری نیست.

روش کمترین تقابل: در این روش به کمک فرمول اشتاینر، تابع توزیع برخورد یا تابع اصابت رابرحسب یک چند جمله ای می نویسیم. ضرایب این چند جمله ای، توابعی از پارامترهای مجهول اند که آنها را می توان با روشهای آماری نظیر رگرسیون برآورد کرد. کریسی ولاسلت[8] [۱] دقیقاً از همین روش در برآورد پارامترهای مدل بولی استفاده کرده اند. برای جزئیات محاسباتی به بخش ۵ مراجعه کنید. هنریش[9] [۲] ثابت کرده است که برآوردگرهای به دست آمده از این روش، با احتمال یک به مقادیر نظری متناظرشان همگرا هستند و به طور مجانبی دارای توزیع نرمال اند.

روش شدتها: رایجترین روش در برآورد پارامترهای مدل بولی به خصوص λ، روش شدتهاست. این روش همانند روش گشتاورها در نظریهٔ آمار کلاسیک است. مولچاخف [۵] نشان داده است که برای مدل بولی که در R^2 مشاهده می شود روابط زیر برقرارند:

$$L_A = (1-p)\overline{U}(X_0)\lambda \qquad (7)$$

$$N_A^+ = (1-p)\lambda \qquad (8)$$

که در آن L_A طول مرز ویژه X درواحد سطح و N_A^+ عددتحدب ویژه و $\overline{U}(X_0)$ میانگین محیط مجموعه های مقدماتی اند. از طرفی می دانیم:

$$p = 1-\exp\{-\lambda\overline{A}(X_0)\} \qquad (9)$$

که در آن $\overline{A}(X_0)$ میانگین مساحت مجموعه های مقدماتی است. در روابط ۷، ۸ و ۹ برآورد پارامترهای p، L_A و N_A^+ جایگزین می شوند وپارامترهای λ، $\overline{U}(X_0)$ و $\overline{A}(X_0)$ برآورد می شوند. اگر برآوردگر λ را با $\hat{\lambda}$ نشان دهیم، آن گاه:

$$\hat{\lambda} = \frac{N_A^+}{1-\hat{p}}$$

و

$$A(W)^{\frac{1}{2}}(\hat{\lambda}-\lambda) \xrightarrow{D} N(0, \frac{\lambda}{1-p})$$

برآوردگرهای به دست آمده از این روش اگر چه اریب اند ولی با احتمال یک همگرا و به طور مجانبی دارای توزیع نرمال اند.

۵ یک مثال

در ادامهٔ مدل بولی با شدت $\lambda = 50$ را که در پنجرهٔ $W = [0,1]^2$ شبیه سازی شده است مورد بررسی قرار می دهیم. در این مثال مجموعه های مقدماتی قرصهایی به شعاع تصادفی R دارای توزیع یکنواخت روی فاصله [۲۰/۱۲۸ , ۵/۱۲۸] هستند. برای ملاحظه برنامه های مورد استفاده در این بخش که در نرم افزار S-plus نوشته شده اند، به [۱۰] مراجعه شود. طبق نمادگذاری بخشهای قبل، مساحت مجموعه های مقدماتی را با $A(X_0)$ و محیط آنها را با $U(X_0)$ نشان می دهیم. برای داده های شبیه سازی شده داریم:

$$\overline{A}(X_0) = E(A(X_0)) = \pi E(R^2) = 0/0336$$

$$\overline{U}(X_0) = E(U(X_0)) = 2\pi E(R) = 0/6184$$

داده های شبیه سازی شده را به ماتریس X با ابعاد ۱۲۸×۱۲۸ تبدیل کرده ایم. لذا در این بخش پنجرهٔ W ماتریسی با درایه های یک و مدل بولی شبیه سازی شدهٔ X ماتریسی با درایه های صفر و یک اند. اگر K یک مجموعهٔ محدب و فشرده در R^2 باشد، طبق فرمول داده شده، برای X_0 محدب داریم:

$$E(A(X_0 \oplus \check{K})) = \overline{A}(X_0) + \frac{1}{2\pi}\overline{U}(X_0)U(K) + A(K)$$

$$Q_X(K) = \exp\{-\lambda\overline{A}(X_0) + \frac{1}{2\pi}\overline{U}(X_0)U(K) + A(K)\}$$

مجموعه های آزمون K را می توان به صورتهای مختلفی در نظر گرفت:

الف) اگر $K=\{x\}$ آنگاه:

$$Q_X(K) = \exp\{-\lambda\overline{A}(X_0)\}$$

---

[8] Cressie and Laslett

[9] Heinrich

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

ب) اگر K پاره خطی به طول l باشد آنگاه :

$$Q_X(K)=\exp\{-\lambda\bar{A}(X_0)+\frac{1}{\pi}\bar{U}(X_0)\}$$

ج) اگر K گویی به مرکز صفر و شعاع ثابت t باشد آنگاه :

$$Q_X(K)=\exp\{-\lambda[\bar{A}(X_0)+\bar{U}(X_0)t+\pi t^2]\}$$

د) اگر K مربعی به ضلع t باشد آنگاه :

$$Q_X(K)=\exp\{-\lambda[\bar{A}(X_0)+\frac{2}{\pi}\bar{U}(X_0)t+t^2]\} \qquad (9)$$

در عمل به وسیلهٔ یک اسکنر مجموعهٔ مشاهده شده را رقومی می کنند . به عبارت دیگر بعد از اسکن ، تصویر به ماتریسی مانند W تبدیل می شود که درایه های آن اعداد یک و صفرند (در واقع اسکنر دراین جا مانند یک تابع نشانگر عمل می کند ، اگر نقطهٔ متناظر درایهٔ ماتریس روی تصویر ، توسط مدل بولی پوشیده شده باشد ، آن درایه مقدار یک ودر غیر این صورت مقدار صفررا اختیار می کند). سپس با استفاده از تحلیلگرهای تصویری که به این منظور طراحی شده اند ، برآورد $Q_X(K)$ را برای مجموعه های مختلف K (که در بالا به آنها اشاره شد) ، به دست می آورند . در ادامهٔ تابع کوواریانس ، تابع اصابت وپارامترهای میکروسکوپی مدل بولی را برای مدل بولی شبیه سازی شده برآورد کرده ایم . طبق مطالب ارائه شده در بخش ٤، اهمیت برآورد تابع کوواریانس ، به دلیل بررسی فرض همسانگردی است . ما تابع کوواریانس رابا استفاده از فرمول ٦ برای دو جهت افقی وعمودی r برآورد کرده ایم . مقادیر برآورد شده در جدول ۱ آمده اند . با توجه به اینکه برای r های یکسان ، تفاوتی معنی دار بین مقادیر برآورد شده وجود ندارد ، فرض همسانگردی برای مجموعهٔ تصادفی معقول به نظر می رسد . همچنین با در نظر گرفتن مجموعهٔ آزمون مربعی $K=tC$ که C مربعی به ضلع ۲ است و با استفاده ازفرمول ۹ تابع اصابت $T_X(tC)$ را به ازای مقادیر مختلف t برآورد کرده ایم (جدول ۲).

با توجه به رابطه ۹:

$$-\log Q_X(tC)=\lambda\{\bar{A}(X_0)+\frac{4t}{\pi}\bar{U}(X_0)t+4t^2\}$$

$$=\beta_0+\beta_1 t+\beta_2 t^2$$

اگر معادلهٔ درجهٔ ۲ بالا را به داده ها برازش دهیم ،داریم :

$$\hat{\lambda}=\frac{\hat{\beta}_2}{4} \quad , \quad \hat{\bar{U}}(X_0)=\frac{\pi\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2} \quad , \quad \hat{\bar{A}}(X_0)=\frac{4\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_2}$$

برای مقادیر $-\log Q_X(tC)$، که درجدول ۲ آمده است داریم:

$$\hat{\beta}_0=۱/۲۱۲۴ \quad , \quad \hat{\beta}_1=۰/۲۱۶۱ \quad , \quad \hat{\beta}_2=۰/۰۱۸۲$$

لذا

$$,\quad \bar{U}(X_0)=\frac{\pi\hat{\beta}_1}{\hat{\beta}_2}=۳۷/۳۰۲۱ \quad , \quad \hat{\bar{A}}(X_0)=\frac{4\hat{\beta}_0}{\hat{\beta}_2}=۲٦٦/٤٦$$

$$\hat{\lambda}=\frac{\hat{\beta}_2}{4}=۰/۰۰٤$$

واحدبرآوردهای بالا پیکسل است، پس ازتبدیل واحد داریم :

$$\hat{\lambda}=٧٤/٥٤ \quad , \quad \hat{\bar{U}}(X_0)=۰/۲۹۱٤ \quad , \quad \hat{\bar{A}}(X_0)=۰/۰۱٦۲$$

لازم به تذکر است که برازش گشتاورهای نظری به گشتاورهای نمونه ای (روش گشتاورها) به منظور برآورد پارامترها، روشی شناخته شده در تحلیل آماری است. معمولا وقتی از این روش استفاده می شود که روشهای دیگر مثل حداکثر درستنمایی جواب نمی دهند . علت عدم استفاده از این روش به جز مواقع ضروری این است که برای بررسی خواص برآوردگرهای به دست آمده ، نظریهٔ آماری عمومی ، وجود ندارد . مطالب بالا وقتی که از روش گشتاورها برای مجموعه های تصادفی استفاده کنیم ، هنوز به قوت خود باقی است . آیا برآوردگرهای به دست آمده از رابطهٔ ۹ اریب اند؟ واریانس وکوواریانس آنها چیست ؟ این برآوردگرها تحت کدام شرایط مجانباً دارای توزیع نرمال اند ؟ لازم به تذکر است هنریش [۲] نشان داده است که برآوردگرهای به دست آمده از روش کمترین تقابل با احتمال یک به مقادیر متناظرشان همگرا و مجانباً دارای توزیع نرمال اند .

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

جدول ۱: برآورد تابع کوواریانس

$r = \|r\|$	$\hat{c}(r)$	$\hat{c}(r)$
۱	۰/۷۰۵۶	۰/۷۰۶۸
۲	۰/۶۹۲۲	۰/۶۹۴۳
۳	۰/۶۷۹۱	۰/۶۸۲۴
۴	۰/۶۶۶۸	۰/۶۷۱۲
۵	۰/۶۵۴۹	۰/۶۶۰۵
۶	۰/۶۴۳۵	۰/۶۵۰۴
۷	۰/۶۳۲۴	۰/۶۴۰۸
۸	۰/۶۲۱۷	۰/۶۳۱۶
۹	۰/۶۱۱۳	۰/۶۲۲۹
۱۰	۰/۶۰۱۲	۰/۶۱۱۴

جدول ۲: برآورد تابع اصابت

t	$\hat{T}_X(tC)$	$-\log \hat{Q}_X(tC)$
۰	۰/۷۱۹۷	۱/۲۷۱۷
۱	۰/۷۵۵۳	۱/۴۰۸۰
۲	۰/۸۱۶۶	۱/۶۹۶۳
۳	۰/۸۶۴۰	۱/۹۹۴۹
۴	۰/۹۰۲۸	۲/۳۳۱۱
۵	۰/۹۳۵۰	۲/۷۳۲۷
۶	۰/۹۵۹۱	۳/۱۹۶۴
۷	۰/۹۷۵۰	۳/۶۸۷۷
۸	۰/۹۸۴۷	۴/۱۸۱۸
۹	۰/۹۹۰۵	۴/۶۵۶۹
۱۰	۰/۹۹۳۹	۵/۱۰۶۰
۱۱	۰/۹۹۶۵	۵/۶۵۶۸
۱۲	۰/۹۹۸۵	۶/۵۳۵۳

برای برآورد پارامترها به روش شدتها با توجه به روابط ۷، ۸ و ۹ داریم:

$$\hat{\lambda} = ۶۶/۳۲ \quad , \quad \hat{\bar{U}}(X_\circ) = ۰/۴۹۰۳ \quad , \quad \hat{\bar{A}}(X_\circ) = ۰/۰۱۹۲ .$$

پس از تبدیل واحد داریم:

$$\lambda = ۰/۰۰۴۷ \quad , \quad \hat{\bar{U}}(X_\circ) = ۶۲/۷۶ \quad , \quad \hat{\bar{A}}(X_\circ) = ۳۱۴/۱۱۵۹$$

مراجع

[1] Cressie, N. and G. M. Laslett (1987). *Random Set Theory and Problems of Modelling*. SIAM Reu. 29, 557-574.

[2] Heinrich , L .(1993) . *Asymptotic Properties of Minimum Contrast Estimators for Parameters of Boolaen Models*. Metrika 40, 67-94.

[3] Kendall, D. G.(1974). *Foundations of a Theory of Random Sets*. In. Stochastic Geometry (eds, E. F. Harding and D. G. Kendall). John Wiley & Sons, NewYork. pp 322-376.

[4] Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geodetery*. John Wiley & Sons, New York, London.

[5] Molchanov, I. (1994) . *Asymptotic Properties of Estimation of Estimators for Parameters of the Boolean Model*. Adv. Appl. Prob. 56, 301-323 .

[6] Stoyan, D., Kendall, W. S . & .Mecke, J. (1987) . *Stochastic Geonetry and Its Application*. J.Wiley & Sons .

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]

[7] Serra, J. (1982) . *Image Analaysis and Mathematical Morphology* .Academic Press, London, New york .

[8] Schmidt M. (1991). *Estimation of the Density in a Stationary Boolean Model*. J. Appl. Probab. 28, 702-708.

[9] Weil, W. (1995). *The Estimatiom of Mean Shape and Mean Particle Number in Overlapping Particle System in the Plan*. Adu. Appl. Prod. 27,102-119.

[۱۰] .حمید قربانی (۱۳۷۹). استنباط آماری برای مدلهای بولی ، رسالهٔ کارشناسی ارشد، دانشگاه شهید بهشتی .

[Downloaded from andisheyeamari.irstat.ir on 2025-05-21]